国外电子与通信教材系列

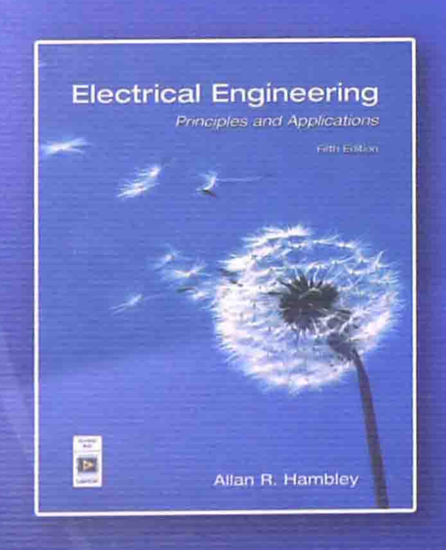
PEARSON

电工学原理与应用

（第五版）

Electrical Engineering

Principles and Applications, Fifth Edition



[美] Allan R. Hambley 著

熊 兰 彭光金
孙 韬 余传祥 等译



http://www.phei.com.cn

电工学原理与应用（第五版）

Electrical Engineering：Principles and Applications, Fifth Edition

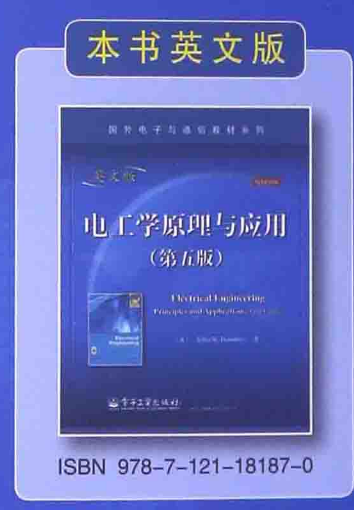
本书是电工学概论领域的经典教材，也是畅销教材。作者通过讲授电工学原理来激励学生学习，并应用于解决各个工程领域的特定的或者有趣的问题，同时还提供了详尽的例题和实际应用范例。

本书主要包括基本电路分析、数字系统、电子器件与电路、电机学等内容，适用于电气工程专业学生的导论课程或者非电类专业学生的综合性课程。

第五版的新增内容

- 增加了测试题，便于学生在每章结束时复习和测验。
- 第2章～第6章增加了使用MATLAB和符号工具箱进行网络分析的内容。
- 增加了大约150道习题，替换并更新了以前版本的习题。
- 在第2章增加了对电导的讨论，阐述如何快速写出节点和网孔方程，使用MATLAB对网络方程进行数值与符号求解，并增加了两个新例子。
- 3.8节增加了使用MATLAB求解积分和微分方程的内容。
- 4.6节增加了采用MATLAB和符号工具箱进行瞬态分析的内容。
- 第5章增加了复功率的内容，5.8节增加了使用MATLAB分析交流电路的内容。
- 6.9节增加了传递函数和伯德图。修改了数字信号处理的内容，并移至6.10节进行讨论。

本书英文版



ISBN 978-7-121-18187-0

本书为老师和学生提供了丰富的配套资源，学生资源可以登录华信教育资源网（www.hxedu.com.cn）下载，教师资源申请方式请参见书末的“教学支持说明”。







定价：108.00 元



策划编辑：冯小贝
责任编辑：周宏敏
责任美编：孙焱津



国外电子与通信教材系列

电工学原理与应用

(第五版)

Electrical Engineering: Principles and Applications

Fifth Edition

[美] Allan R. Hambley 著

熊 兰 彭光金
孙 韬 余传祥 等译

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内容简介

本书是讲述电工学概论的经典教材，也是畅销教材。作者讲授电工学原理，并关注于解决各个工程领域的专业问题或者有趣的问题，以此激励学生认真学习思考。同时还提供了详尽的例题和实际的应用范例。本书包含电路分析、数字系统、电子器件与电路、电机学四大模块，主要内容包括：电阻性电路、电感与电容、瞬态电路分析、正弦稳态电路分析、频率响应与谐振、数字逻辑电路、微机原理、基于计算机的测量系统、二极管、放大电路、场效应管和三极管、运算放大器、磁路与变压器及直流、交流电机。

本书包含电路原理、基本电磁测量、模拟电子技术、数字电子技术、微机原理与电机学六门课程的基本内容，适合作为电气工程、计算机、自动化等本科专业的“专业导论”课程的教材。

图书在版编目（CIP）数据

电工学原理与应用：第5版／（美）汉布利（Hambley, A. R.）著；熊兰等译. —北京：电子工业出版社，2014.9
（国外电子与通信教材系列）
书名原文：Electrical Engineering: Principles and Applications, Fifth Edition
ISBN 978-7-121-23825-3

Ⅰ. ①电…　Ⅱ. ①汉… ②熊…　Ⅲ. ①电工学-高等学校-教材　Ⅳ. ①TM1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 156882 号

策划编辑：冯小贝
责任编辑：周宏敏
印　　刷：北京京师印务有限公司
装　　订：北京京师印务有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：44.75　字数：1293 千字
版　　次：2014 年 9 月第 1 版（原著第 5 版）
印　　次：2014 年 9 月第 1 次印刷
定　　价：108.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

译 者 序

随着科学技术的不断发展，各学科与电工学科之间的联系不断加强。目前，各高校开设“电工学”课程的专业和学科越来越多，电工学课程已经不仅是非电类工科(例如机械、化工、生物、土木)学生的技术基础课，也成为了文经管类和理科类专业的选修课程。为适应各专业的需求，电工学课程的模块化教学日益明显，课程类别主要分为三类：1. 包含电路理论、电子技术和电机控制及其应用的“电工电子技术”课程；2. 仅包含电路理论和电子技术的“电路与电子技术”课程；3. 仅包含电路理论和模拟电子技术的“电路与模拟电子技术”课程等。此教材内容宽泛，完全能够满足电工学课程模块化教学的需要。

从教材的结构与内容来看，原版教材与国内现行电工学课程的教学大纲和教学要求基本吻合，还可以满足电工学课程双语教学的需要。该教材的特点是：对知识点和概念的介绍清晰、生动，列举应用电路的实例丰富，而且文字叙述简明、生动；同时，练习题量大，便于学生自学和复习。

自 2007 年 1 月以来，本书译者开始了电工学课程双语教学的改革试点，通过广泛比较各种相关课程的外文原版教材，最终选择了由 Allan R. Hambley 所著、由 Pearson 出版的 *Electrical Engineering: Principles and Applications*。该教材一直被美国蒙大拿大学、科罗拉多大学以及加拿大滑铁卢等大学的机械、化学、环境、地理甚至计算机等专业所选用。

数届双语教学试点班学生对教材的总体评价是易学、易懂，对培养学生的创造力和想象力具有潜移默化的作用，也有助于培养学生用英语思维的习惯。

本书由重庆大学电工学课程组担任翻译工作，由熊兰负责组织与审核。其中，彭光金翻译第 1 ~ 2 章；孙韬翻译第 3 ~ 5 章；熊兰翻译第 7、10、12、13、17 章；余传祥翻译第 11、14、15 章；彭文雄翻译第 6、16 章和附录；杨子康翻译第 8 ~ 9 章。参加翻译工作的还有柏榆、李俊伟、李伟、马龙、陈加鹏、苗雪飞、周健瑶、谢子杰、焦阳。在翻译过程中，译者认真总结多年的教学经验，参考了多种国外英文教材和国内教材，力求译本语言叙述流畅、清晰易懂，注意内容的衔接与连贯性，章节过渡自然。在教材翻译后期，教材试用得到了 2009 ~ 2011 级电工学双语课程试点班同学的支持，并提出了很多宝贵的意见和建议。在此一并表示衷心感谢。

由于译者水平有限，书中难免存在缺点和错误，恳请广大读者批评指正。

前　　言[①]

与过去的版本一致，编写本书的指导思想主要有以下三点：第一，从长远来看，学生学好基本概念就是为将来的发展打好基础；第二，通过解决不同领域的实际和有趣的问题，可以激发学生的学习热情；第三，尽可能避免学生遭遇学习挫折。

本书主要包括电路分析、数字系统、电子学与电机学等内容，适用于电气工程专业学生的导论课程或者非电类专业学生的综合性课程，要求学生学习过基础物理学和单变量微积分的课程。采用本书授课有利于提高以下方面的理论与实验技能：

- 基本电路分析与测量
- 一阶和二阶电路的瞬态响应
- 交流稳态电路
- 谐振与频率响应
- 数字逻辑电路
- 微控制器
- 基于计算机的测量仪器(包括 LabVIEW 软件)
- 二极管电路
- 放大电路
- 场效应管与双极结型晶体管
- 运算放大器
- 变压器
- 交流电机与直流电机
- 计算机辅助电路分析(Multisim 和 MATLAB 软件)

本书注重基本概念，每一章都安排一段内容，概括介绍电气工程理论在其他领域中的应用，主要包括内燃机中的抗震信号处理、心脏起搏器、动态噪声控制和全球定位系统等。

作者非常欢迎读者对本书进行评价，尤其是提出宝贵的修改意见和建议，这些建议将体现在修订版中。作者的电子邮件地址为：arhamble@mtu.edu。

MATLAB 及其符号工具箱

在本书中，我们将给出更多的实例来阐明如何将 MATLAB 软件应用于网络分析，包括如何发挥其符号数学解决能力。所有例题、练习和习题都基于 MATLAB R2008a 版本，而符号工具箱则基于 Maplesoft 公司的 Maple 软件。注意，如果采用其他版本的软件，可能因为具备不同的功能导致以下两种结果：其一，不能运行程序；其二，运行程序的结果与本书提供的形式有所不同。毋庸置疑，对于上述结论，如果启动 MATLAB R2008b 版本，将默认使用 MuPAD(MathWorks 公司的产品)，而不是 Maple 软件工具。

---

① 本书中文版的一些符号、图示、字体保留了英文原版的写作风格。

学生资源[①]

本书为学生提供了更新、更丰富的资源。登录网址 www. pearsonhighered. com/hambley 即可获取下列资源。

- Pearson eText：这是一部完整的在线电子书，具有重点内容提示、笔记和检索功能。
- 视频解答：针对每章具有代表性的习题提供完整的逐步求解过程。
- 学生解答手册：每章的 PDF 文件提供了各章练习和标有星号的习题的答案，以及全部测验题的详细解答。
- MATLAB 文件夹：包含书中讨论到的例题的 m 文件，除了使用 Symbolic 工具箱分析例题，这些文件也可以采用 MathScript 软件来运行。还有一个 MathScript 文件夹，包含其能够运行的 m 文件。
- Multisim 10.1 文件夹：包含 Multisim 软件使用教程，以及书中大量电路的仿真分析。从附录 D 中可以获取更丰富的信息。
- OrCAD 16.2 文件夹：包含 OrCAD Capture CIS 16.2 软件使用教程，从附录 D 中可以获取更丰富的信息。（OrCAD Capture 的新版本可以从以下网址下载：http://www. ema-eda. com/products/orcad/demosoftware. aspx。）
- 附录 G：即 OrCAD 10.5 软件的使用教程。该 PDF 文件便于使用以前版本的教师能够继续使用该版本的程序，也是对本书第四版附录 D 的更新。
- 虚拟仪器文件夹：包含 9.4 节涉及的 LabVIEW 程序。

教师资源[②]

教师资源如下：

- 完整版本的习题解答。
- 本书配套的 PPT。

第五版的新增内容

- 增加了测验题，便于学生在每章结束时进行复习和测验。附录 E 包含实际测试的所有答案，完整解答则在网站的学生资源中给出。
- 第 2 章 ~ 第 6 章增加了使用 MATLAB 和符号工具箱进行网络分析的内容。
- 增加了大约 150 道习题，替换并更新了以前版本的习题。
- 在第 2 章中增加了对电导的讨论，阐述如何快速写出节点和网孔方程，使用 MATLAB 对网络方程进行数值与符号求解，并增加了两个新例子。删除了采用叠加原理求解含受控源电路的内容，增大了叠加原理应用的篇幅。
- 3.8 节增加了使用 MATLAB 求解积分和微分方程的内容。
- 4.6 节增加了采用 MATLAB 符号工具箱进行瞬态分析的内容。
- 第 5 章增加了复功率的概念，5.8 节增加了使用 MATLAB 分析交流电路的内容。
- 6.9 节增加了传递函数和伯德图。修改了数字信号处理的内容，并移至 6.10 节进行讨论。

---

① 学生资源网站的一些资源可登录 www. hxedu. com. cn 下载。

② 教辅申请方式参见书末的"教学支持说明"。

- 将第 9 章修改为阐述 LabVIEW 软件的升级。
- 对全书的内容进行了修订与完善。
- 新版本的附录 D 用于介绍 National Instrument 公司的 Multisim 软件，学生通过网络可以获取使用 Multisim 软件求解书中习题的方法，从附录 D 中可以获取更丰富的信息。以前版本的附录 D(基于 OrCAD 10.5)也可以在网站中下载。
- 附录 E 增加了实际测试的答案。

基础知识

应掌握基础物理学和单变量微积分的知识，提前学习过微积分的课程对于学习本书会有所帮助，但并不是必要的。微分方程将在第 4 章的瞬态分析中出现，可以从基本计算中训练求解技巧。

教材特点

本书采用多种方式来激发学生的学习兴趣、避免概念混淆和引导学生了解书中具体内容与本专业的相关性。教材特点如下：

- 每章开始有一段对于学习目标的描述。
- 给出电工学理论在其他工程领域的应用，例如关于动态噪声的消除、心脏起搏器。
- 解题过程循序渐进，例如节点电压分析的解题步骤总结或者戴维南等效电路分析的小结。
- 每章结束有一组测验题，方便学生测验所学知识，答案见附录 E，完整的解答在网站下载的学生解答手册中。
- 对于书中的练习和测验题的完整解答，以 PDF 文件形式上传于网站中供学生下载，这有利于学生建立信心，并确定自己需要补充学习的内容。
- 在每章结束时进行小结，以供学生参考。
- 重要公式在书中突出显示，提示读者重视这些重要的结果。

满足认证培训教学的需求

本书为多种授权认证培训提供了很好的选择，工程认证标准(Criteria for Accrediting Engineering)要求毕业生应具备“应用数学、科学和工程知识的能力”和“认识、表述和解决工程问题的能力”。本书正是为培养学生的这些能力而编写的。

同时，毕业生必须具备“设计、组织实验及分析、解释数据的能力”。第 9 章的内容就是旨在培养这一能力的，如果课程学习还包含此类实验，那么这方面的能力可得到进一步提升。

此外，工程认证标准要求培养“团队协作能力”和“有效沟通的能力”。基于本书的课程，为非电类专业学生提供了相关的知识及有效的与电气工程师沟通的能力训练。本书也有助于电气工程师了解电工理论在其他工程领域的应用，为了加强交流，每章的习题都要求学生用自己的想法来解释电气工程的概念。

本书提供了 LabVIEW 和 Multisim 软件包，可以培养学生“使用技术、技能和现代工程必备工具进行工程实践”的能力。

本书的内容及组织

基本电路分析

第 1 章定义电流、电压、功率和能量，介绍基尔霍夫定律、欧姆定律，定义电压源、电流源和电阻。

第 2 章分析电阻电路，介绍电阻网络的化简、节点电压法和网孔电流法，同时讲解戴维南等效电路、叠加原理及惠斯通电桥。

第 3 章介绍电容、电感和互感。

第 4 章讨论电路的暂态响应，首先介绍一阶 RL、RC 电路和时间常数，然后讨论二阶电路。

第 5 章讨论正弦稳态电路的特性(附录 A 讲解复数知识)，介绍功率计算、交流电路戴维南和诺顿等效电路，以及对三相对称电路的分析计算。

第 6 章讨论频率响应、伯德图、谐振、滤波器和数字信号处理，介绍傅里叶理论(信号由具有各种不同幅度、相位和频率的正弦成分组成)的基本概念。

数字系统

第 7 章介绍逻辑门、二进制数值表达、组合逻辑和时序逻辑，讨论布尔代数、摩根定律、真值表、卡诺图、编码器、译码器、触发器和寄存器。

第 8 章介绍微型计算机并重点讲解嵌入式系统，以摩托罗拉公司的 68HC11 作为主要应用实例。同时，介绍了计算机的结构与内存条的类型，概述了单片机的数字处理控制功能。最后，讲述了 68HC11 的指令和寻址方式，并简单介绍汇编语言的编程。

第 9 章讨论以计算机为基础的仪器系统，包括测量的概念、传感器、信号调理与模数转换。最后，讨论使用 LabVIEW 软件编写虚拟仪器的应用实例，学生可以将程序复制到自己的计算机中进行实际操作。

电子器件与电路

第 10 章介绍二极管的多种电路模型、负载线分析和各种应用电路，例如整流电路、稳压电路和波形整形电路等。

第 11 章从应用的角度介绍放大器的性能参数和缺陷，包括各种增益、输入/输出阻抗、负载效应、频率响应、脉冲响应、非线性失真、共模抑制和直流漂移等内容。

第 12 章介绍 MOS 场效应管的结构、工作原理和特性曲线，负载线分析，大信号和小信号模型，偏置电路，以及共源放大器和共漏放大器。

第 13 章介绍双极结型晶体管的结构、工作原理和特性曲线。如果需要，可以调换第 12 章和第 13 章的授课顺序，也可以通过对比两种器件及电路的差异和共性，从而节约时间来讨论其他主题。

第 14 章讨论运算放大器及其各种应用。非电类专业学生能通过本章学习如何使用和设计用于各自领域的测量仪器的运算放大电路。

电机学

第 15 章复习基本电磁场原理，分析磁路和变压器。

第 16 章和第 17 章分别介绍直流电机和交流电机，主要强调电动机而不是发电机，因为非电类的工程师通常面对的对象是电动机而不是发电机。第 16 章介绍多种电动机，然后介绍直流电动机，包括等效电路和性能的计算，以及通用电动机及其应用。

第 17 章介绍交流电动机，从三相感应电动机开始，再介绍同步电动机及各自的优点，并分析功率因数校正的问题。最后，介绍步进电动机和无刷直流电动机。

致谢

感谢我在密歇根理工大学电气与计算机工程系的同事们，在我编写本书和从事其他工作的过程中，他们不断给予我帮助和鼓励。

在编写本书的各个阶段，得到了来自其他机构的审校者的许多很好的建议，这些建议使本书得以顺利出版，在此一并感谢。

第五版的审校者：

William Best, Lehigh University
Steven Bibyk, Ohio State University
Karen Butler-Purry, Texas A&M University
Walter Green, University of Tennessee
Jasmine Henry, University of Western Australia
Ian Hutchinson, MIT
David Klemer, University of Wisconsin, Milwaukee
Selahattin Sayil, Lamar University
John Tyler, Texas A&M University
Subbaraya Yuvarajan, North Dakota State University

前几版的审校者：

IbrahimAbdel-Motaled, Northwestern University
D. B. Brumm, Michigan Technological University
Robert Collin, CaseWestern University
JosephA. Coppola, Syracuse University
Norman R. Cox, University of Missouri at Rolla
W. T. Easter, North Carolina State University
Zoran Gajic, Rutgers University
Edwin L. Gerber, Drexel University
Victor Gerez, Montana State University
Elmer Grubbs, New Mexico Highlands University
Richard S. Marleau, University of Wisconsin
Sunanda Mitra, Texas Tech University
Phil Noe, Texas A&M University
EdgarA. O'Hair, Texas Tech University
John Pavlat, Iowa State University
Clifford Pollock, Cornell University
Michael Reed, Carnegie Mellon University
Gerald F. Reid, Virginia Polytechnic Institute
William Sayle II, Georgia Institute of Technology
Len Trombetta, University of Houston

Belinda B. Wang, University of Toronto

CarlWells, Washington State University

Edward Yang, Columbia University

Rodger E. Ziemer,University of Colorado, Colorado Springs

感谢弗吉尼亚理工大学的 AlWicks 教授对本书第二版的审校及给出的良好建议。密歇根理工大学等高校有大量的学生和教师使用本书，他们更正了错误并提出了宝贵的修改意见，在此表示衷心的感谢。

另外，我要感谢 Prentice Hall 负责本书各个版本的几位编辑，他们是 Andrew Gillfrlan 和 Tom Robbins，他们给我指明了正确的编写方向并提出了良好的修改建议。此外还要感谢 Scott Disanno 所做的大量的教材出版方面的工作。

感谢 National Instrument 公司的 Erik Luther，他给我提出了很多有益的建议。感谢 TexTech International 公司的 Maheswari PonSaravanan 对此书所做的贡献。

最后，感谢 Tony 和 Pam 一直以来对我的鼓励和建议，感谢 Judy 给予我的支持和帮助。

Allan R. Hambley

目　　录

第Ⅰ部分　电　　路

第Ⅱ部分 数字系统

第Ⅰ部分

电　　路

电路是本书的第Ⅰ部分，是所有电气工程及其应用的基础，包括数字逻辑、计算机、仪表系统、电子学、电机、功率转换和功率分配等内容。

本书第 1 章描述了电气工程的各个应用领域，以及电工学课程对所有工程师和科学家的重要性。第 2 章分析了由直流电源供电的电阻电路。第 3 章讨论电容和电感。第 4 章分析暂态电路。第 5 章分析稳态正弦交流电路。第 6 章介绍频率响应和谐振。

研究电路与研究其他工程学科领域有相似之处。对电阻电路的直流分析为静态分析，对电路的暂态分析为动态分析，而关于交流电路的稳态、频率响应、谐振等概念则与声学和振动学有相似之处。通过学习电路分析方法将有助于加强数学和思维技巧，这些能力的培养对工程实践或科学研究工作尤其需要。

第1章　介　　绍

本章学习目标

- 理解电气工程与其他科学、工程领域之间的关系
- 列举电气工程主要应用的子领域
- 列举研究电气工程领域的重要性
- 了解电流、电压与功率的定义与单位
- 掌握功率和能量的计算，区别电路元件是提供能量还是消耗能量
- 掌握基尔霍夫定律
- 理解电路的串并联结构
- 理解电压源和电流源及其主要特征
- 掌握欧姆定律的应用
- 掌握简单电路的电流、电压和功率的求解方法

本章介绍

本章介绍电路的各参数(电流、电压、功率与能量)，研究其遵循的定律以及几种电路元器件(电流源、电压源和电阻)。

1.1　电气工程综述

电气工程师设计的系统功能有如下两类：

1. 信息的收集、存储、处理、转换和显示。
2. 能量的分配、存储和转换。

在很多电气系统中，对能量和信息的处理是相互依存的。

例如，关于信息方面的知识应用于天气预报中，有关云层覆盖、降雨、风速等方面的数据被气象卫星、地面雷达系统和众多气象站中的传感器采集起来(传感器是一种将物理测量结果转换成电子信号的装置)，这些信息通过通信系统和计算机系统加以传输和处理以用于天气预报，其结果通过电的方式进行传播和显示。

在发电厂中，各种形式的能量被转化成电能。电力调度系统将能量传输到全球各工厂、家庭和企业，在那里能量被转换为各种有用的形式，如机械能、热能和光能。

毫无疑问，可以列举日常生活中电气工程的很多应用。目前，电力电子技术越来越多地被融合在新的产品中，轿车和卡车即为一个例证。电子设备在轿车上的应用加快了轿车的增值，使汽车设计师们认识到电子技术的应用是一个增加功能、降低成本的好方法。表1.1阐述了一些电气工程在汽车方面的应用。

另一个应用实例是许多家用电器中包含了用于控制的按钮、传感器、电子显示屏和一些芯片，还有一些方便的开关、加热器件和发动机。可见，电子器件已经和机器设备紧密地整合在

一起，于是一个新的名词应运而生，即机电一体化。遗憾的是，目前很多工程师还没有足够的能力去设计机电一体化的产品：

工程领域就像很多的岛屿，如果居民只熟悉自己的岛屿，而对别的岛屿知之甚少，也很少接触，这样必然阻碍工程师的设计开发能力。无论研究领域是电力、电子、机械、化学、土木还是企业，现代的工业生产体系也包括生产如飞机、汽车、计算机及很多复杂产品，这些都要依靠各种不同学科技术的有机、和谐的结合。

1.1.1　电气工程应用的子领域

下面给出了电气工程应用的一些领域，简要讨论了8个主要的子领域。

1. 通信系统　是以电子形式传播信息的。手机、广播、卫星电视和因特网都是通信系统的例子，这使得地球上的两个人同步通话成为可能。一个在尼泊尔山顶的登山者可以给他的朋友打电话或者发电子邮件，不管朋友是在阿拉斯加徒步旅行还是在纽约的办公室。这种通信影响了我们的生活方式、商业经营方式以及工程设计。例如，通信系统将改变高速公路的设计，因为交通和路面状况的信息可以通过路边的传感器被采集起来传输到当地的交通控制中心。当发生交通事故时，一个电子信号会在安全气囊展开后自动发出，给出汽车的确切位置并寻求帮助，同时通知交通控制中心的计算机系统。

表1.1　现代电力电子技术在轿车和卡车上的应用

安全性能
防抱死系统
安全气囊
碰撞的预警和防避
车辆盲区检测(尤其针对大型卡车)
红外夜视系统
仪表显示
自动故障提示
通信和娱乐
AM/FM广播
数字音频播放
CD/磁带播放器
车载电话
计算机/邮件
卫星广播
便利性
电子导航
个性化的座位/镜子/广播收音设定
电子门锁
排放、性能和燃料经济性
汽车仪表
电子点火
轮胎压力感应器
程序化的性能评估和行程维护
适应性悬挂系统
交替推进系统
电动汽车
高效电池
混合动力汽车

2. 计算机系统　以数字信号的形式处理和存储信息。毫无疑问，每个人在不同工作岗位都在使用计算机。另外，计算机还被用到很多不为人注意的地方，比如家用电器和汽车。一个典型的现代汽车会包含很多特定的计算机控制功能，而化学工艺流程和铁路交通调度也是通过计算机加以控制的。

3. 控制系统　通过传感器收集信息，并用电能对物理过程进行控制。居室里的加热和冷却系统就是一个简单的控制系统，传感器(或温控器)比较当前温度与设定值之间的差距，控制电路通过控制电炉或空调以达到设定的温度。在轧制钢板时，通过电子控制系统可以得到想要的厚度，如果钢板过厚(或者过薄)，更多(或者更少)的力将被用到轧辊上来修正偏差。化学过程中的温度和流动速度也通过相同的方式来控制，控制系统被安装到高层建筑中，用于减小因风而引起的建筑物晃动。

4. 电磁学　是对电场和磁场领域的研究和应用。磁控管在烤箱中产生微波用于加热是一种应用。与此相似但具有更大能量的设备则用于生产胶合板，电磁场加热胶合板各层之间的胶，使各板很快地结合。手机和电视天线也是电磁设备应用的实例。

5. 电子学　是研究材料、设备以及放大和开关电信号的电路及其应用。最重要的电子元器

件是各种各样的晶体管，应用于电能和电气信息等各方面。例如，心脏起搏器是一个感应心脏跳动的电子电路，如果心脏停止跳动，起搏器会对心脏进行持续一分钟的刺激。电子仪表和电子传感装置应用到了几乎所有的科学和工程领域，本书在介绍各种放大器时也介绍了它们在各个工程领域中的应用。

6. 光电子学 是一个在科学和工程领域令人兴奋的新兴学科，极有可能取代传统的以驱动电子为基础的计算、信号处理、信号感应和通信设备，转而推进以驱动光子为基础的生产方式，极大地提高生产率。光电子学包括新一代的激光和发光二极管，通过光电器件实现传输光信息以及开关、调制、放大和检测等功能，也包括用于驱动光信号的电学、声学和成像学设备。目前的应用包括 DVD 碟片、全息图、光学信号处理器和光纤通信系统，未来的应用将包括光学计算机、全息存储和医疗设备。光电子学给所有科学家和工程师提供了一个巨大的机遇。

7. 电力系统 将发电厂发出的电能传输到距离很远的地方。这个系统由发电机、变压器、输电线路、电动机和其他一些设备组成。机械工程师通常用电动机来完成他们的设计，而电动机的选择需要依据其机械特性。本书将介绍这些相关信息。

8. 信号处理 针对载有信息的电信号进行处理，通常是从来自传感器的信号中提取有用的信息。其中一种应用是处理机器人的视觉信号，另一种应用是对内燃机点火系统的控制。内燃机点火的时机对其运行状况和减少污染水平至关重要，影响机轴旋转的最佳点火时机取决于如下因素：燃料质量、空气温度、油门的设定、发动机的转速以及其他因素。

如果点火时间稍微超过了最佳时机，发动机会振动并发出刺耳的金属声，这是由于化学燃料在燃烧室里释放能量时造成的快速压力波动引起的。燃烧室的压力波动通过外在的振动体现出来，如图 1.1 所示。剧烈振动将会很快损坏发动机，因此，在更实用的信号处理装置出现之前，发动机的计时只能在不理想的直视状态下凭经验进行控制，以避免在不同运行状态下的发动机振动。

通过在燃烧室中接入一个传感器而获得一个与压力成正比的电子信号，由电子电路分析处理此信号，并判断是否因过快的压力波动特性而引起振动，这时，电子电路不断将点火时间调整到最合适的时候以避免撞击。

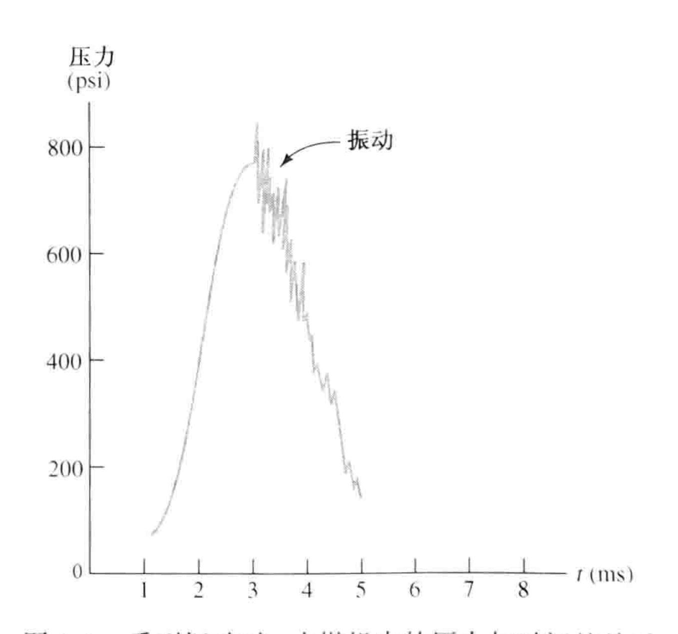


图 1.1 受到振动时，内燃机中的压力与时间的关系曲线。传感器将电压转换为电信号，以便调整燃烧时间，减小污染，实现更佳的性能

1.1.2 为什么需要学习电气工程

作为本书的读者，你可能正在从事其他工程领域和科学领域的工作，或者上一些关于电气工程的必修课程，你的学习目标可能是为了达到获得学位所必需的课程要求。不过，基于以下原因有必要学习和掌握一些电气工程的基础知识。

1. 通过基本的工程知识(FE)考试，为成为注册执业工程师做准备　在美国，要求公共工程的从业者必须成为注册执业工程师(PE)。本书提供了注册考试中电气工程方面的知识，可把本教材和相关课程笔记作为FE考试的复习资料(参见附录C中更多有关FE考试的内容)。

2. 拓展自身的知识面，有助于工程设计的工作　在其他领域的科学实验和工程设计中涉及电气工程的内容已经成为一种发展趋势，企业要求工程师之间不仅相互协作，而且要具备较宽的知识面，那些只熟悉和关注本专业知识的工程师或科学家将很难登上领导岗位。从这方面而言，电气工程师应该是非常幸运的，因为结构、机械和化学处理等方面的基础知识可以在日常生活中接触并熟悉，但是，对没有进行系统学习的人来说，电气工程知识是比较深奥难懂的。

3. 可以操作和维护电气系统，如机加工过程的控制系统　大多数电路故障的排除只需要掌握基本的电气工程知识就足够了，能够把电气工程知识应用到工程实践中的工程师或科学家是非常优秀和宝贵的。

4. 可以与电气工程师进行交流　如果工作中需要经常与电气工程师紧密联系，本书则提供了与电气工程师交流常用的基本知识。

1.1.3　本书内容

电气工程领域涵盖的内容太广，不可能在一两门课程中讲完。本书的目的是介绍一些常用的电气基本概念。电路原理是电气工程师最基本的工具，因此本书第Ⅰ部分前6章的内容介绍电路。

嵌入式计算机、传感器和数字电路与工程师或科学家的工程设计紧密相连，因此，本书第Ⅱ部分重点介绍嵌入式计算机和电气仪表中常用的数字系统。本书第Ⅲ部分介绍电子器件与电路。

机械、化学、建筑、工业或其他领域的工程师经常会用到能量转换设备，因此，本书最后一部分介绍电力系统中的变压器、发电机和电动机。

本书介绍了很多基本概念，可用于电气工程师的入门学习课程。另外，无论是其他专业还是电气专业的工程师或科学家，均可以通过本书的学习来了解电气工程知识是如何应用于其他领域的。

1.2　电路、电流和电压

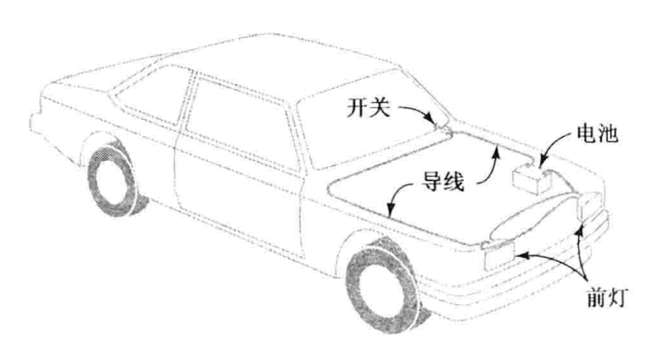
1.2.1　电路的基本知识

在细致讨论电路之前，我们先用一个简单的例子来理解电路的概念。例如，汽车车灯的电路模型。这个电路包括一个电源、一个开关、前灯以及连接它们而构成闭合回路的导线，如图1.2所示。

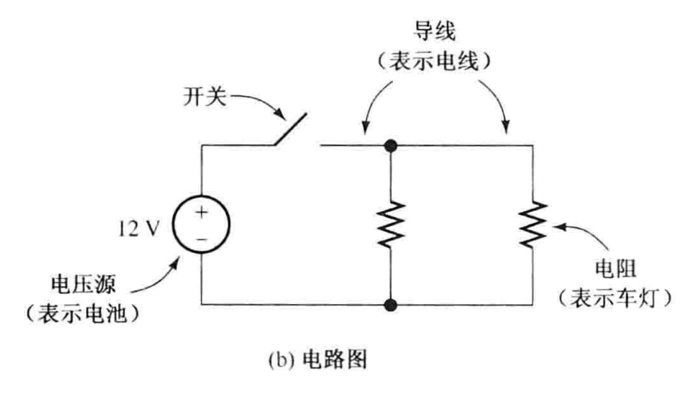
电池中的化学能产生电荷(电子)流过电路，电荷从电池中的化学能得到的能量并传递给汽车前灯，电池的电压(一般为12 V)是一个单位电荷通过电池所得到的能量的度量单位。

导线由良好的电导体(铜)构成，这些导线通过缠绕在外周的绝缘体(塑胶)而相互绝缘。电子可以通过铜导线，但不会通过塑料绝缘体，所以电荷的流动(电流)必然沿着导线直至前灯。众所周知，空气是一种绝缘体。

开关用来控制电流。当开关的导线金属片互相接触时，则称为开关闭合，电流通过开关。反之，当金属导线部分没有接触时，则称为开关断开，没有电流通过。



(a) 实际电路的结构



(b) 电路图

图 1.2 车灯电路

前灯装置包括特殊的耐高温的钨丝。钨丝没有铜的导电性能好，当电子与钨丝的原子发生碰撞时，导致钨丝发热，我们称钨丝具有电阻。所以，能量从电池中的化学能转移给电子，再转移至钨丝时表现为发热，钨丝达到足够的温度后就会发出大量的光。而且，电子转移的功率等于由电池提供的电流(电荷的流速)和电压(又称为电势)的乘积。

实际上，对汽车前灯电路的简单描述更适合于传统汽车。在现代汽车中，传感器可以为内嵌计算机提供周围环境的亮度信息，确定灯具是否需要提供能量，转换装置是否启动。只需通过仪表盘开关输入一个逻辑信号给计算机，表明操作者对前灯进行操作的目的。计算机根据这些输入的信息控制前灯电路的开关。当灯具熄灭而且周围光线很暗时，计算机将保持灯亮几分钟，以便乘客下车，然后将灯关闭，从而节约电池的能量。这个典型例子说明采用高性能的电子与计算机技术能增强所有工程领域中的工程设计能力。

1.2.2 液体流动模拟

电路类似于液体流动系统。电池好比一个泵，电荷类似于液体，而导线(通常为铜丝)对应于有液体流过的无摩擦阻力的管道。这样，电流相当于液体的流动，电压相当于液体环路中各个点之间的压力差，开关相当于阀门。最后，钨丝灯泡的电阻把电能转变为热能，类似于在液流系统中导致出现湍流的一个束紧装置。实际上，电流是衡量电荷通过电路元件横截面的流速，而电压是用一个电路元件两端或者其他两点之间的电势差来衡量的。

现在，我们对简单电路有了基本的理解，进而可以更准确地理解相关的概念和术语。

1.2.3 电路

一个由导线连接的闭合回路中包含各种电路元件，图 1.3 表示了一个很简单的电路。电路元件可以是电阻、电感、电容和电压源等，各元件的符号如图 1.3 所示。本书后续会详细讨论各种类型元器件的性质。

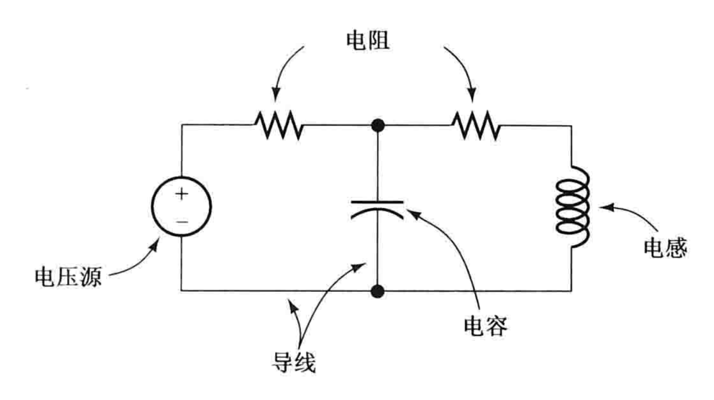


图 1.3 由多个元件（电压源、电阻、电感和电容）组成，并用导线连接为闭合回路的电路

电荷很容易通过连接各元件的导线，在实际电路中，导线相当于连接线。电压源为电荷流过导线和元件提供动力，使能量在各元件中传递，最后转化为一种有用的形式。

1.2.4 电流

电流是单位时间流过导线或电路元件横截面的电荷量。其单位是安培（A），即库仑每秒（C/s）。每个电子的电荷量为 -1.602×10^{-19} C。

一般来说，为了计算一个已知元件的电流，首先应选择电流的方向大致垂直于该元件的横截面。然后，沿电流方向选择一个参考方向，如图 1.4 所示。

接下来，假设已知流过横截面的电荷量。若正电荷沿着参考方向穿过横截面，则净电荷量增加，若正电荷沿着与参考方向相反的方向穿过横截面，则净电荷量减少。换言之，负电荷沿着参考方向穿过横截面将使净电荷量减少，若沿着与参考方向相反的方向穿过横截面，则被认为使净电荷量增加。

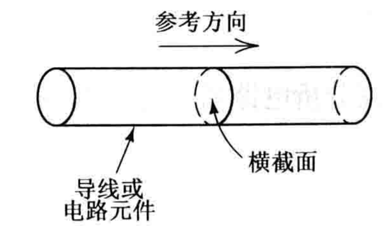


图 1.4 电流是单位时间流过导线或电路元件横截面的电荷量

如果电荷量关于时间的函数为 $q(t)$，则流过元件的电流表示为：

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.1}$$

1 A 的电流表示每秒内有 1 C 的电荷穿过元件的横截面。

为了通过电流量得到电荷量，需要进行积分运算，有：

$$q(t)=\int_{t_0}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t+q(t_0) \tag{1.2}$$

t_0是电荷量已知的初始时刻（除非特别说明，本书约定 t 用秒（s）为单位）。

通过同一电路元件横截面的电流值是相同的，在第 3 章介绍电容时会证明这个结论，即电流从元件的一端流入，从另一端流出。

例 1.1 由电荷量确定电流大小。

假设电荷量随时间变化的关系如下：

$$q(t)=0, \qquad t<0$$

和

$$q(t) = 2 - 2e^{-100t}\text{C}, \qquad t > 0$$

画出 $q(t)$、$i(t)$随时间变化的曲线。

解： 由式(1.1)得到：

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} \\ &= 0, \qquad t < 0 \\ &= 200e^{-100t}\text{A}, \qquad t > 0 \end{aligned}$$

$q(t)$、$i(t)$随时间变化的曲线如图 1.5 所示。

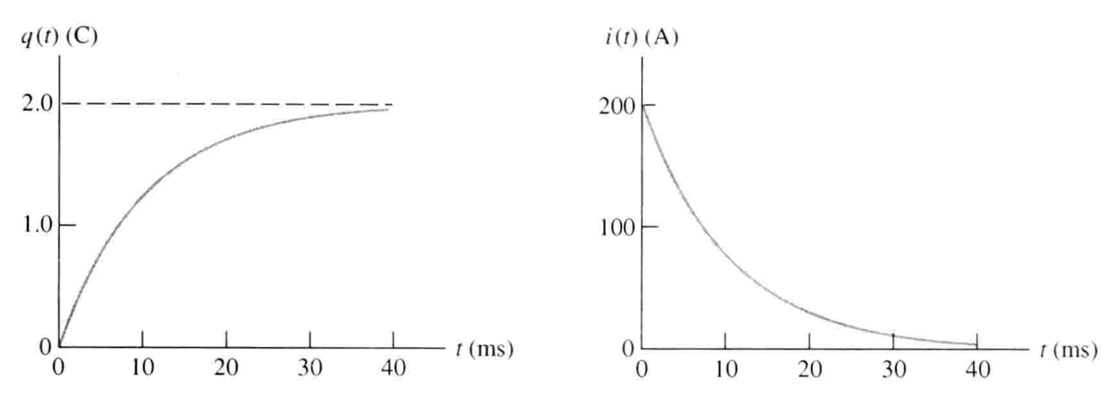


图 1.5 例 1.1 的电荷与电流的时间变化曲线。注意：时间单位为 ms，1 ms = 10^{-3} s

1.2.5 参考方向

在分析电路时，我们也许不知道某个元件的实际电流方向，所以可以对未知电流设定电流变量，并任意选择一个参考方向。通常情况下，用字母 i 来表示电流，用下标来区分不同的电流，如图 1.6所示。图中标注的方框 A、B 等表示电路元件，某些电流可能为负值。例如，假设电路中 $i_1 = -2$ A，由于 i_1是负值，可知其实际电流方向与选择的电流参考方向相反，所以实际电流的大小是 2 A，方向是自上向下流过元件 A。

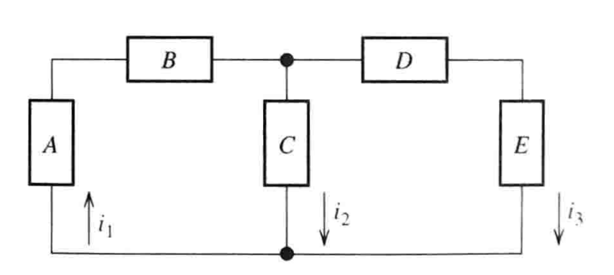


图 1.6 分析电路时，通常首先设置电流参量i_1、i_2、i_3

1.2.6 直流电流和交流电流

当电流随时间变化恒为常数时，我们称之为直流电流，缩写为 DC。另一方面，当电流的大小和方向随时间呈周期性变化时，称为交变电流，缩写为 AC。图 1.7(a)表示一个 DC 电流，图 1.7(b)表示一个正弦 AC 电流。当 $i(t)$变为负值时，实际电流方向则会变为与当前电流方向相反。交变电流还有其他类型，例如图 1.8 中的三角波和方波等。

1.2.7 用双下标符号表示电流

前面介绍了在元件旁边标注箭头来表示电流的参考方向。另一种表示元件电流参考方向的方法是标定元件两端的字母，用双下标来标注电流的方向。例如在图 1.9 中，i_{ab} 表示电流的参考方向是从 a 指向 b，同样，i_{ba} 表示电流的参考方向是从 b 指向 a。很显然，i_{ab} 与 i_{ba} 幅值大小相等，正负符号相反。由于它们表示同样的电流，但参考方向相反，所以 $i_{ab} = -i_{ba}$。

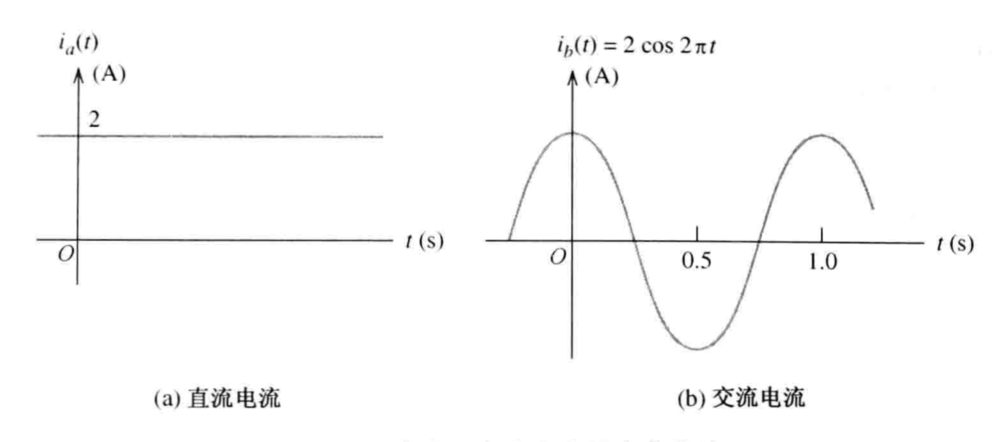


图 1.7 直流和交流电流的变化曲线

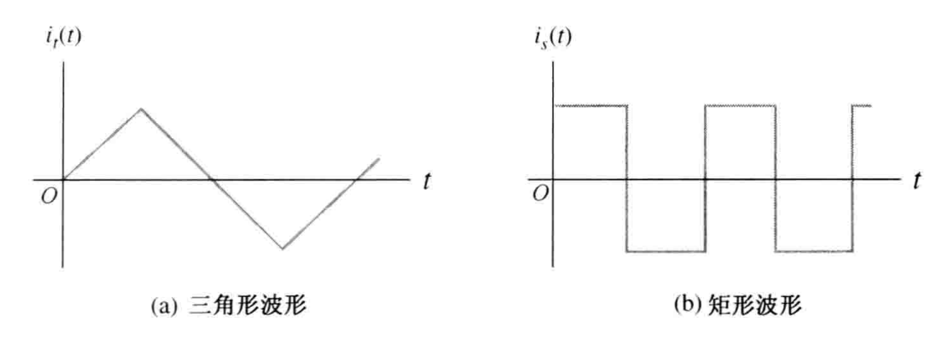


图 1.8 交流电流具有多种形状的波形

练习 1.1 2 A 的直流电流通过一个电流表，在 10 s(秒)内有多少电荷量通过该电流表？

答案： 20 C

练习 1.2 通过一电流表的电荷量 q 随时间 t 的变化如下：$q(t) = 0.01\sin(200t)$（角度用弧度表示），请找出电流随时间变化的函数关系。

答案： $i(t) = 2\cos(200t)$ A。

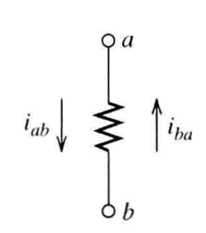


图 1.9 可通过标定元件两端的字母，并用双下标表示电流变量的参考方向。电流 i_{ab} 的参考方向是从 a 指向 b；反之，电流 i_{ba} 的参考方向是从 b 指向 a

练习 1.3 在图 1.6 中，设 $i_2 = 1$ A，$i_3 = -3$ A，假定正电荷运动的方向为电流方向，流经元件 C，E 的电流方向是什么？

答案： 元件 C 的电流方向为向下，元件 E 的电流方向为向上。

1.2.8 电压

当电荷经过电路元件时，能量就会被转移。例如，汽车的车灯由电池提供化学能，车灯将该化学能转化为电能，从而发光、发热。电路元件的电压是指当电流流过元件时单位时间电能的转换量。电压的单位为伏特(V)，等价为焦耳/库仑(J/C)。

如果一辆汽车的蓄电池电压为 12 V，这意味着每 1 C 的电荷流经蓄电池时有 12 J 能量发生转换。当电荷朝一个方向运动时，由电池供应能量，则在电路其他处转换为热能、光能或者提供给起重机的机械能。反之，当电荷沿相反的方向运动时，能量被电池吸收，表现为存储化学能。

电压的极性指明了能量转换的方向。如果正电荷从正极流向负极，则电路元件吸收能量，

如转换为光能、机械能和化学能。反之，如果正电荷从负极流向正极，则电路元件提供能量，如图1.10所示。对负电荷而言，能量转换的方向与正电荷相反。

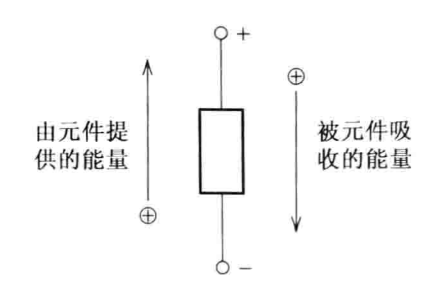


图1.10 当元件两端存在电压差时，电荷流过元件并传递能量

1.2.9 参考极性

在分析电流时，通常不知道实际电压的极性，所以可以给这些电压变量任意规定参考极性(当然，实际极性并非任意的)，如图1.11所示。接下来，根据电路原理(后面将详细介绍)列出等式，并求解出电压值，如果已知电压的极性与我们选定的参考极性相反，该电压为负值。如图1.11所示，若 $V_3 = -5$ V，可知电压在元件3上的幅值为5 V，实际极性与图中的极性相反(即实际极性为下正上负)。

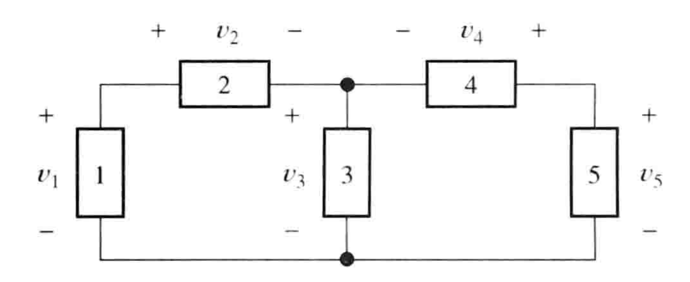


图1.11 如果不知道电路中的各电压值和极性，可以任意选定电压变量的参考极性(方框表示未知的电路元件)

通常，无须刻意去确定一个“正确”的电流方向或者电压极性。如果不确定，可以任意规定参考方向，然后根据电路分析结果来确定实际的方向与极性(以及电流与电压的幅值)。

电压可以为常数，也可以随时间变化。当电压为常数时称为直流电压，相反，幅值和极性随时间变化的电压称为交流电压。例如：

$$v_1(t) = 10\ \text{V}$$

是一个直流电压，因为其幅值和极性不变。不过，

$$v_2(t) = 10\cos(200\pi t)\text{V}$$

是一个交流电压，其幅度和极性随时间变化。若 $v_2(t)$ 为负值，则其极性与给定的参考极性相反(在第5章中将介绍正弦交流电流和电压)。

1.2.10 电压的双下标符号表示

另一种表示电压参考极性的方法是给电压变量标注双下标，如图1.12所示，用字母或数字来标注电压的两端。对图中的电阻，v_{ab} 表示 a、b 点之间的电压，参考极性 a 为正极。两下标表示电压的两个端点，第一个下标是正的参考极性。同样，v_{ba} 指 a、b 之间的电压，但 b 为正的参考极性。由此得出：

$$v_{ab} = -v_{ba} \tag{1.3}$$

可见，v_{ab} 与 v_{ba} 有同样的幅值，但极性相反。

当然，还有另一种方式可以表示电压，其参考极性用一个箭头表示。如图1.13所示，箭头的前端为正的参考极性。

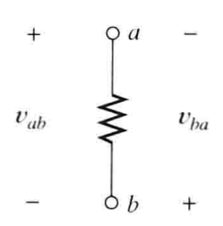


图 1.12 电压 v_{ab} 的极性为 a 端为正，b 端为负

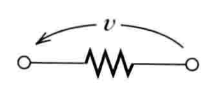


图 1.13 电压 v 的正极性在箭头的前端

1.2.11 开关

开关控制着电路中的电流。当一个开关断开时，经过的电流为 0，开关两端的电压由电路的其余部分决定。当开关闭合时，其两端电压为 0，而电流由电路的其余部分决定。

练习 1.4 一个元件两端的电压 $V_{ab}=20$ V，2 C 的正电荷从 b 至 a 流经元件。问：有多少能量发生转移？能量是由元件提供还是被元件吸收？

答案：由元件提供 40 J 的能量。

1.3 功率和能量

对于图 1.14 所示的元件，电流 i 表示电荷流动的速度，电压 v 是单位时间内能量转换的度量值，则电流与电压的乘积表示能量转移的速度，即功率：

$$p = vi \tag{1.4}$$

等式右边的物理单位计算表示为

伏特 × 安培 = 焦耳 / 库仑 × 库仑 / 秒

= 焦耳 / 秒 = 瓦特

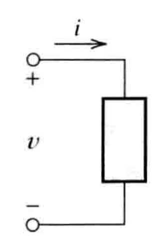


图 1.14 当电流流过一个元件时，电压出现在元件两端并传递能量。单位时间的能量是功率 $p = vi$

1.3.1 关联参考方向

现在读者也许会问：由式(1.4)计算的功率如何表示能量由元件提供，还是被元件吸收？参照图 1.14，如果电流的参考方向是从电压的正极流入，称这种情况为关联参考方向。这时，如果计算的功率为正值，表示能量被元件吸收。相反，负的结果意味着由元件向电路的其他部分提供能量。

如果电流的参考方向是从电压的负极流入，则计算功率的表达式为

$$p = -vi \tag{1.5}$$

此时，若功率为正值，表明能量被元件吸收；若为负值，则表示该元件为其他元件提供能量。

如果电路元件是电化学蓄电池，功率为正值表示电池正被充电。也就是说，蓄电池吸收的电能被转化为化学能；反之，功率为负值表示蓄电池在放电，电池提供的能量被传递到电路的其他元件。

有时，电流、电压和功率是关于时间的函数，可以将式(1.4)表示为

$$p(t) = v(t)i(t) \tag{1.6}$$

例 1.2 功率计算。

如图 1.15 所示，计算电路中各元件的功率。如果每个元件均是蓄电池，问：它是在充电还是放电？

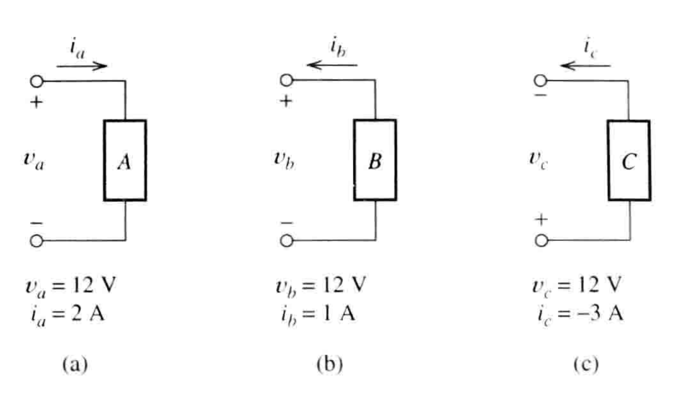


图 1.15　例 1.2 的电路

解： 对于元件 A，电路的参考方向从电压的正极流入，这是一个关联参考方向，功率计算如下：

$$p_a = v_a i_a = 12\ \text{V} \times 2\ \text{A} = 24\ \text{W}$$

因为功率是正的，则能量被元件吸收。如果是蓄电池，则会被充电。

对于元件 B，电流的参考方向从电压的负极流入(注意：电流从一端流入则必定从另一端流出，反之亦然)，这是非关联参考方向。所以，功率计算如下：

$$p_b = -v_b i_b = -(12\ \text{V}) \times 1\ \text{A} = -12\ \text{W}$$

由于功率是负值，可知该元件提供能量，如果是蓄电池，则会放电。

对于元件 C，电流的参考方向从电压的正极流入。这是关联参考方向，功率计算如下：

$$p_c = v_c i_c = 12\ \text{V} \times (-3\ \text{A}) = -36\ \text{W}$$

由于结果是负值，可知该元件提供能量。如果是蓄电池则放电。注意：因为 i_c 为负值，所以电流实际方向是向下通过元件 C 的。

1.3.2 能量计算

计算在 t_1 至 t_2 时间内一个元件所转换的能量 w，可以对功率积分：

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.7}$$

这里特别指出，功率是关于时间的函数，因此用 $p(t)$ 表示。

例 1.3　计算能量。

在图 1.16 中，找出电压源的功率表达式，计算从 $t_1 = 0$ 至 $t_2 = \infty$ 内的能量变化。

解： 电流的参考方向从电压的正极流入，所以计算功率如下：

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) \\ &= 12 \times 2\mathrm{e}^{-t} \\ &= 24\mathrm{e}^{-t}\ \text{W} \end{aligned}$$

$v(t)$

$i(t)$

$v(t) = 12$ V
$i(t) = 2\mathrm{e}^{-t}$ A

图 1.16　例 1.3 的电路

这时，能量为：

$$\begin{aligned} w &= \int_0^{\infty} p(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} 24\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-24\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{\infty} = -24\mathrm{e}^{-\infty} - (-24\mathrm{e}^{0}) = 24\ \text{J} \end{aligned}$$

因为能量是正值，可知电压源吸收能量。

1.3.3　单位前缀

在电气工程应用领域中会遇到关于电流、电压、功率及其他物理量的数量级差异很大的情况，当表示很大或很小的物理量时，可以采用表 1.2中的前缀。例如，1 mA 等于 10^{-3} A，1 kV 等于 1000 V，等等。

表 1.2　常见物理单位前缀

前　缀	缩　写	比例因子
giga-	G	10^9
meg-或 mega-	M	10^6
kilo-	k	10^3
milli-	m	10^{-3}
micro-	μ	10^{-6}
nano-	n	10^{-9}
pico-	p	10^{-12}
femto-	f	10^{-15}

练习 1.5　假设一个元件的两端标注为 a、b，问：i_{ab} 与 v_{ab} 的参考方向是否为关联参考方向？为什么？

答案： 参考方向 i_{ab} 的输入端 a 即为参考电压 v_{ab} 的正极，因此电流的参考方向从电压的正极流入，所以是关联参考方向。

练习 1.6　试计算图 1.17 中各元件的功率与时间的函数关系式，求 $t_1=0$ 至 $t_2=10$ s 时间内能量的转换量。问：在这种情况下元件是吸收还是提供能量？

答案：（a）$p_a(t)=20t^2$ W，$w_a=6667$ J，W_a 是正值，所以元件 A 吸收能量。（b）$p_b(t)=20t-200$ W，$w_b=-1000$ J，W_b 是负值，所以元件 B 提供能量。

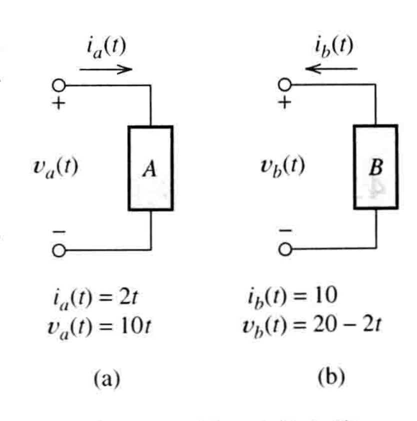


图 1.17　例 1.6 的电路

1.4　基尔霍夫电流定律

节点是电路中两个或两个以上电路元件的连接点，图 1.18 中表示了多个节点。

基尔霍夫电流定律是电路的一项重要原则，描述为：流入一个节点的净电流为零。为了计算流入节点的净电流，可将流入的电流相加，再减去流出的电流。这样，对图 1.18 中的节点有下列等式：

$$\text{节点 } a: i_1 + i_2 - i_3 = 0$$
$$\text{节点 } b: i_3 - i_4 = 0$$
$$\text{节点 } c: i_5 + i_6 + i_7 = 0$$

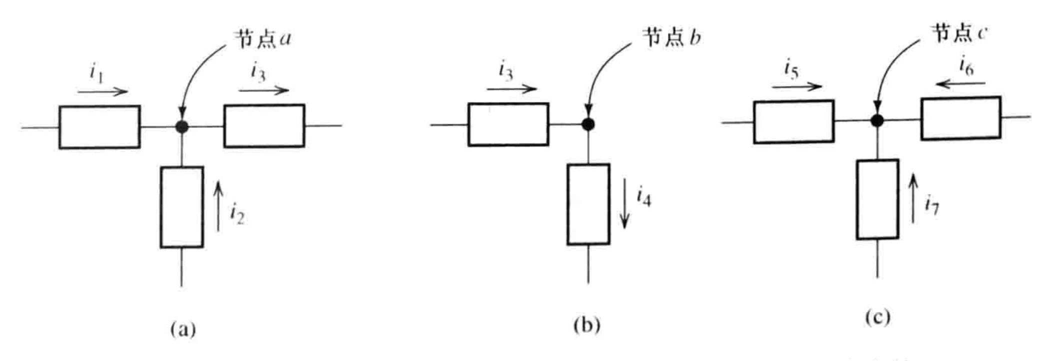


图 1.18　表示单一节点的部分电路，用于解释基尔霍夫电流定律

请注意，对于节点 b，基尔霍夫电流定律规定 $i_3=i_4$。即，只有两个电路元件连接的节点，

其电流必然相等。或者说，如果流入节点的电流从一个元件流入而从另一个元件流出，这时，通常仅对这两个元件定义一个电流变量。

那么，对节点 c，与之相连的所有电流值或者均为零，或者部分为正值，其余为负值。

基尔霍夫电流定律缩写为 KCL。有两种方式来描述 KCL。一种方法是：流出节点的净电流为零。为了计算离开节点的净电流，等式中将离开节点的电流相加，并减去进入节点的电流。例如，对图 1.18 中的节点有：

$$节点\ a:\ -i_1 - i_2 + i_3 = 0$$
$$节点\ b:\ -i_3 + i_4 = 0$$
$$节点\ c:\ -i_5 - i_6 - i_7 = 0$$

显然，这些等式和前面的等式是等效的。

另一种描述方法是：流入节点的电流和等于流出节点的电流和。对图 1.18，有：

$$节点\ a:\ i_1 + i_2 = i_3$$
$$节点\ b:\ i_3 = i_4$$
$$节点\ c:\ i_5 + i_6 + i_7 = 0$$

同样，这些等式也和前面的等式是等效的。

1.4.1 基尔霍夫电流定律的物理基础

要理解 KCL 的正确性，可以假设节点被隔离，然后分析会发生什么情况。对图 1.18(a)，取 $i_1 = 3\ \text{A}$，$i_2 = 2\ \text{A}$，$i_3 = 4\ \text{A}$，则流入节点的电流为

$$i_1 + i_2 - i_3 = 1\ \text{A} = 1\ \text{C/s}$$

在这种情况下，1 s 内有 1 C 电荷堆积在该节点上。即每隔 1 s 有 1 C 电荷加在节点上，并且在电路上另一个地方要减少 1 C 电荷。

假设这些电荷之间的距离为 1 m，则这些电荷会相互作用而产生吸引力。在电场力作用下，最终产生的力大约为 8.99×10^9 N(2.02×10^9磅)。可见，当这些电荷之间的距离合适时，会产生非常大的电场力，从而导致电流流动。因此，KCL 描述的就是电场力阻止电荷在节点堆积的现象。

电路中的所有直接通过导线连接在一起的节点可视为一个单独节点。如图 1.19 所示，元件 A、B、C、D 均连接到同一个节点，通过 KCL 定律可以写出：

$$i_a + i_c = i_b + i_d$$

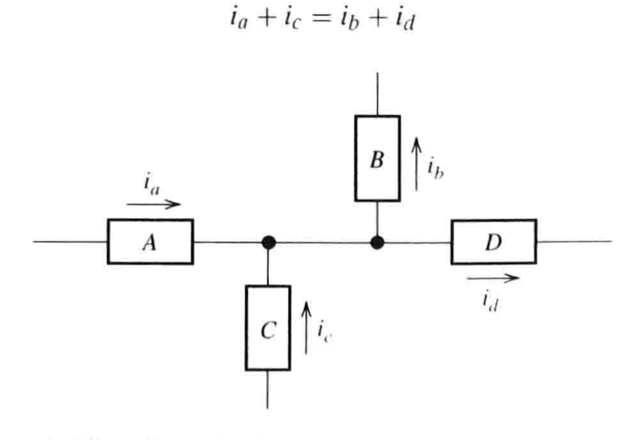


图 1.19 元件 A、B、C、D 可看作连接到同一个节点，因为这些连接点都由导线连接，等价为一个节点

1.4.2 串联电路

我们经常应用KCL来分析电路。例如，分析图1.20中的元件A、B、C。当两个元件首尾相接时，称为串联。为了把元件A、B串联在一起，它们之间不能有其他的电流支路，所以串联的所有元件均流过同一个电流。例如，对图1.20写出KCL等式，对节点1有：

$$i_a = i_b$$

对节点2有：

$$i_b = i_c$$

所以有：

$$i_a = i_b = i_c$$

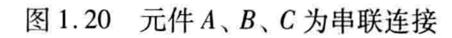


图1.20 元件A、B、C为串联连接

串联电路的电流必须流过电路中的每个元件。

练习1.7 用KCL计算图1.21中的未知电流值。

答案： $i_a = 4$ A，$i_b = -2$ A，$i_c = -8$ A

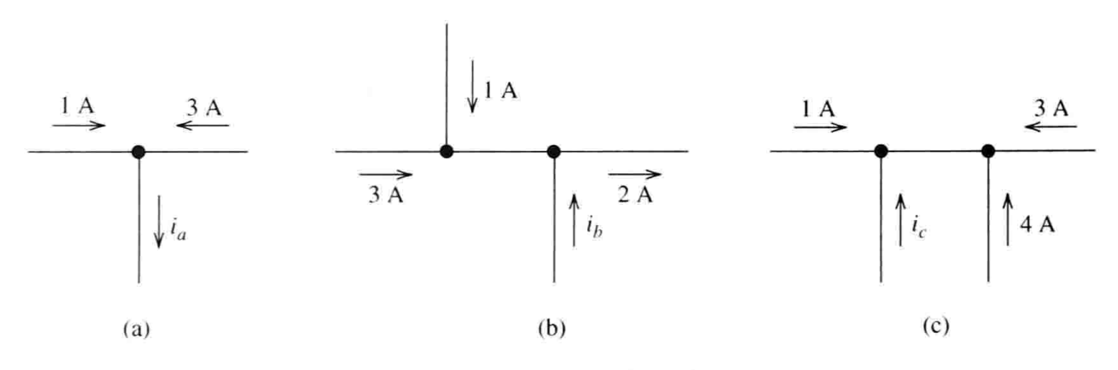


图1.21 例1.7的电路

练习1.8 如图1.22所示，判断电路中哪些元件为串联连接。

答案： 元件A、B为串联；元件E、F、G也为串联关系。

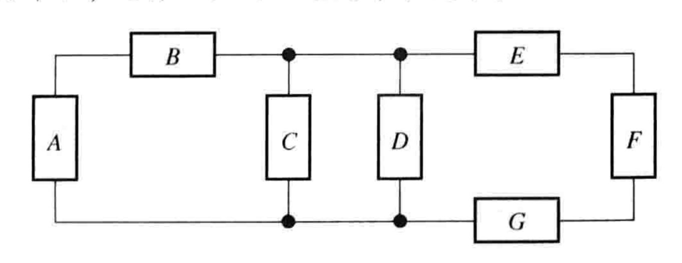


图1.22 例1.8的电路

1.5 基尔霍夫电压定律

从一个节点出发，经过若干电路元件最终回到起始节点的闭合路径称为回路。给定的电路常常有多个回路，例如，图1.23中，一个回路由元件A上端的节点顺时针分别通过元件B、C、A，最后回到出发点。另一条回路从元件D上端的节点顺时针通过元件E、F、G、D回到起点。同样，另一条回路依序通过元件A、B、E、F、G。

基尔霍夫电压定律描述：每个回路中所有元件电压的代数和等于零。从一点出发沿一个回

路绕行一周，电位有升有降，在元件电压的代数和等式中会出现加号和减号，回到原点时该点电压没有变化。通常，在一个回路中沿绕行方向前进，如果首先遇到元件电压的正参考方向，则等式中的相应元件电压值取加号，反之取减号，如图 1.23 所示。

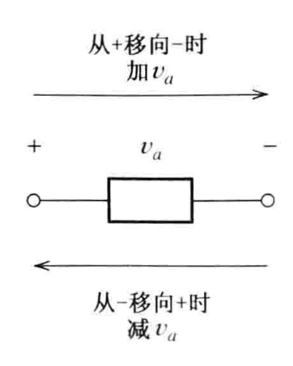


图 1.23 对回路应用 KVL 时，在绕行方向上各元件电压的参考极性决定了在列写的表达式中各元件电压是被加还是被减

对图 1.24，可得以下等式：

回路 1: $-v_a + v_b + v_c = 0$

回路 2: $-v_c - v_d + v_e = 0$

回路 3: $v_a - v_b + v_d - v_e = 0$

注意，v_a在回路 1 中取减号，但在回路 3 中取加号，因为两个回路绕行的方向不同。与此类似，v_c在回路 1 中取正，但在回路 2 中取负。

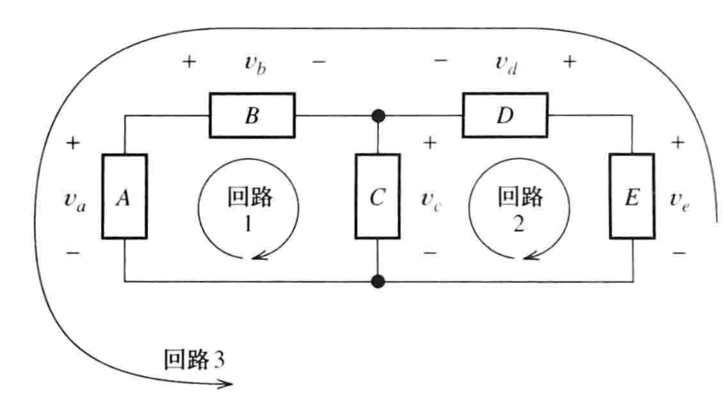


图 1.24 例解 KVL 的电路

1.5.1 基尔霍夫电压定律中的能量守恒

KVL 是能量守恒定律的产物。如图 1.25 所示电路包含 3 个串联元件，所以这 3 个元件流过相同的电流 i。每一个元件的功率为：

元件 A： $p_a = v_a i$

元件 B： $p_b = -v_b i$

元件 C： $p_c = v_c i$

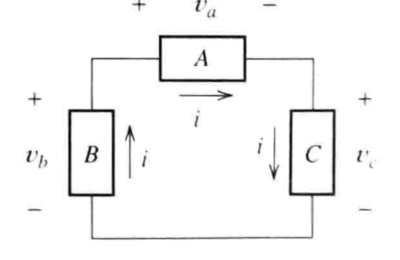


图 1.25 能量守恒定律要求电路中$v_b = v_a + v_c$

注意，元件 A、C 的电流与电压的参考方向为关联方向。对 B 则相反，这就是 p_b表达式中出现负号的原因。

在某一瞬间，所有元件消耗的功率之和必须为零，否则会有多余的能量被吸收或者被提供，从而不满足能量守恒定律。因此有：

$$p_a + p_b + p_c = 0$$

代入功率的计算式，有：

$$v_a i - v_b i + v_c i = 0$$

消去 i，得到：

$$v_a - v_b + v_c = 0$$

这正是在图 1.25 中沿顺时针绕行方向上所有元件电压的(KVL)代数和的等式。

一个验证计算的电压、电流值是否正确的方法就是验证各元件功率之和是否为零。

1.5.2　并联电路

如果两个电路元件首首相连、尾尾相连，则这两个电路元件并联。如图1.26所示，元件A、B并联。相似地，元件D、E、F也并联。元件D与B没有并联，因为元件B的尾部没有直接与元件D的尾部相连接。

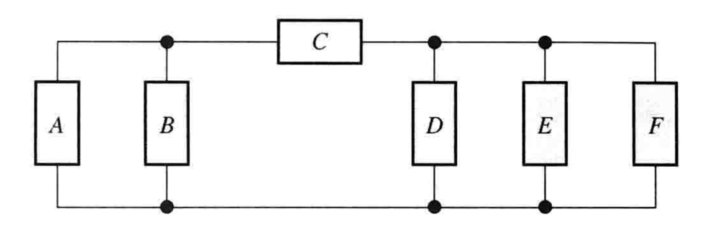


图1.26　在电路中，元件A、B为并联，元件D、E、F也是并联关系

两个并联元件的电压大小相等、方向相同。如图1.27所示为部分电路，元件A、B、C并联。观察元件A、B组成的回路，沿顺时针绕行方向有$-v_a+v_b=0$，即：

$$v_a = v_b$$

然后，分析元件A与元件C构成的回路，按顺时针方向有：

$$-v_a - v_c = 0$$

即$v_a=-v_c$。可见，v_a和v_c方向相反。此外，两个电压中的其中一个必须为负(除非两者都为零)。所以，在图中某一个电压极性与参考方向相反。因此，两电压的实际极性是相同的(电路顶端的电压极性不是为正，就是为负)。

通常，对一个并联电路，我们简单地用同一个电压变量来表示所有的元件电压，如图1.28所示。

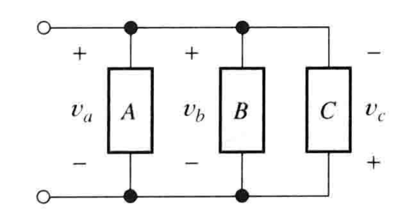


图1.27　$v_a=v_b=v_c$，表明这3个电压的参考极性以及数值均相同

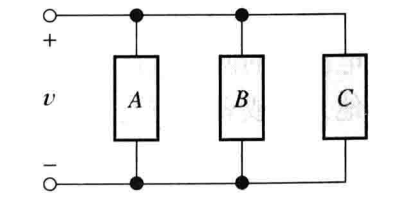


图1.28　对所有并联元件采用相同的电压和参考极性以简化分析

练习1.9　对图1.29所示电路反复应用KVL，列方程计算电压v_c和v_e。

答案　$v_c=8$ V，$v_e=-2$ V。

练习1.10　列举图1.29所示电路中为并联关系或者串联关系的元件。

答案　元件E和元件F是并联关系；元件A和元件B是串联关系。

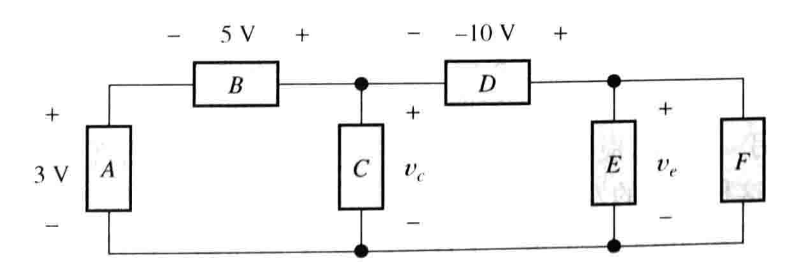


图1.29　练习1.9和练习1.10的电路

1.6 电路元件简介

本节主要介绍几种理想的电路元件。

- 导线
- 电压源
- 电流源
- 电阻器

本书后面还会介绍更多的元件，包括电感器和电容器，我们总能使用这些理想化的电路元件来描述(模拟)复杂的实际电气设备。

1.6.1 导线

理想导线在电路图中代表连接元件的不间断线。我们通过它确定理想电路元件两端之间的电压和电流关系。

无论多大的电流经过理想导线，其两端电压均为零。当电路中两节点用导线连接后，我们称这两点被短路，理想导线也称为短路线。如果电路上的所有节点经导线相连接，可视为一个节点。

如果电路的两部分之间没有导线或其他电路元件相连接，称这两部分电路之间断路，电流不能流过断路的电路。

1.6.2 电压源

1. 独立电压源

理想独立电压源的两端电压保持恒定。端电压值和与之连接的其他元件或者流过它的电流无关。我们用一个内注参考极性的圆圈来代表独立电压源，旁边标明电压的大小。电压可以为恒定值，也可以是一个时间函数，图 1.30 给出了独立电压源的例子。

在图 1.30(a)中，端电压值为一个常数，所以称为直流电压源。在图 1.30(b)中，电压是一个时间的正弦函数。它们均被称为独立电压源，因为其端电压与电路中的其他电压和电流无关。

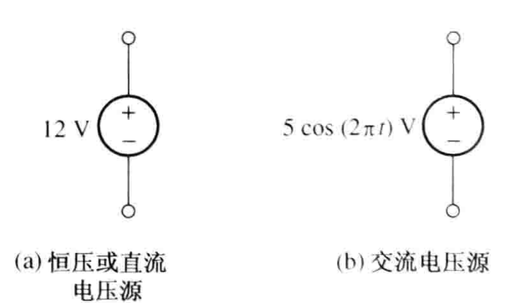


图 1.30 独立电压源

1.6.3 理想电路元件与实际电路元件

前面已经给出了理想电路元件的定义，不过在绘制电路图时可能出现理想电路中各元件定义之间的矛盾。例如，图 1.31 给出了一个两端用导线短接的 12 V 电压源。根据电压源的定义，电压为 $v_x = 12$ V；但另一方面，根据导线的定义，电压 $v_x = 0$。两者出现了矛盾，可见，在建立理想电路模型时要避免这种矛盾的发生。

在现实世界中，汽车的电瓶几乎是一个理想的 12 V 电压源，并且所用的短铜线几乎是理想导线。如果把导线连接在电瓶两端，将会有一个非常大的电流流过电线，电能快速转化为热能，可能会熔化电线或毁坏电瓶。

当我们遇到一个矛盾的理想电路模型时，往往会在现实中产生不良状况（如发生火灾或毁坏元件）。在任何情况下，一个矛盾的电路模型意味着我们还没有合理地选择实际电路的各元件模型。例如，汽车的电瓶不能完全等效为一个理想的电压源，如果再串联一个电阻则此模型更好（特别是电流非常大时）（后面很快会介绍相关知识）。同理，一条短铜线仅用一个理想导线来表示并不合适，用一个小电阻可以更好地代表其电阻性。如果能成功地选择合适的电路模型，就可以避免出现矛盾的电路，使电路计算结果更接近现实情况。

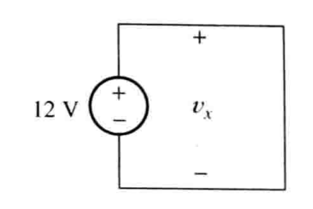


图 1.31　电路模型的建立要合理，避免出现矛盾

1.6.4　受控电压源

受控电压源类似于独立电压源，不同的是其端电压受另一个电压或电流的控制，因此用一个菱形标志取代圆圈来表示受控电压源。在图 1.32 中给出了两个受控电压源的例子。

电压控电压源的端电压等于控制电压的常数倍，图 1.32(a)是一个例子。受控源是一个菱形图标，参考极性标记于菱形中。v_x决定了受控电压源的电压值，例如，控制电压 $v_x = 3$ V，那么受控源端电压为 $2v_x = 6$ V；如果 v_x为 −7 V，那么 $2v_x = -14$ V。

电流控电压源端电压等于控制电流的常数倍。如图 1.32(b)所示，其端电压为控制电流 i_x 的 3 倍，这个倍数称为增益，其单位为 V/A（定义为电阻的量纲，即欧姆）。

现在，关注图 1.32(a)中的电压控电压源，增益系数为 2，其单位为无量纲（或者 V/V）。

本书以后将说明，受控源在晶体管、放大器以及发电机等器件建模时很有用。

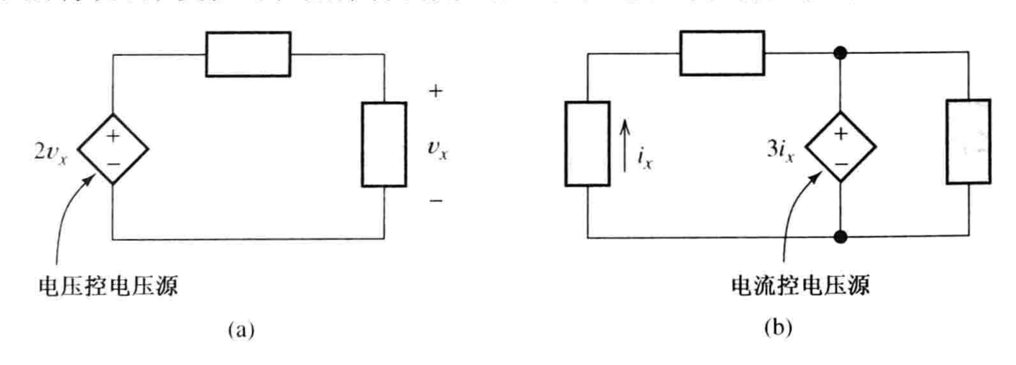


图 1.32　受控电压源用菱形符号表示，其端电压值与电路中另外一个元件的电流或者电压有关

1.6.5　电流源

1. 独立电流源

理想独立电流源有一个特定电流流经本身，用一个带箭头的圆圈表示独立电流源，箭头方向就是电流的方向。独立电流源产生的电流值与连接它的元件和电压无关。图 1.33 给出了直流电流源和交流电流源。

如果将电流源的两端开路将出现矛盾。例如，图 1.33(a)中给出的 2 A 直流电流源，其两端开路。根据定义，流入顶端节点的电流为 2 A；但根据定义，电流不能流过断开的电路，即该节点不满足 KCL 定律，这就是矛盾的。建立一个合理的电路模型就不会发生这种情况，因此，今后应尽量避免在理想电路中将电流源开路。

2 A　　3 sin (100πt) A

(a) 直流电流源　　(b) 交流电流源

图 1.33　独立电流源

电池是很好的电压源，但在实际应用中不存在类似的电流源。不过，电流源是很有用的电路模型，稍后我们将学习一个类似理想电流源的放大器。

1.6.6 受控电流源

穿过受控电流源的电流是由电路别处的电流或电压控制的，其符号是一个菱形图标内附一个箭头，指示电流方向。两种类型的受控电流源如图 1.34 所示。

图 1.34(a)中有一个电压控电流源，其电流是控制电压 v_x的 3 倍。这里，增益是 3，单位为 A/V(后面将介绍单位——西门子)。如果 v_x的值为 5 V，则通过受控电流源的电流为 $3v_x$ = 15 A。

图 1.34(b)中是一个电流控电流源，电流为控制电流 i_y的 2 倍，该增益的单位为 A/A(或者无量纲)。

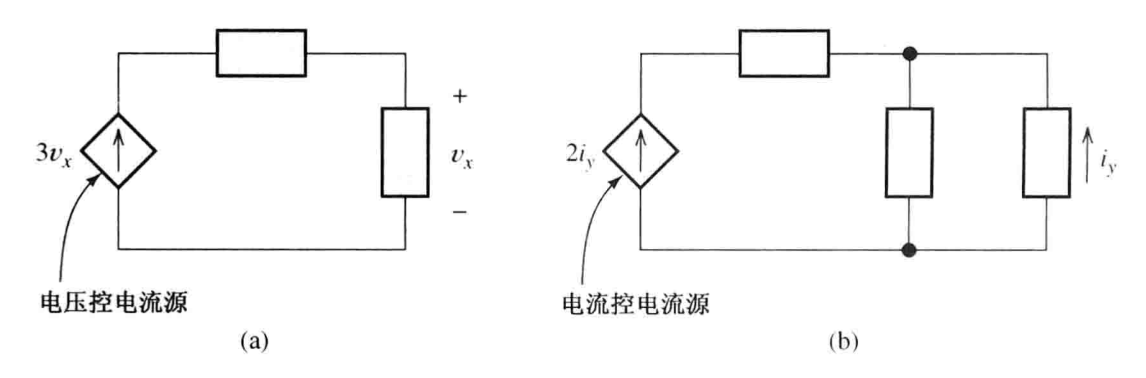


图 1.34 受控电流源的电流值与电路中另外一个元件的电流或者电压有关

像受控电压源一样，受控电流源在模拟实际设备(如放大器、晶体管、变压器、电机等)时很有用。总之，4 种受控源为：

1. 电流控制电压源。
2. 电压控制电压源。
3. 电流控制电流源。
4. 电压控制电流源。

1.6.7 电阻器和欧姆定律

理想电阻器两端的电压与流过电阻的电流成正比，这个比例系数定义为电阻 R。电阻的符号如图 1.35(a)所示。注意，此时电流和电压的参考方向为关联方向，即电流从电压的正极流入。用等式表示电阻器的电压和电流满足欧姆定律：

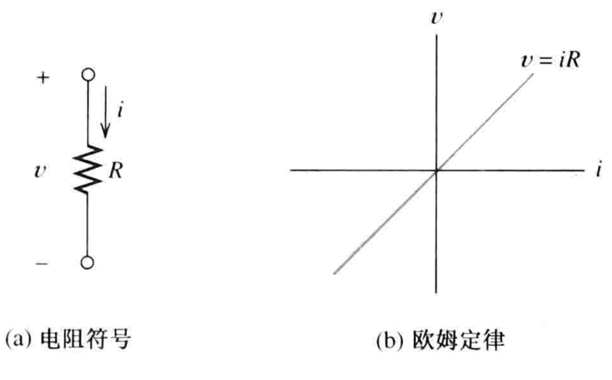
$$v = iR$$

电阻单位为 V/A，也称为欧姆，用大写希腊字母 Ω 表示，有时采用 mΩ 或者 MΩ 来表示不同数量级的电阻值。

一般来说，电阻 R 值为正。若电流从电压的负极流入，则欧姆定律变为：

$$v = -iR$$

此式在图 1.36 中得到说明。



(a) 电阻符号　　(b) 欧姆定律

图 1.35　一个理想电阻的电压与电流成正比，注意v和i的参考方向为关联方向

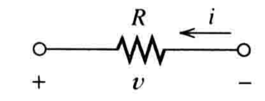


图 1.36　若v和i的参考方向为非关联方向，则$v = -Ri$

电流方向和电压极性之间的关系可以用带双下标的欧姆定律表示(在元件的两端分别标注字母)。若电流与电压的双下标表示一致，则二者的参考方向为关联方向，可写出：

$$v_{ab} = i_{ab}R$$

否则，当电流与电压的双下标不一致时，有：

$$v_{ab} = -i_{ba}R$$

1.6.8 电导

由欧姆定律求解电流，有：

$$i = \frac{1}{R}v$$

我们把 $1/R$ 称为电导，用 G 表示：

$$G = \frac{1}{R} \tag{1.8}$$

电导的单位是西门子(简写为 S)。则欧姆定律也可以写为：

$$i = Gv \tag{1.9}$$

1.6.9 电阻

通常，多种类型的导电材料可等效为理想电阻，如图 1.37 所示。大多数金属及其合金和碳化物材料都被视为电阻。

在微观层面，固体材料中的电子沿着材料移动(类似于在溶液中的离子混合物，其电流由正离子移动而产生)，电子在外加电压产生的电场中加速，电子多次撞击原子类物质，从而失去前进的动力，然后又再次被加速。最后，导致电子的平均速度保持恒定。从宏观方面看，电流的大小与外加的电压成正比。



图 1.37　电阻表示一段导线的电流阻碍作用

1.6.10 与电阻有关的物理参数

尺寸、几何形状和材料同时决定一个电阻的阻值，这里只考虑长圆柱形的导线。如图 1.38 所示，横截面积为 A、长度为 L 的电阻，如果长度 L 比横截面的直径大很多，则阻值为：

$$R = \frac{\rho L}{A} \tag{1.10}$$

其中，ρ 为电阻率，单位为欧姆·米(Ω·m)

材料可分为导体、半导体或绝缘体，具体取决于其电阻率。导体的电阻率最低，容易流过电流。绝缘体具有很高的电阻率，阻碍电流流过。半导体的电导率介于导线和绝缘体之间。我们将在第10章、第12章和第13章看到某些半导体在制造电子设备上是非常有用的。表1.3给出了几种材料的近似电阻值。

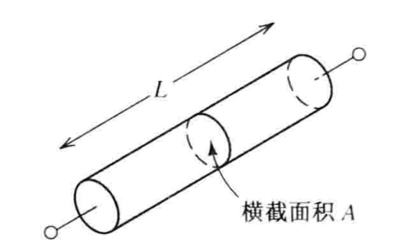


图1.38 电阻通常是一段圆柱体材料，电流从一端流入，从另一端流出

表1.3 在300 K温度条件下常用材料的电阻值

导体	
铅	2.73×10^{-8}
碳(非结晶的)	3.5×10^{-5}
铜	1.72×10^{-8}
金	2.27×10^{-8}
镍铬合金	1.12×10^{-6}
银	1.63×10^{-8}
钨	5.44×10^{-8}
半导体	
硅(器件级)	$10^{-5} \sim 1$
取决于掺杂浓度	
绝缘体	
熔凝石英	$> 10^{21}$
玻璃(典型)	1×10^{12}
聚四氟乙烯塑料	1×10^{19}

例1.4 电阻值的计算。

计算一根直径2.05 mm、长10 m的铜丝的电阻值。

解：首先计算铜丝的横截面积：

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(2.05 \times 10^{-3})^2}{4} = 3.3 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2$$

然后计算电阻值：

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{1.72 \times 10^{-8} \times 10}{3.3 \times 10^{-6}} = 0.052\ \Omega$$

这基本等同于居民区从配电盒连接到插座的其中一根电线的尺寸。当然，必须同时用两根电线才能形成电流通路。

1.6.11 电阻的功率计算

回忆用电流和电压之积来计算功率的公式：

$$p = vi \tag{1.11}$$

如果 i 和 v 的参考方向为关联参考方向，则功率为正表示元件在吸收功率；反之，功率为负表示元件在释放功率。

用欧姆定律代替式(1.11)中的 v，有：

$$p = Ri^2 \tag{1.12}$$

同样，用欧姆定律代替式(1.11)中的 i，有：

$$p = \frac{v^2}{R} \tag{1.13}$$

注意，无论 v 和 i 的符号如何，电阻(这里假设电阻 R 为一般情况下的正值)吸收的功率都为正。如果电阻材料的电阻导致原子和电子碰撞、摩擦，则这种功率吸收表现为发热。

一些由电热原理制成的设备有电炉、热水器、电磁炉和电暖炉等。一个典型电热器的加热元件由镍铬(是镍、铬和铁的合金)丝组成，加热后会发红。为了将足够长度的电炉丝安置在一个小空间里，电炉丝必须像弹簧一样卷曲。

实际应用1.1 应用电阻测量应变

土木和机械工程师惯用导体电阻与其物理尺寸的关系来测量应变。这种测量对机构和结构的实验式应力应变分析非常重要。(应变定义为长度变化的比例，$\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$。)

一个典型的电阻应变测量机用光刻镍铜合金箔来获取待测量导体应变的方向。如图 PA1.1 所示。一般把导体黏接到薄聚酰亚胺(一种坚硬的柔性塑料)背衬上面，背衬又通过合适的胶黏剂(如氰丙稀酸酯水泥)附在待测试结构上。

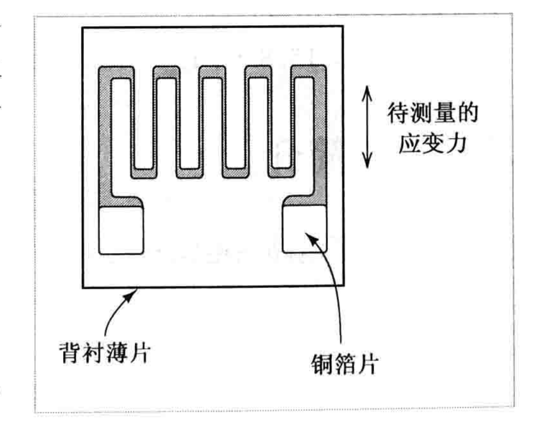


图 PA1.1

导体的电阻为：

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

当发生应变时，导体的长度和面积会发生变化，因此电阻会改变。表示应变与电阻变化的测量系数为：

$$G = \frac{\Delta R / R_0}{\epsilon}$$

其中，R_0 是应变发生前的电阻值。典型测量计的 $R_0 = 350\ \Omega$，$G = 2.0$，因此1%的应变会产生 $7\ \Omega$ 的电阻变化(ΔR)。一般来说，用惠斯通电桥(第2章将讨论)来测量由应变产生的微小电阻变化。

力、扭矩和压力传感器上都有电阻式应变测量计。

1.6.12 电阻器与电阻

注意，电阻也通常表征一种由电能转化为非热能的电路模型。例如，一个音响喇叭的电阻值为 8 Ω，其将一部分功率转化为声音。另一个例子是一个电阻值为 50 Ω 的天线，将一部分功率变为电磁能从而以电磁波形式辐射出去。

电阻器和电阻有所不同。电阻器是一个由导电材料制成的双端口元件，而电阻反映元件的电压与电流成比例的特性。因此，电阻器具有电阻性，电阻可以用于对天线和扬声器建立模型，这和电阻器有所不同。不过，我们通常不刻意强调这些术语的区别。

例 1.5 已知额定电压和功率值，计算电阻值。

在工作电压为 120 V 时，一个电取暖器的额定功率是 1500 W。试计算该等效电阻的电阻值以及工作电流。(通常，电阻值与温度有关，后面将讲到热电阻各温度点对应的电阻值不同。)

解： 根据式(1.13)计算电阻值，有：

$$R = \frac{v^2}{p} = \frac{120^2}{1500} = 9.6\ \Omega$$

然后，根据欧姆定律计算工作电流：

$$i = \frac{v}{R} = \frac{120}{9.6} = 12.5\ \text{A}$$

练习 1.11 例 1.5 中的镍铬线直径为 1.6 mm，电阻值为 9.6 Ω，试计算电线的长度。(提示：镍铬线的电阻率为 1.12×10^{-6} Ωm。)

答案： $L = 17.2$ m。

练习 1.12 一个电灯泡的额定功率是 100 W，额定电压是 120 V，试计算其电阻值和工作电流。

答案： $R = 144\ \Omega$，$i = 0.833$ A。

练习 1.13 一个电视接收器中的 1 kΩ 电阻额定功率为 1/4 W，试计算电阻工作在最大功率下的电流和电压值。

答案： $v_{max} = 15.8$ V，$i_{max} = 15.8$ mA。

1.7 电路简介

本章定义了电路的电流和电压，讨论了基尔霍夫定律，介绍了一些理想电路元件，例如电压源、电流源和电阻。现在通过分析一些简单的电路来说明这些概念。在下一章，我们将学习更复杂的电路以及分析方法。

对于图 1.39(a)所示的电路，需要计算每一个元件的电流、电压和功率值。可采用本章介绍的基本定律来计算。为了便于理解，首先选择参考极性和方向与实际极性和电流方向一致。

KVL 表明图 1.39 中每个回路的电压和为零，所以，在顺时针循行方向上有 $v_R - v_s = 0$，也就是 $v_R = v_s$，即电阻的实际极性为上正下负，数值为 10 V。

也可用另一种方式来分析该电路，已知电压源和电阻并联时，无论是大小还是方向，它们的电压相同。

现在使用欧姆定律来计算。因为 10 V 电压加在 5 Ω 电阻上，电流是 $i_R = 10/5 = 2$ A，即 i_R 向下流过电阻，如图 1.39(c)所示。

由 KCL 可知，对一个节点，其流入和流出的电流之和为零。图 1.39 中的电路有两个节点：一个在上端，一个在下端。电流 i_R 从上端节点流出，流过电阻，所以相同的电流必然通过电压源流入上端的节点。电流的方向如图 1.39(d)所示。

另一种方法也可以看出 i_s 和 i_R 相同，因为电压源和电阻串联，而在串联电路中电流处处相等。

注意，在图 1.39 中，电压源的电流由负极流向正极，仅有电阻的电流从正极流入、负极流出。对电压源来说，其电流流向哪个方向取决于电路中电源的连接方式。现在我们来计算每个元件的功率。对电阻来说，有如下几种方法来计算功率：

$$p_R = v_R i_R = 10 \times 2 = 20 \text{ W}$$
$$p_R = i_R^2 R = 2^2 \times 5 = 20 \text{ W}$$
$$p_R = \frac{v_R^2}{R} = \frac{10^2}{5} = 20 \text{ W}$$

所有等式都得到同样的结果，可见能量在电阻中以 20 J/s 的速度被传递。

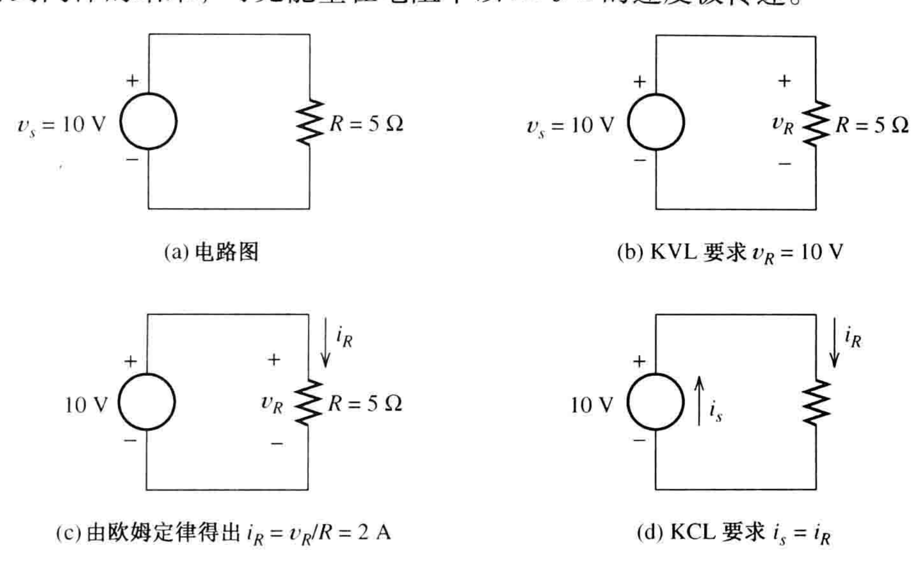


图 1.39　包含一个电压源和一个电阻的电路

计算电源输出的功率，有：

$$p_s = -v_s i_s$$

这里，负号表示电流流进电压的负极(即电流与电压为非关联参考方向)。

代入数值，有：

$$p_s = -v_s i_s = -10 \times 2 = -20 \text{ W}$$

因为 p_s 为负，可知电压源输出功率。

为了验证功率平衡，可以把所有元件的功率加起来，结果应该是零，因为能量在电路中不会凭空产生，也不会凭空消失，只是换了形式而已，所以有：

$$p_s + p_R = -20 + 20 = 0$$

1.7.1　使用任意参考方向

在前面的讨论中，我们选定元件电流的参考方向和电压实际极性一致。但是，这对更复杂的电路来说往往不可行。幸运的是，这并不是唯一的选择，可以任意选择参考方向。在应用电路定律进行计算之后，不仅可获得电流和电压的数值，还可以结合参考方向确定电流或者电压的实际方向或者极性。

例 1.6　采用任意参考方向的电路分析。

电流和电压参考方向如图 1.40 所示，试分析该电路，证明结论是正确的。

解：按照顺时针方向绕行，并应用 KVL，得到下式：

$$-v_s - v_x = 0$$

因此，$v_x = -v_s = -10$ V。由于 v_x 是负值，该电压的实际极性与参考极性相反，即电阻的正极性电压出现在其上端。

根据欧姆定律，有：

$$i_x = -\frac{v_x}{R}$$

表达式中出现负号，表示 v_x 和 i_x 的参考方向为非关联方向。代入数据，得到：

$$i_x = -\frac{-10}{5} = 2\ \text{A}$$

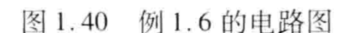


图 1.40　例 1.6 的电路图

可见，i_x 为正值，其实际方向向下流过电阻。

接下来，对电路下端的节点应用 KCL，有：

$$\text{总流入电流} = \text{总流出电流}$$

$$i_y + i_x = 0$$

这样，$i_y = -i_x = -2$ A，可见，2 A 的电流向上流过电压源。

电压源的功率为：

$$p_S = v_S i_Y = 10 \times (-2) = -20\ \text{W}$$

最后，得到电阻消耗的功率 $p_R = -v_x i_x$。

表达式中出现负号，表示 v_x 和 i_x 的参考方向为非关联方向。这样，得到 $p_R = -(-10) \times 2 = 20$ W。由于 p_R 为正值，可知能量输出至电阻并被消耗掉。

有时，可以通过反复应用基尔霍夫定律和欧姆定律来分析电路，举例如下。

例 1.7　用 KVL、KCL 和欧姆定律求解电路。

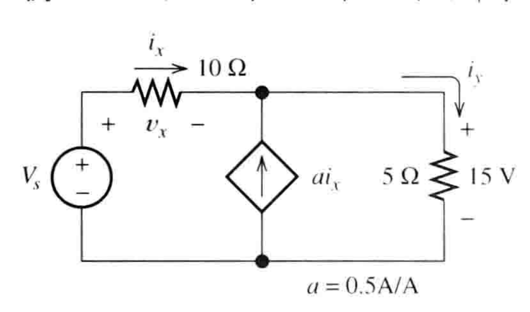


图 1.41　例 1.7 的电路图

如图 1.41 所示电路含有一个电流控制电流源，已知 5 Ω 电阻的端电压是 15 V，试求解源电压值 v_S。

解：首先，采用欧姆定律计算电流 i_y：

$$i_y = \frac{15\ \text{V}}{5\ \Omega} = 3\ \text{A}$$

然后，对电流源顶端的节点应用 KCL，得到：

$$i_x + 0.5 i_x = i_y$$

代入数据 i_y，解得 $i_x = 2$ A。

再利用欧姆定律，求得 $v_x = 10 i_x = 20$ V。

对外周回路应用 KVL，可得：

$$V_S = v_X + 15$$

代入 v_x 的值，得到 $V_S = 35$ V。

练习 1.14　分析图 1.42 所示电路，计算 i_1、i_2 和 v_2 值，并计算每个元件的功率值。

答案：$i_1 = i_2 = -1$ A，$v_2 = -25$ V，$p_R = 25$ W，$p_S = -25$ W。

练习 1.15　图 1.43 所示电路由一个独立电流源和一个电阻串联构成，要求计算 i_R、v_R 和 v_S 值，并计算每个元件的功率值。

答案：$i_R = 2$ A，$v_S = v_R = 80$ V，$p_s = -160$ W，$p_R = 160$ W。

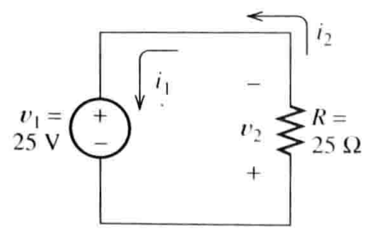


图 1.42　练习 1.14 的电路图

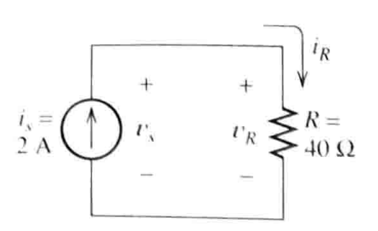


图 1.43　练习 1.15 的电路图

本章小结

1. 电气和电子工程技术被其他领域的工程师不断地融入产品与系统之中，而且各领域的仪器仪表均以传感器、电子产品和计算机为核心。
2. 电气工程的主要领域包括通信系统、计算机系统、控制系统、电磁学、光电技术、电子学、电力系统以及信号处理等。
3. 学习电工学最根本的目标是通过工程考试，拥有丰富的电知识，便于在各领域完成各种工程和研究项目，判断和纠正简单的失误，并能够与电气工程师进行有效的交流。
4. 电流是单位时间通过的电荷量，单位是安培(A)，或者库仑每秒(C/s)。
5. 电路元件两端的电压是指单位电荷通过元件时传递的能量，单位是伏特(V)，等价于焦耳每库仑(J/C)。如果正电荷从阳极转移到阴极，则能量被元件吸收。如果电荷移动方向是相反的，则能量由此元件提供。
6. 在关联参考方向下，电流从元件电压的正极流入。
7. 如果元件的电压和电流为关联参考方向，则该元件的功率值计算如下：

$$p = vi$$

如果元件的电压和电流非关联参考方向，则该元件的功率值计算如下：

$$p = -vi$$

无论设定哪种参考方向，只要 $p > 0$，则表示元件吸收能量。
8. 电路的节点是指两个或者两个以上元件相互连接的交点，理想导线连接的所有节点电位相等，可视为同一节点。
9. 基尔霍夫电流定律(KCL)表明：所有流进同一节点的电流之和等于流出该节点的电流之和。
10. 各元件的首端与末端依次相连，称为串联。如果两个元件为串联关系，则其公共节点不再有其他的电流分支，即串联连接的所有元件流过的电流相同。
11. 电路中的回路是指从一个节点出发，经过多个元件后回到起点的闭合路径。
12. 基尔霍夫电压定律(KVL)表明：在同一个回路中各元件电压的代数和为零。如果在绕行过程中首先遇到某个元件电压的正极，则在代数和式中电压取正号；反之，在代数和式中电压取负号。
13. 如果两个元件的首端与末端分别连接，称为并联。此时，两元件的电压相等。
14. 无论是否有电流流经导线，理想导线的端电压均为零。并且，与同一导线连接的所有节点可视为一个节点(超节点)。
15. 一个理想独立电压源的端电压保持恒定，与其他元件无关，也与流过自身的电流无关。
16. 一个受控电压源的电压值取决于电路中另一个元件的电流或者电压。电压控电压源的电压值等于电路中某个电压乘以一个常数。电流控电压源的电压值等于电路中某个电流值乘以一个常数。
17. 一个理想独立电流源的输出电流保持恒定，与其他元件无关，也与自身的电压无关。
18. 一个受控电流源的电流值取决于电路中另一个元件的电流或者电压。电流控电流源的电流值等于电路中某个电流乘以一个常数。电压控电流源的电流值等于电路中某个电压值乘以一个常数。

19. 对于一个线性电阻，其电压正比于电流。如果电流和电压的参考方向满足关联方向，则欧姆定律写为：$v = Ri$。否则，在非关联参考方向下，欧姆定律为：$v = -Ri$。

习题

1.1 节 电气工程综述

P1.1 其他工程领域的学生需要学习电气工程的基础知识的4个原因是什么？

P1.2 广义而言，电气系统的两大主要目标是什么？

P1.3 列出电气工程的8个分支。

P1.4 参考工程期刊和商业杂志如《IEEE 谱》、《汽车工程》、《化学工程》或《建筑工程》等，描述一些电气工程在你所从事领域的有趣应用。

1.2 节 电路、电流和电压

P1.5 用合适的话定义下列术语及其单位：(1)电流；(2)电压；(3)断开的开关；(4)闭合的开关；(5)直流电流；(6)交变电流。

P1.6 列出在液流模型中下列电路概念的相似物：(1)导体；(2)断开的开关；(3)电阻；(4)电池。

*P1.7 一段电线的两端点是 a 和 b，如果 $i_{ab} = -3$ A，请问电子是从 a 流向 b 吗？3 s 内流过电线横截面积的电荷量是多少？

P1.8 一个电子的电荷量是 1.60×10^{-19} C。电线中的电子电流为 2 A，问每秒中有多少电子流过电线的横截面积？

*P1.9 流过一电路元件横截面积的净电荷量为 $q(t) = 2t + t^2$ C。t 为时间(单位：s)，求流过电路元件电流的安培数。

P1.10 如图 P1.10 所示，电压 $v = -10$ V，电流 $i_{ba} = 3$ A。问：v_{ba} 的值是多少？i 的值是多少？请务必给出正确的极性符号。此元件是提供能量还是消耗能量？

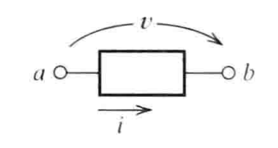


图 P1.10

P1.11 如果本书图 1.2 所列的车灯要流过电流，开关应该是断开还是闭合？在电路相似的液流模型中，对应阀门是断开还是闭合？是断开还是闭合的阀门对应电路中断开的开关？

*P1.12 一电路元件的电流为 $i(t) = 2e^{-t}$A，试计算在 $t = 0$ 到 $t = \infty$ 的时间内通过元件的电荷量。(提示：电流是单位时间的电荷量，因此为计算电荷量，必须对电流进行时间的积分。)

P1.13 一电路元件的电流为 $i(t) = 10\sin(200\pi t)$A。(1)画出 0 ~ 15 ms 内 $i(t)$ 的图形。(2)计算 0 ~ 10 ms内流过元件的电荷量。(3)计算 0 ~ 15 ms 内流过元件的电荷量。

*P1.14 一铅酸电池重量为 30 kg，充满电可以在电流 5 A、电压 12 V 时工作 24 小时。(1)如果充电能量 100% 被用来抬高该电池，可以到达多高？重力加速度为 9.8 m/s^2。(2)如果充电能量 100% 被用来加速该电池，可以到达多大速度？(3)汽油的热值为 4.5×10^7 J/kg，试比较汽油和该充电电池单位重量的能量值。

P1.15 流过一电路元件横截面积的净电荷量为 $q(t) = 2t + \exp(-2t)$ C。t 为时间(单位：s)，求流过该电路元件电流对时间的函数。

P1.16 一直径为 2.05 mm 的铜电线流过全由电子产生的电流 5 A，一个电子的电荷量是 1.60×10^{-19} C。假设铜电线中可以自由移动的电子数为 10^{29} 个/m^3，求该电线中电子运动的平均速度。

*P1.17 一普通深循环电池(用于渔船上的拖捕电机)可以在电压 12.6 V、电流 10 A 情况下工作 10 小时，在这段时间内有多少电荷流过该电池？电池提供了多少能量？

P1.18 一电路元件两端点为 a 和 b，$v_{ab} = 5$ V，$i_{ab} = 2$ A，在 10 s 内会有多少电荷流过该元件？如果电荷为电子，电子是从哪一端流入的？传递了多少能量？该元件是吸收能量还是提供能量？

P1.19 一电子电荷量是 1.90×10^{-19}C，如果该电荷从电压为 120 V 的正极流向负极，会传递多少能量？该电子电荷是获得能量还是失去能量？

1.3节 功率和能量

*P1.20 电路元件如图 P1.20 所示，要求计算各元件的功率，并注明元件是吸收能量还是提供能量。

P1.21 关联参考方向的含义是什么？当采用双下标表示两端点为 a 和 b 的元件电压电流时，如何表示才能实现关联参考方向？

*P1.22 一电池两端点为 a 和 b，$v_{ab}=12$ V，如果要使电池储存的化学能增加 600 J，需要多少电荷流过该电池？如果电荷为电子，则电子是从 a 端流向 b 端？还是从 b 端流向 a 端？

P1.23 一电气设备两端点为 a 和 b，如果 $v_{ab}=-15$ V，则 4 C 正电荷从该设备 a 端流向 b 端会转换多少能量？该设备是吸收能量还是提供能量？

*P1.24 假设电费是$0.12 每度（千瓦小时，kWh），你的电表账单是每月$60。如果每月每天的用电量是不变的，试计算平均功率值。如果供电电压是 120 V，试问电流值为多大？如果家里有一盏 60 W 的电灯，并且过去从不关灯，问关掉此灯之后，电费将减少多少百分比？

P1.25 如图 P1.25 所示，一电路元件的电压 $v(t)=10$ V，电流 $i(t)=3e^{-t}$A，试计算元件的功率，并计算从 $t=0$ 到 $t=\infty$ 的时间内元件传递的能量，该元件是吸收能量还是提供能量？

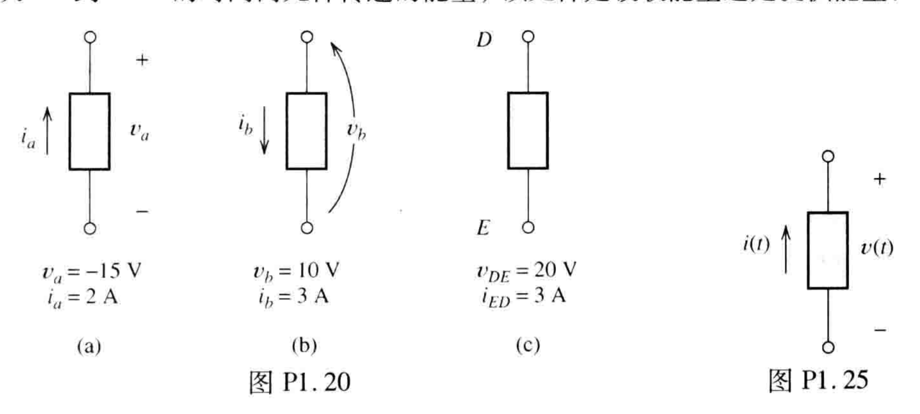


图 P1.20　　图 P1.25

P1.26 一电气设备的电流和电压分别为 $i_{ab}(t)=5$ A，$v_{ab}(t)=10\sin(200t)$ V。(1)求该设备的功率，并画出其 0 ~ 15 ms 的图形；(2)计算 $t=0$ 到 $t=2.5$ ms 该设备传递的能量；(3)计算 $t=0$ 到 $t=10$ ms该设备传递的能量。

*P1.27 如图 P1.27 所示，用电流表和电压表测量元件 A 两端的电流和电压。当电流进入电流表正极时，电流表读数为正，电流离开电流表正极时，电流表读数为负，如果电压表正极的实际电压极性为正极，电压表读数为正，否则电压表读数为负（实际上图示电路中电流表读数为元件 A 和电压表流过的电流之和，电压表流过的电流很小，此处忽略不计）。试求下列几种情况下元件 A 吸收或者发出的功率：(1)电流表读数为 +2 A，电压表读数为 −25 V；(2)电流表读数为 −2 A，电压表读数为 +25 V；(3)电流表读数为 −2 A，电压表读数为 −25 V。

P1.28 如果把图 P1.27 改为图 P1.28，再计算一次 P1.27 提出的问题。

P1.29 一帆船的电路电压为 12.6 V 时消耗功率 25 W，如果用一电压为 12.6 V，容量为 80 安时完全充电的深循环铅酸电池供电，问该电池可以工作多长时间（安时的意思就是说电池以某个固定的电流放电能够持续的时间）？该电池初始储能为多少千瓦时？如果该电池的成本为$85，可以充放电 250 次，忽略电池充电费用，每千瓦时能量需要的费用是多少？

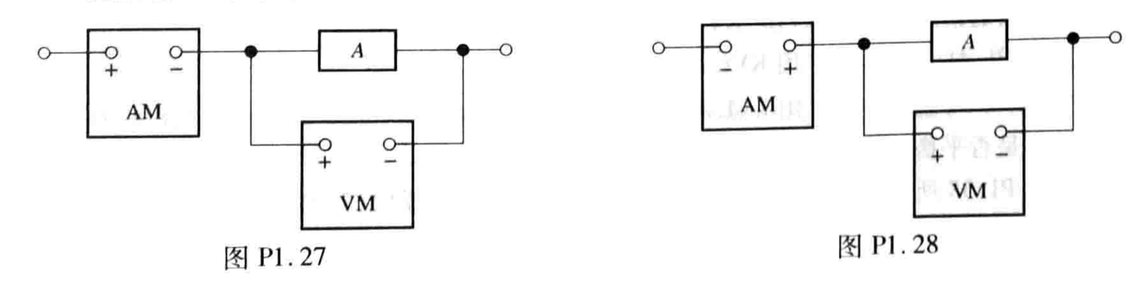


图 P1.27　　图 P1.28

P1.30 一块普通的 9 V 碱性电池成本为\$1.95，电流为 50 mA 时可以连续工作 10 小时。计算该电池每千瓦时能量需要的费用(相比而言，在美国从供电部门购买电能的费用大致为每千瓦时\$0.12)。

1.4 节 基尔霍夫电流定律

P1.31 用自己的话解释一下 KCL。KCL 为什么会成立？

P1.32 解释电路中节点术语的含义。标出图 P1.32 中电路的节点。注意，由理想电线连接的所有节点可视为一个单独节点。

P1.33 如果 3 个电气元件串联，如何描述流过 3 个元件的电流呢？

*P1.34 标出图 P1.32 中有串联关系的元件。

P1.35 如果把电路和液体流动模型进行类比，电路电流就类似于液体体积流速(cm^3/s)，请问这些液体是可压缩性的还是非压缩性的？液流管壁是弹性的还是非弹性的？对你的答案做出解释。

*P1.36 如图 P1.36 所示电路，用 KCL 计算电流 i_a、i_c和 i_d，电路中哪些元件是串联关系？

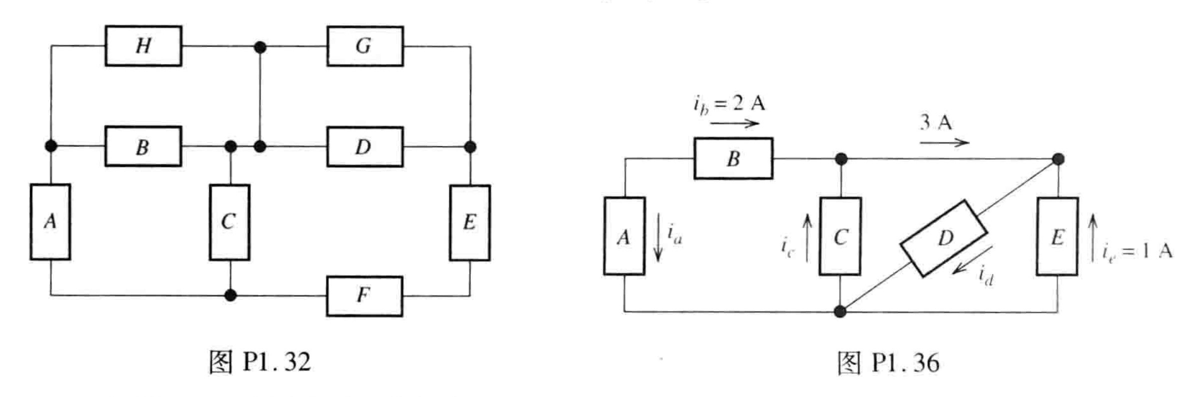


图 P1.32　　图 P1.36

*P1.37 如图 P1.37 所示电路，当电流 $i_a = 2$ A，$i_b = 3$ A，$i_d = -5$ A，$i_h = 4$ A 时，试用 KCL 计算其他电流值。

P1.38 如图 P1.38 所示电路，(1)电路中哪些元件是串联关系？(2)电流 i_c和 i_d有何关系？(3)当电流 $i_a = 4$ A，$i_c = -1$ A 时，计算 i_b和 i_d的值。

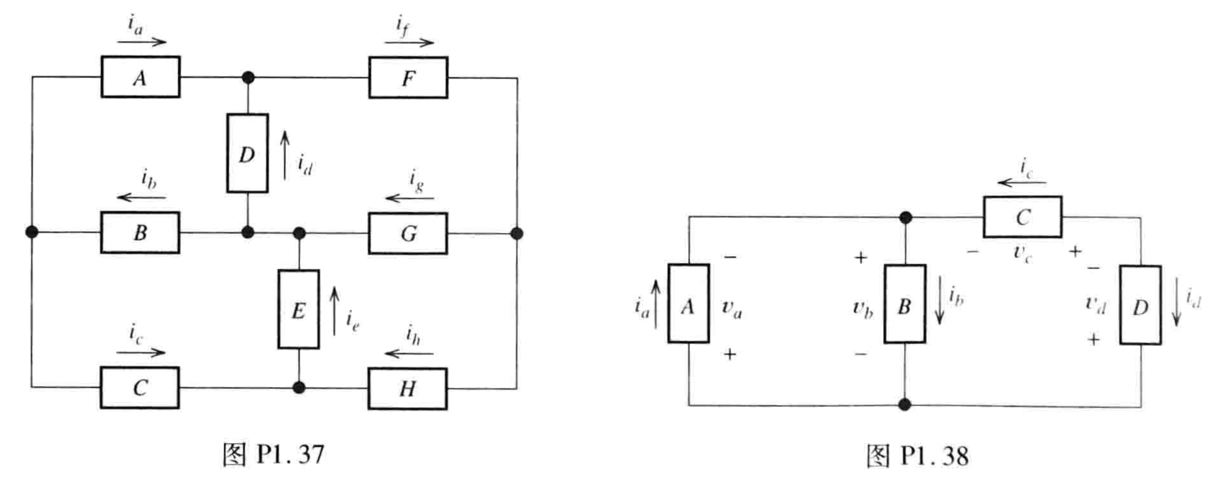


图 P1.37　　图 P1.38

P1.39 如图 P1.37 所示电路，当电流 $i_a = 1$ A，$i_c = -2$ A，$i_g = 7$ A，$i_h = 2$ A 时，计算其他电流值。

1.5 节 基尔霍夫电压定律

P1.40 用自己的话解释一下 KVL。KVL 为什么会成立？

*P1.41 如图 P1.41 所示电路，用 KVL 计算电压 v_a、v_b和 v_c。

*P1.42 如图 P1.42 所示电路，用 KVL 和 KCL 计算标示的电流和电压值，并计算每个元件的功率，说明功率是否平衡(即证明所有功率的代数和为零)。

P1.43 如图 P1.38 所示电路中，(1)电路中哪些元件是并联关系？(2)电压 v_a和 v_b有何关系？(3)当电压$v_a = 12$ V，$v_c = 7$ V 时，计算 v_b和 v_d的值。

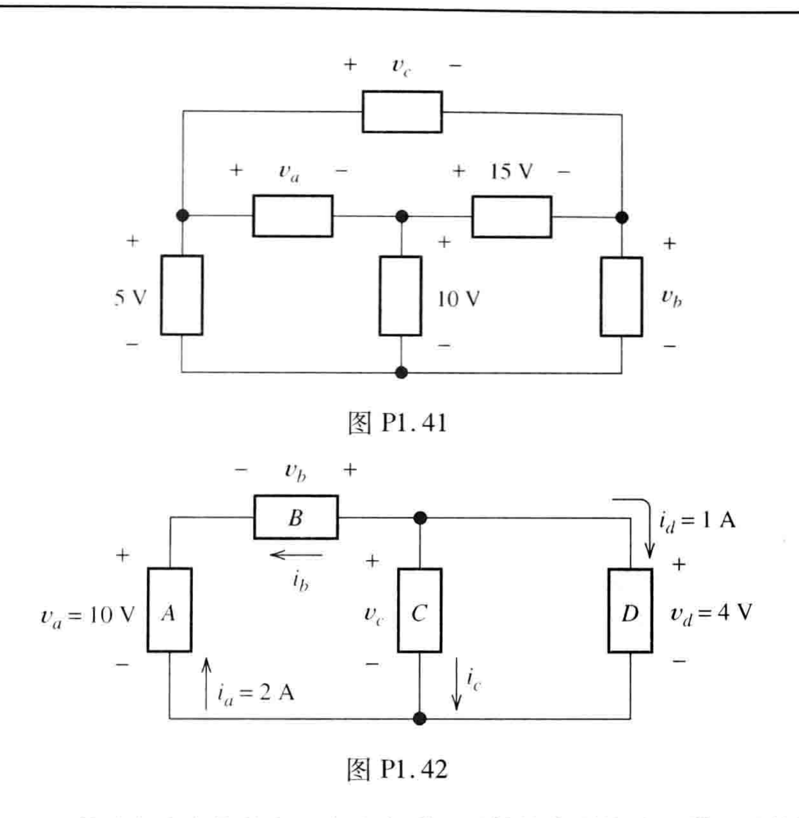


图 P1.41

图 P1.42

P1.44 标出图 P1.44 所示电路中的节点。电路中哪些元件是串联关系？哪些元件是并联关系？

P1.45 如图 P1.45 所示电路，已知电压 $v_a = 15$ V，$v_b = -7$ V，$v_f = 10$ V，$v_h = 4$ V，用 KVL 计算其他电压值。

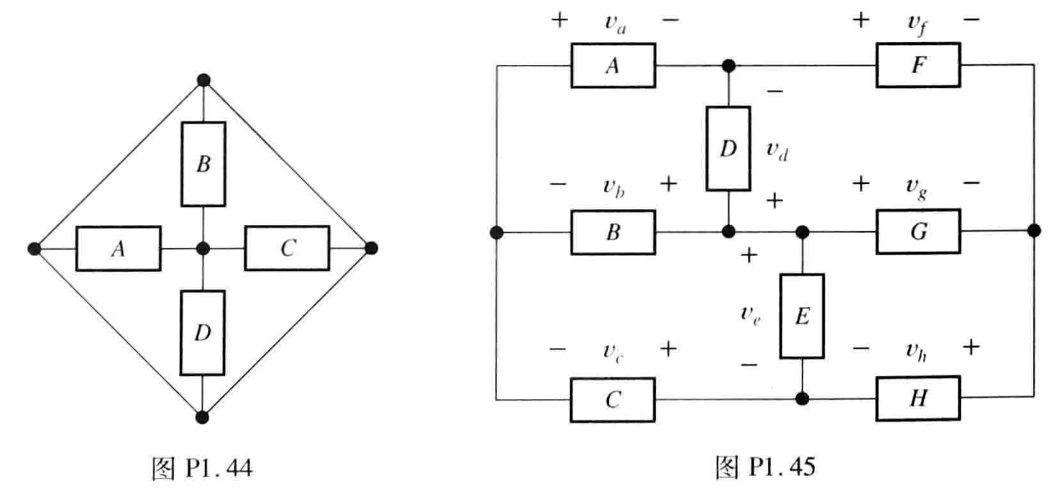


图 P1.44　　　　图 P1.45

P1.46 一电路含有 a、b、c、d 4 个节点，已知电压 $v_{ab} = 15$ V，$v_{cb} = -7$ V，$v_{da} = 10$ V，求 v_{ac} 和 v_{cd} 的值。（提示：先画出电路图，标出已知电压。）

P1.47 在如下电路图中判断并说明为并联关系的元件：(1)图 P1.36；(2)图 P1.42；(3)图 P1.45。

P1.48 一辆普通的高尔夫球车电源一般由一组 6 V 电池组成(本题假设为 6 V 的理想电压源)。如果发动机驱动需要 36 V 电压，问最少需要几块电池？电池之间如何连接？画出电池连接简图并标出每块电池的极性。

1.6 节　电路元件简介

P1.49 用自己的话阐述下列术语：(1)理想导体；(2)理想电压源；(3)理想电流源；(4)短路；(5)开路。

P1.50 用自己的话解释欧姆定律(包括参考方向)。

P1.51 列出 4 种受控电源的类型以及对应的增益参数的单位。

*P1.52 设计一个电路，包含一个 5 Ω 的电阻、一个 10 V 的独立电压源和一个 2 A 的独立电流源，而且

3 个元件为串联关系。(由于电源参考方向未定,可能出现多个正确答案。)

P1.53 设计习题 P1.52 中的 3 个元件改为并联关系、其他条件不变情况下的电路。

P1.54 已知一铜电线电阻为 1.5 Ω,计算相同尺寸钨电线的电阻值。

P1.55 如果一电线电阻为 10 Ω,计算下列情况下电线的电阻值:(1)电线长度是原来的 2 倍;(2)电线直径是原来的 2 倍。

P1.56 设计一个电路,包含一个 5 Ω 的电阻、一个 10 V 的独立电压源和一个增益为 0.5 V/V 的电压控电压源,假设电阻电压是控制电压控电压源的电压,而且 3 个元件为串联关系。由于电源和控制电压的极性未定,可能出现多个答案。

P1.57 设计一个电路,包含一个 5 Ω 的电阻、一个 10 V 的独立电压源和一个增益为 2 Ω 的电流控电压源,假设电阻电流是控制电流控电压源的电流,而且 3 个元件为串联关系。由于电源和控制电流的极性未定,可能出现多个答案。

*P1.58 一电阻电压为 10 V 时其功率是 100 W,计算该电阻的电阻值。如果电压下降 10% 即为 9 V,问功率会减少多少百分比?假设电阻值是恒定的。

P1.59 已知一 10 Ω 电阻电流为 $i(t) = \exp(-3t)$ A,计算从 $t=0$ 到 $t=\infty$ 电阻消耗的能量。

P1.60 已知一 20 Ω 电阻电压为 $v(t) = 10\sin(2\pi t)$ V,计算从 $t=0$ 到 $t=2$ s 电阻消耗的能量。

1.7 节 电路简介

P1.61 如图 P1.61 所示,请绘制下列各电路中的 i_{ab} 与 v_{ab} 的关系曲线。

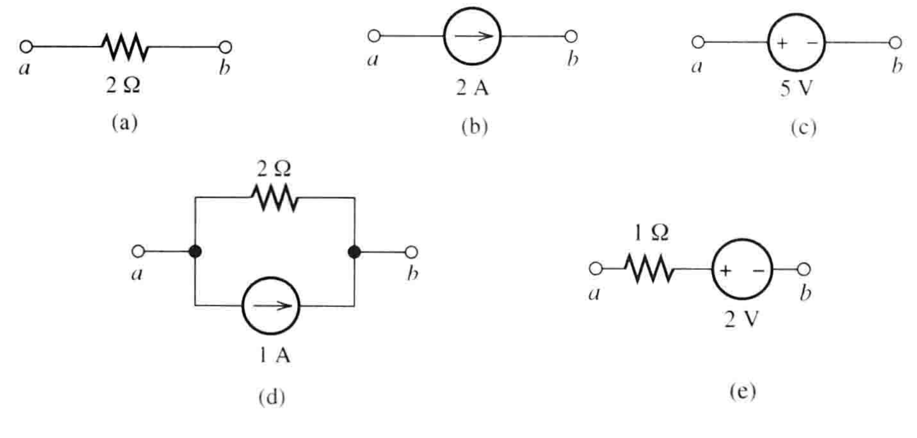


图 P1.61

P1.62 下列哪些关于电路元件的说法是自相矛盾的:(1)一个 12 V 电压源和一个 2 A 电流源并联;(2)一个 2 A 电流源和一个 3 A 电流源串联;(3)一个 2 A 电流源和短路线并联;(4)一个 2 A 电流源和开路线串联;(5)一个 5 V 电压源和短路线并联。

*P1.63 分析图 P1.63 所示电路,计算流过电阻的电流 i_R,以及每个元件的功率,问:哪个元件是吸收能量的?

*P1.64 分析图 P1.64 所示电路,应用欧姆定律、KVL 和 KCL 计算 V_x。

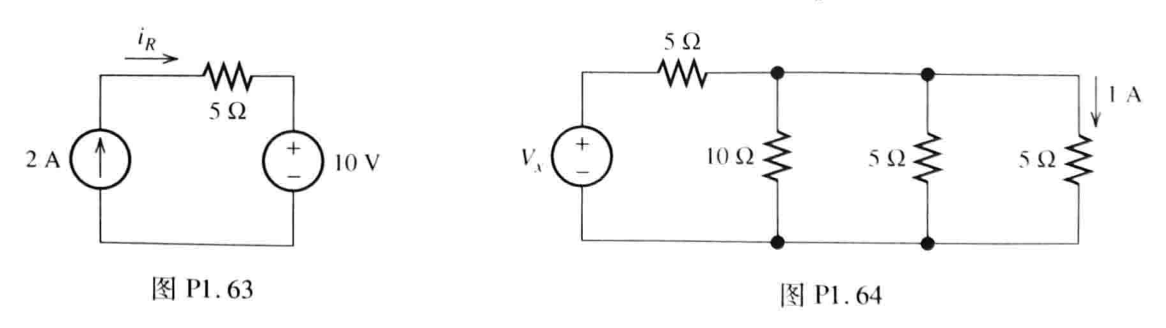


图 P1.63

图 P1.64

P1.65 如图 P1.65 所示电路,计算每个电源的功率。哪个电源吸收功率?哪个电源发出功率?

P1.66 分析图 P1.66 所示电路，计算流过电阻的电流 i_R，以及每个元件的功率。哪些元件是吸收能量的？

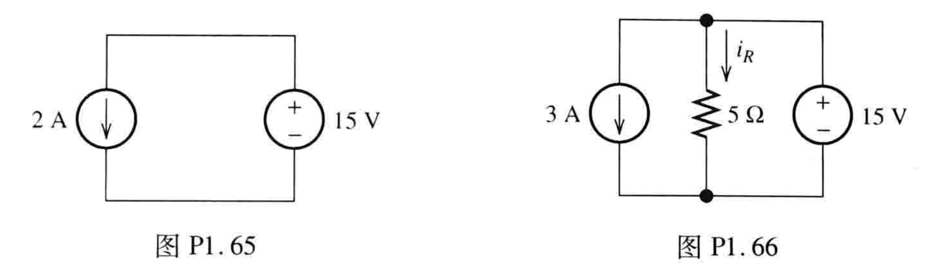


图 P1.65 图 P1.66

P1.67 分析图 P1.67 所示电路，应用欧姆定律、KVL 和 KCL 计算 I_x。

P1.68 分析图 P1.68 所示电路，(1)哪些元件是串联关系？(2)哪些元件是并联关系？(3)应用欧姆定律、KVL 和 KCL 计算 V_x。

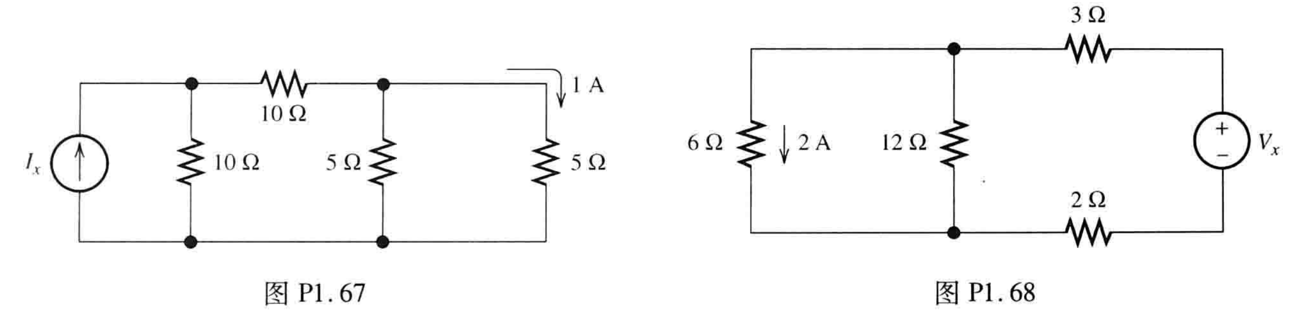


图 P1.67 图 P1.68

*P1.69 图 P1.69 所示电路含有一个电压控电压源，(1)应用 KVL 列写各电压的方程并求解 V_x；(2)应用欧姆定律求解 i_x；(3)计算每个电路元件的功率并验算功率是否守恒。

*P1.70 图 P1.70 所示电路是哪一种受控电源？求解 v_s。

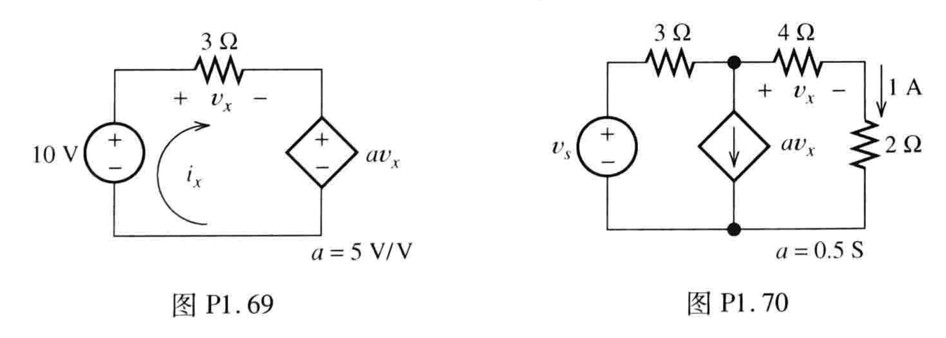


图 P1.69 图 P1.70

P1.71 图 P1.71 所示是扩音器的电路模型，扬声器电阻为 8 Ω，麦克风模型是电流源 I_x 和 5 Ω 电阻，其余元件是放大器。图示的是哪一种受控电源？当 8 Ω 电阻的功率是 8 W 时，计算受控电源的电流和麦克风的 I_x。

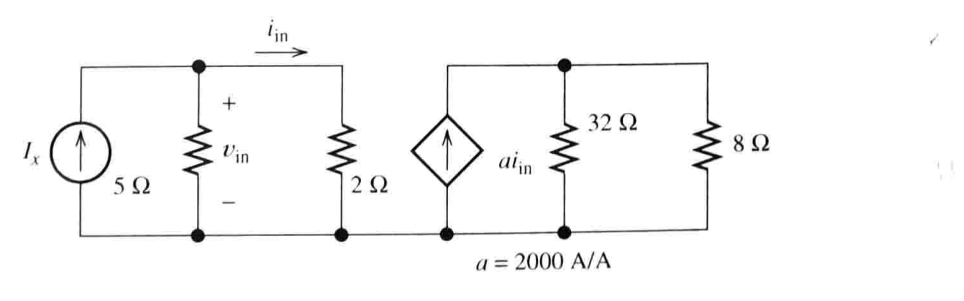


图 P1.71

P1.72 如图 P1.72 所示电路，(1)哪些元件是串联关系？(2)哪些元件是并联关系？(3)应用欧姆定律、KVL 和 KCL 计算 R_x。

P1.73 计算图 P1.73 所示电路的各电流值。

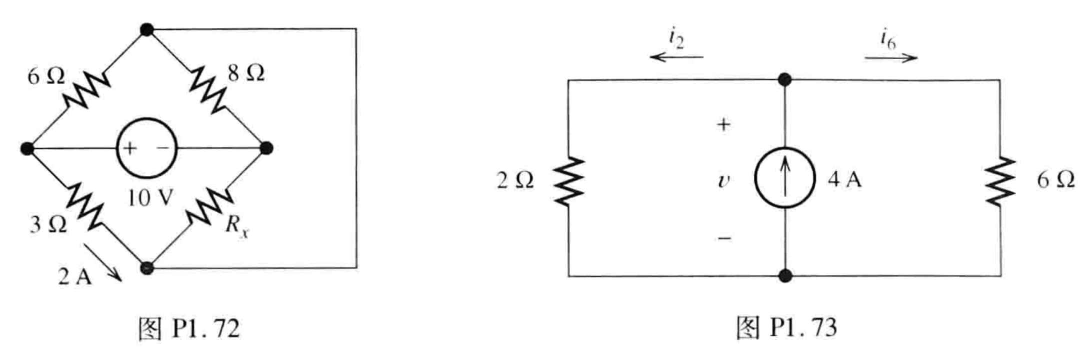


图 P1.72　　图 P1.73

P1.74 图 P1.74 所示电路是哪一种受控电源？求解 v_x 和 i_y。

P1.75 一个 10 V 独立电压源与一个 2 A 的独立电流源串联，可以等效为一个什么类型的独立电源？给出等效电源的类型和数值。

P1.76 一个 10 V 独立电压源与一个 2 A 的独立电流源并联，可以等效为一个什么类型的独立电源？给出等效电源的类型和数值。

P1.77 如图 P1.77 所示电路，已知 $R_1=4\ \Omega$，$R_2=6\ \Omega$，$V_s=20\ \text{V}$。(1)应用 KVL 列写相关电压方程；(2)应用欧姆定律列写 v_1、v_2 和电流 i 的关系式；(3)把(2)所列方程代入(1)求电流 i；(4)计算每个电路元件的功率并验算功率是否守恒。

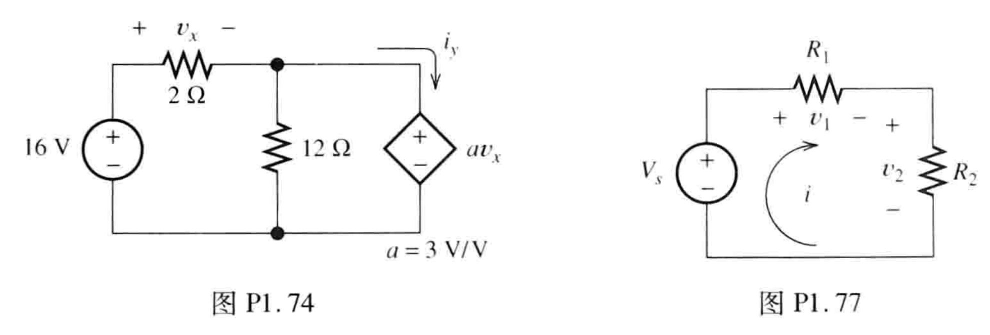


图 P1.74　　图 P1.77

P1.78 如图 P1.78 所示电路，已知 $R_1=5\ \Omega$，$R_2=10\ \Omega$，$I_s=3\ \text{A}$。(1)应用 KCL 列写相关电流方程；(2)应用欧姆定律列写 i_1、i_2 和电压 v 的关系式；(3)把(2)所列方程代入(1)求电压 v；(4)计算每个电路元件的功率并验算功率是否守恒。

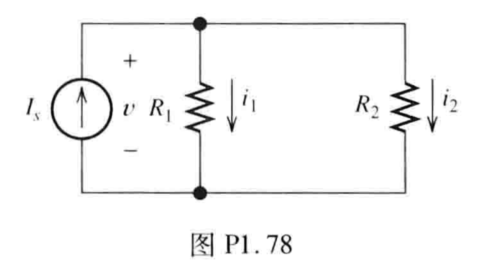


图 P1.78

P1.79 图 P1.79 所示电路是哪一种电源？求解 i_s。

P1.80 图 P1.80 所示电路是哪一种电源？求解 i_x。

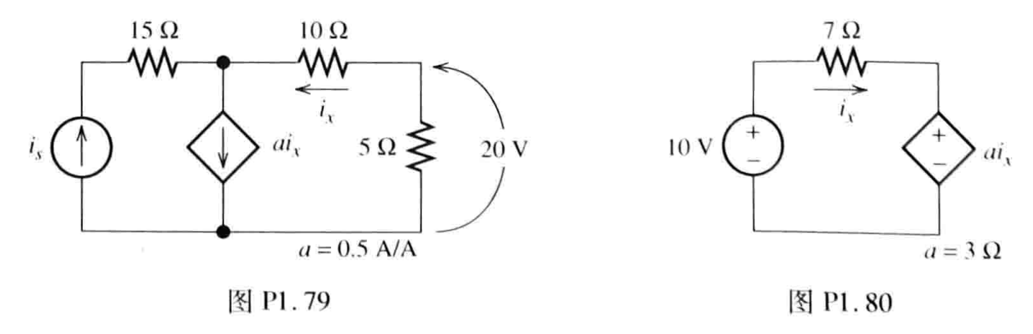


图 P1.79　　图 P1.80

测试题

下列测试题可以检验你对本章重要概念掌握和理解的程度。答案可以在附录 E 和完整的学生资源文件中找到。学生解答参见附录 F。

T1.1 对表 T1.1(项目 a)和表 T1.1(项目 b)匹配的条目连线(表 T1.1(项目 b)中的条目可以多次使用或者不用)。

表 T1.1

项目 a	项目 b
a. 节点	1. $v_{ab}=Ri_{ab}$
b. 回路	2. 元件电流参考方向从电压参考方向的正极流入
c. KVL	3. 一条电流不能流过的路径
d. KCL	4. 多个理想导体的连接点
e. 欧姆定律	5. 一个提供特定电流的电路元件
f. 关联参考方向	6. 一个其电流或电压取决于其他电流或电压的元件
g. 理想导体	7. 一条从一个节点开始又回到该节点的路径
h. 开路	8. 一个电压为 0 的元件
i. 电流源	9. A/V
j. 电路元件并联	10. V/A
k. 受控源	11. J/C
l. 电压单位	12. C/V
m. 电流单位	13. C/s
n. 电阻单位	14. 连接电路元件的电流相等
o. 元件串联	15. 连接电路元件的电压相等
	16. 闭合回路所有电压的代数和为 0
	17. 连接到一个节点的所有元件电压的代数和为 0
	18. 流入节点的电流之和等于流出节点的电流之和

T1.2 如图 T1.2 所示电路，已知 $I_s=3$ A，$R=2\ \Omega$，$V_s=10$ V。(1)计算 v_R；(2)计算电压源的功率，电压源是吸收功率还是发出功率？(3)电路有几个节点？(4)计算电流源的功率，电流源是吸收功率还是发出功率？

T1.3 如图 T1.3 所示电路，已知 $I_1=3$ A，$I_2=1$ A，$R_1=12\ \Omega$，$R_2=6\ \Omega$。(1)计算 v_{ab}；(2)计算每个电流源的功率，电流源是吸收功率还是发出功率？(3)电路有几个节点？(4)计算 R_1、R_2吸收的功率。

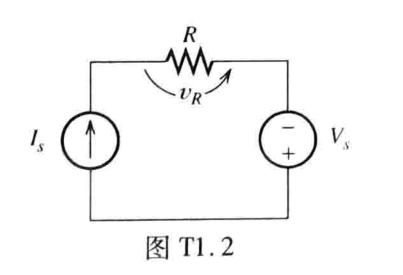


图 T1.2

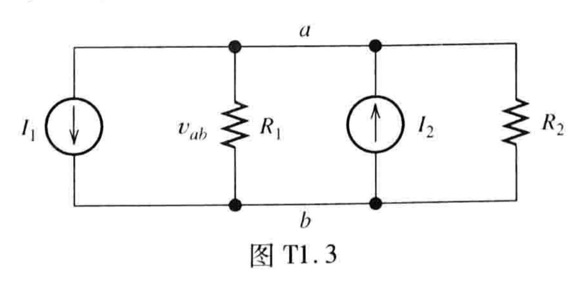


图 T1.3

T1.4 如图 T1.4 所示电路，已知 $V_s=12$V，$v_2=4$ V，$R_1=4\ \Omega$，试求 v_1、i 和 R_2。

T1.5 如图 T1.5 所示电路，已知 $v_s=15$ V，$R=10\ \Omega$，$a=0.3$ S，试求短路电流 i_{sc}。

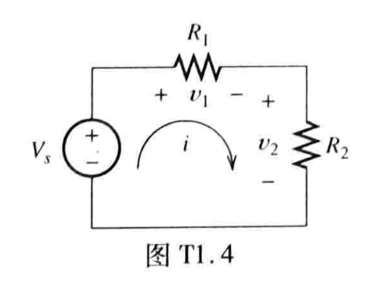


图 T1.4

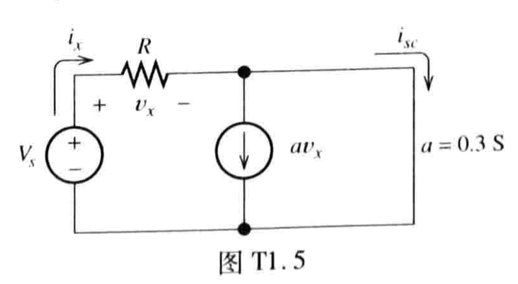


图 T1.5

第2章 电阻电路

本章学习目标

- 分析电阻串、并联等效电路的响应(电流、电压)
- 掌握分压和分流公式的应用
- 掌握戴维南、诺顿等效定理以及电源变换方法
- 掌握 MATLAB 在求解电路方程中的应用
- 掌握叠加原理
- 了解惠斯通电桥的结构和工作原理

本章介绍

在电气工程的应用中，常常遇到已知电路元件参数和电路的结构而求解电流、电压和功率的电路分析问题。本章将介绍由电阻、电压源和电流源组成的电路分析方法。在后面章节中将把这些分析方法扩展到含电感和电容元件的电路中。

许多电气工程应用问题也会在其他领域中遇到，通过本章的学习可以获得解决电子仪器和其他电路问题的技能。本书将为参加(美国)基础工程考试以成为注册专业工程师的读者提供帮助。

2.1 电阻的串联和并联

本节将介绍如何用一个等效电阻替换多个串联或并联电阻，并举例说明怎样用这些方法来分析电路。

2.1.1 电阻的串联

分析图2.1所示电路中的3个串联电阻。串联是指电路的各元件顺序连接的，并通过相同的电流。由欧姆定律：

$$v_1 = R_1 i \tag{2.1}$$

$$v_2 = R_2 i \tag{2.2}$$

和

$$v_3 = R_3 i \tag{2.3}$$

运用 KVL，可得：

$$v = v_1 + v_2 + v_3 \tag{2.4}$$

将式(2.1)、式(2.2)、式(2.3)代入式(2.4)，可得：

$$v = R_1 i + R_2 i + R_3 i \tag{2.5}$$

提出公因子电流 i，有：

$$v = (R_1 + R_2 + R_3)i \tag{2.6}$$

根据定义，等效电阻 R_{eq} 为各串联电阻之和：

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 \tag{2.7}$$

代入式(2.6)，得到：

$$v = R_{eq} i \tag{2.8}$$

可见，3 个串联的电阻可以用一个等效电阻 R_{eq}代替，如图 2.1(b)所示，电压 v 和电流 i 保持不变。如果这 3 个电阻是某个电路的一部分，用一个简单的等效电阻替换之后，对电路其他部分的电压和电流没有影响。

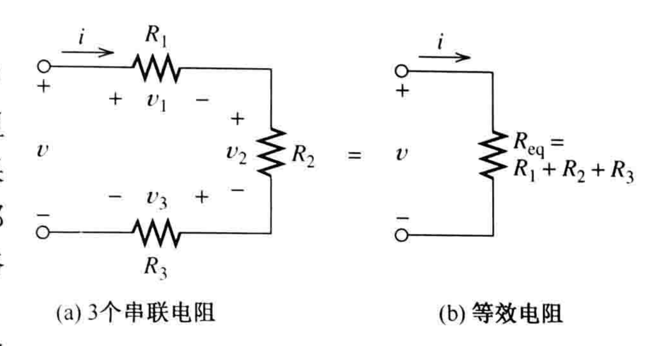


图 2.1 串联电阻网络的等效电阻

该方法可以用于任意个电阻的串联，例如，两个串联电阻的等效电阻值为这两个串联电阻值之和。总之，多个串联电阻的等效电阻为各电阻之和。

2.1.2 电阻的并联

图 2.2(a)所示为 3 个电阻并联。在并联电路中，每个元件的电压相同，将欧姆定律应用于图 2.2(a)，有：

$$i_1 = \frac{v}{R_1} \tag{2.9}$$

$$i_2 = \frac{v}{R_2} \tag{2.10}$$

$$i_3 = \frac{v}{R_3} \tag{2.11}$$

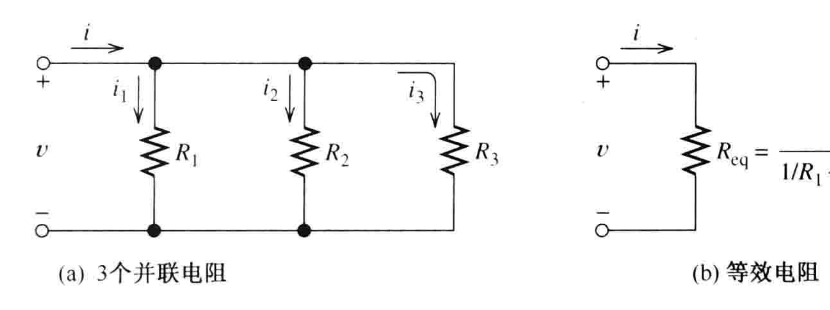


图 2.2 并联电阻网络的等效电阻

图 2.2(a)中电阻的两端分别连接于一点，由 KCL 可知，流过端部节点的电流为：

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \tag{2.12}$$

将式(2.9)、式(2.10)、式(2.11)代入式(2.12)可得：

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \frac{v}{R_3} \tag{2.13}$$

提出公因子电压 v，得：

$$i = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) v \tag{2.14}$$

得到等效电阻：

$$R_{eq} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3} \tag{2.15}$$

将等效电阻代入，式(2.14)变为：

$$i = \frac{1}{R_{eq}} v \tag{2.16}$$

比较式(2.14)和式(2.16)，会发现式(2.15)表示的 R_{eq}、i 和 v 有相同的关系。因此，一个电阻并联网络可以用一个等效电阻代替，并保持电路其他部分的电压、电流不变，等效电路如图 2.2(b)所示。

这个方法可以应用于任意个电阻的并联。例如，在 4 个电阻并联的情况下，等效电阻为：

$$R_{eq} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_4} \tag{2.17}$$

同样，两个并联电阻的等效电阻为：

$$R_{eq} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} \tag{2.18}$$

可以写成：

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.19}$$

注意，式(2.19)只能应用于两个电阻的并联，不能应用于多个电阻的并联。

有时，通过重复采用电阻串联和并联的等效方法，可以将电阻电路用一个简单的等效电阻来代替。

例 2.1　电阻串联和电阻并联的结合。

分析图 2.3(a)所示电路的等效电阻。

解： 首先寻找并联和串联组合的电阻。在图 2.3(a)中，R_3 和 R_4 串联(实际上，此电路中再没有其余两个电阻是单纯的串联或并联关系)。因此，第一步是合并 R_3、R_4，用其等效电阻来代替。等效电阻值为各串联电阻值之和：

$$R_{eq1} = R_3 + R_4 = 5 + 15 = 20\ \Omega$$

简化电路如图 2.3(b)所示，从图中会发现 R_2 和 R_{eq1} 并联，其等效电阻为：

$$R_{eq2} = \frac{1}{1/R_{eq1} + 1/R_2} = \frac{1}{1/20 + 1/20} = 10\ \Omega$$

根据此次等效结果画出等效电路，如图 2.3(c)所示。

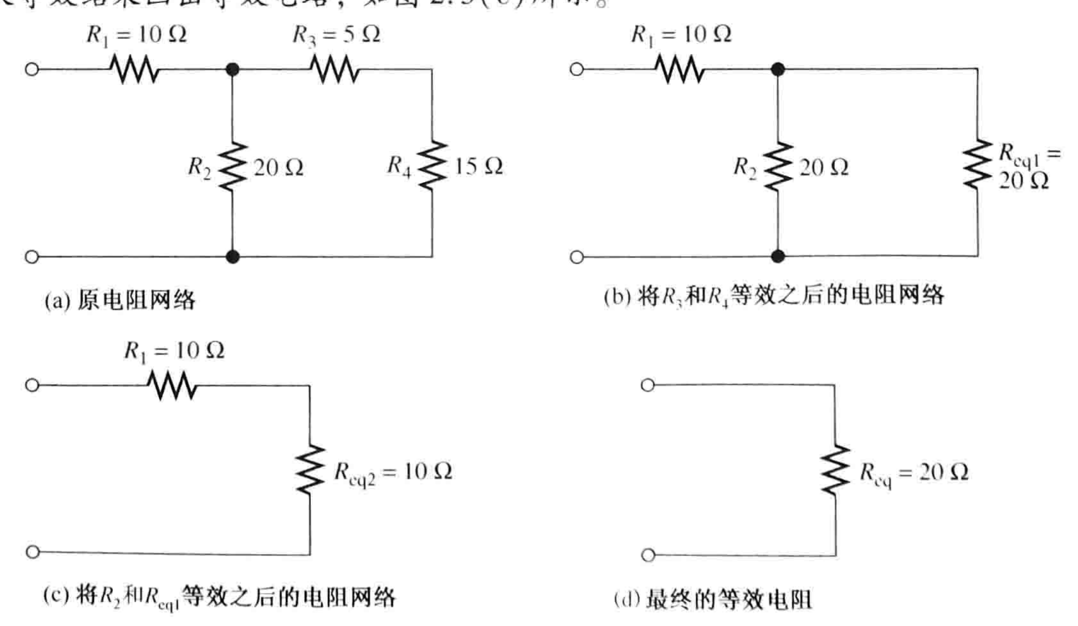


图 2.3　例 2.1 的电阻网络

可以看到 R_1 和 R_{eq2} 是串联的，因此整个网络的等效电阻为：

$$R_{eq} = R_1 + R_{eq2} = 10 + 10 = 20\ \Omega$$

练习 2.1　如图 2.4 所示，试计算每个电阻网络的等效电阻值。（提示：图 2.4(b) 中 R_3 与 R_4 是并联关系。）

答案　(a)3 Ω；(b)5 Ω；(c)52.1 Ω；(d)1.5 kΩ。

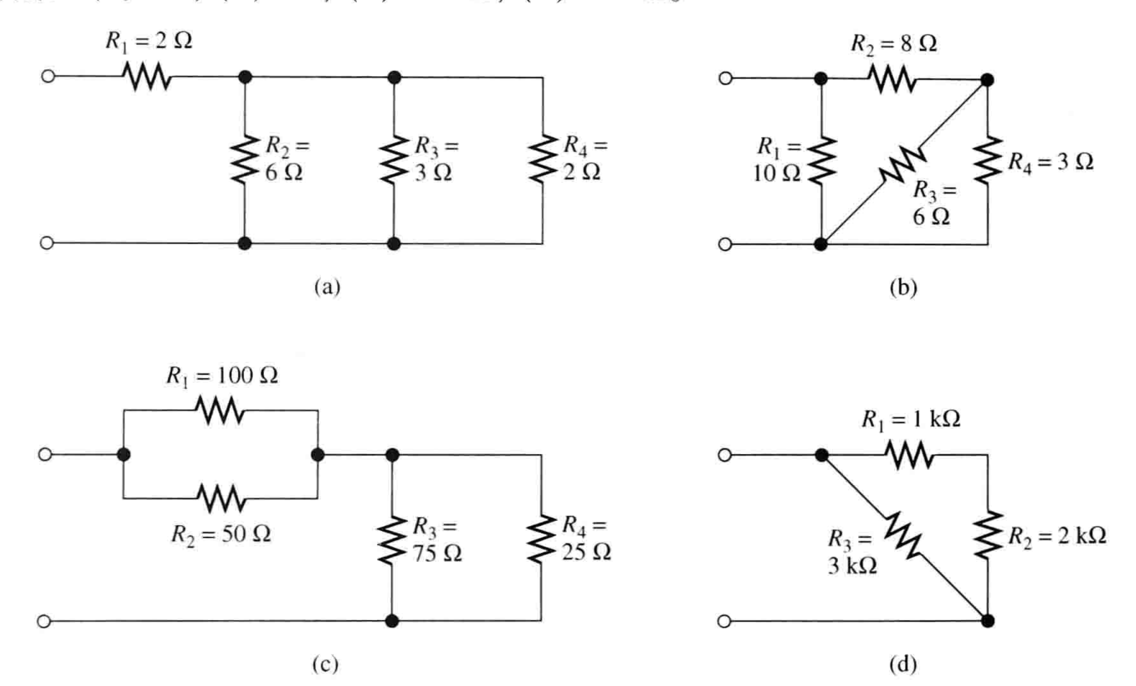


图 2.4　练习 2.1 的电阻网络

2.1.3　电导的串并联

电导是电阻的倒数。n 个串联的电导满足下列关系：

$$G_{eq} = \frac{1}{1/G_1 + 1/G_2 + \cdots + 1/G_n} \tag{2.20}$$

可见电导串联和电阻并联的关系相似。对两个电导串联来说：

$$G_{eq} = \frac{G_1 G_2}{G_1 G_2}$$

n 个并联的电导满足下列关系：

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \cdots + G_n \tag{2.21}$$

电导并联和电阻串联的关系相似。

2.1.4　串联和并联电路

电烤箱和电灯等吸收功率的元件称为电力负载。当需要用一个电压源向多个负载分配功率时，通常把负载并联，每个负载的串联开关能阻止电流流向负载，但并不影响其他负载的电压供给。

有时，为了节约电线，将圣诞灯灯泡串联成一串。当个别灯泡损坏或因断线而断开电路时，整串

灯泡将熄灭，这时只能通过逐个测试来找出有缺陷的灯泡。如果有多个灯泡出现故障，则找出坏掉的灯泡是很麻烦的事情。而在并联连接方式中，只有坏掉的灯泡才会熄灭，所以很容易找到故障灯泡。

2.2 用串/并联的等效变换进行网络分析

电路由电阻、电压源、电流源等元件连接在一起组成一个闭合回路。网络分析是对一个给定电路和各元件值求解各元件的电流、电压和功率的过程。在本节和下一节中将学习几种用于网络分析的方法。

通常，可以多次用等效电阻替换串/并联电阻的方法求得电阻电路中各元件的电压和电流。这种方法能充分化简电路，并且很容易解决问题。最后，将由简化电路获得的数据回代到前面各步骤中的等效电路，就可以求得原电路中所有的电压和电流量。

2.2.1 应用串/并联等效变换分析电路

用串/并联等效方法分析电路的步骤如下：

1. 首先确定电阻电路的结构是串联还是并联，化简通常从离电源最远的位置开始进行。
2. 用等效电阻替换由步骤 1 找到的电阻组合，画出简化电路。
3. 重复步骤 1 和步骤 2，直到电路足够简单。通常(但并非总是)简化到只有一个电源和一个电阻为止。
4. 求得最简电路的电压、电流值，将结果回代到前一步的简化电路，求得未知电压和电流。再继续回代至前一步并求解，多次重复，直到求出整个电路所有的未知电压和电流。
5. 检查结果，确保每个节点的电流满足 KCL，每个回路电压满足 KVL，而各元件功率之和为 0。

例 2.2 用串/并联电阻等效分析电路。

计算图 2.5(a)所示电路中每个元件的电压、电流和功率。

解： 首先，找到串/并联形式的电阻。例如，在图 2.5(a)所示电路中，R_2和 R_3并联，可用一个并联等效电阻替换 R_2、R_3，得到图 2.5(b)所示的电路。接着，R_1和 R_{eq1}串联，用电阻之和替换这些电阻，又得到如图 2.5(c)所示的简化电路。

当把一个电阻网络图简化为只有一个等效电阻和一个电源并联的回路后，可分析简化电路，然后将结果按简化步骤依次回代，如图 2.6 所示。(图 2.6 与图 2.5 基本相同。通常，在采用这种方法解决电路问题时，先画出等效电路，再回到原图，分析所有未知参数。)

首先，分析图 2.6(c)所示的化简后的电路。由于 R_{eq}是和 90 V 电压源并联的，R_{eq}的电压必为 90 V，上部为正极性。因此，流过 R_{eq}的电流为

$$i_1 = \frac{v_S}{R_{eq}} = \frac{90\ \text{V}}{30\ \Omega} = 3\ \text{A}$$

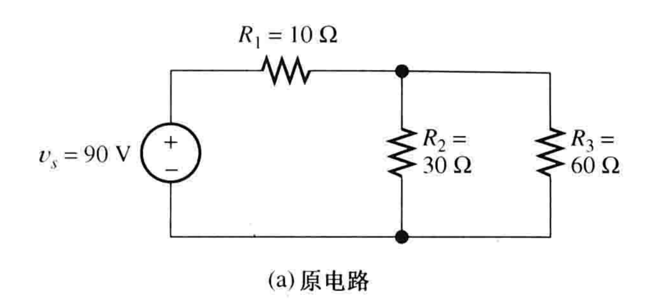
可知这个电流是从上至下穿过 R_{eq}的，图 2.6(c)中 R_{eq}和 v_s为串联关系，电流从下至上流过 v_s。因此，如图 2.6(c)所示，$i_1 = 3$ A 在电路回路中顺时针流动。

因为 R_{eq}可看做电源以外部分电路的等效电阻，流过 v_s的电流也一定是 $i_1 = 3$ A，在图 2.6(b)中，显然 i_1在由 v_s、R_1和 R_{eq1}组成的回路中顺时针流动。

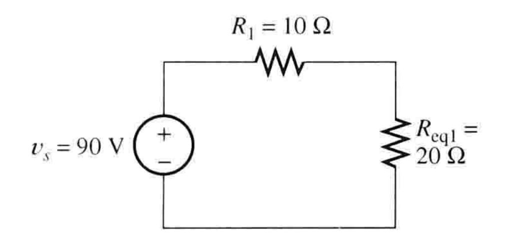
可得 R_{eq1}的电压为：

$$v_2 = R_{eq1} i_1 = 20\ \Omega \times 3\ \text{A} = 60\ \text{V}$$

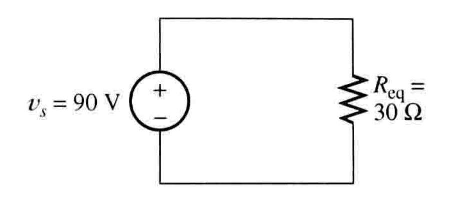
由于 R_{eq1}是电阻 R_2和 R_3并联的等效电阻，在原电路中，电压 v_2也是电阻 R_2和 R_3的端电压。



(a) 原电路

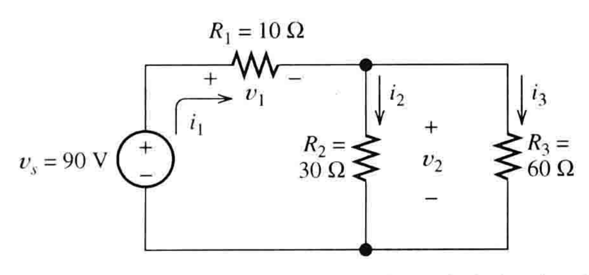


(b) 用等效电路替换 R_2 和 R_3之后的电路

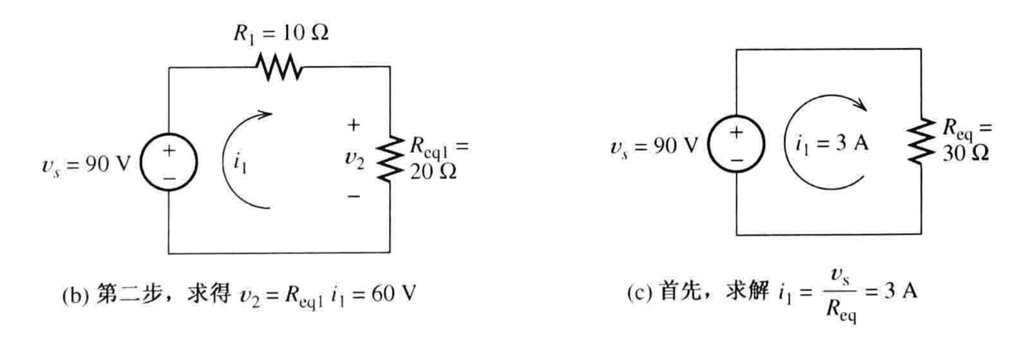


(c) 用等效电路替换 R_1 和 R_{eq1} 之后的电路

图 2.5 一个原电路及其简化电路，见例 2.2



(a) 第三步，用已知的 i_1 和 v_2 计算剩余的电流和电压值



(b) 第二步，求得 $v_2 = R_{eq1}\, i_1 = 60$ V

(c) 首先，求解 $i_1 = \dfrac{v_s}{R_{eq}} = 3$ A

图 2.6 将电路化简为一个等效电阻和一个电源并联的回路，求解最简电路

到这一步，已经得到 v_s和 R_1的电流值 $i_1 = 3$ A，R_2、R_3的电压是 60 V，这些信息已在图 2.6(a)中给出。现在，可以计算出剩余值：

$$i_2 = \frac{v_2}{R_2} = \frac{60\ \text{V}}{30\ \Omega} = 2\ \text{A}$$

$$i_3 = \frac{v_2}{R_3} = \frac{60\ \text{V}}{60\ \Omega} = 1\ \text{A}$$

接下来，应用欧姆定律计算 v_1的值：

$$v_1 = R_1 i_1 = 10\ \Omega \times 3\ \text{A} = 30\ \text{V}$$

（用 KVL 验证 $v_s = v_1 + v_2$。）

现在，计算每个元件的功率，对电压源有：

$$p_s = -v_s i_1$$

负号表示 v_s 和 i_1 的参考方向为非关联方向，可得：

$$p_s = -(90\ \text{V}) \times 3\ \text{A} = -270\ \text{W}$$

由于功率是负值，可知电压源为电路中其他元件提供能量。

电阻的功率：

$$p_1 = R_1 i_1^2 = 10\ \Omega \times (3\ \text{A})^2 = 90\ \text{W}$$

$$p_2 = \frac{v_2^2}{R_2} = \frac{(60\ \text{V})^2}{30\ \Omega} = 120\ \text{W}$$

$$p_3 = \frac{v_2^2}{R_3} = \frac{(60\ \text{V})^2}{60\ \Omega} = 60\ \text{W}$$

验证 $p_s + p_1 + p_2 + p_3 = 0$，说明功率是平衡的。

2.2.2 用串/并联热电阻控制功率

电阻元件通常作为化学工艺中反应室里的热电阻。例如，汽车的催化变换器达到其工作温度时才会生效。但是，当引擎被加热时会排放大量的污染物，因此要求汽车工程师研究怎样使热电阻更快地加热变换器，并减少污染。事实上，通过使很多热电阻单独地、串联地或是并联的组合起来工作，就能达到多种功率水平，这样对控制化学过程中的温度非常有用。

练习 2.2 通过电阻的串联和并联等效，计算图 2.7 中标定的电流值。

答案：(a) $i_1 = 1.04\ \text{A}, i_2 = 0.48\ \text{A}, i_3 = 0.32\ \text{A}, i_4 = 0.24\ \text{A}$；(b) $i_1 = 4\ \text{A}$，$i_2 = 1\ \text{A}$；(c) $i_1 = 1\ \text{A}$，$i_2 = 0.5\ \text{A}, i_3 = 0.5\ \text{A}$。

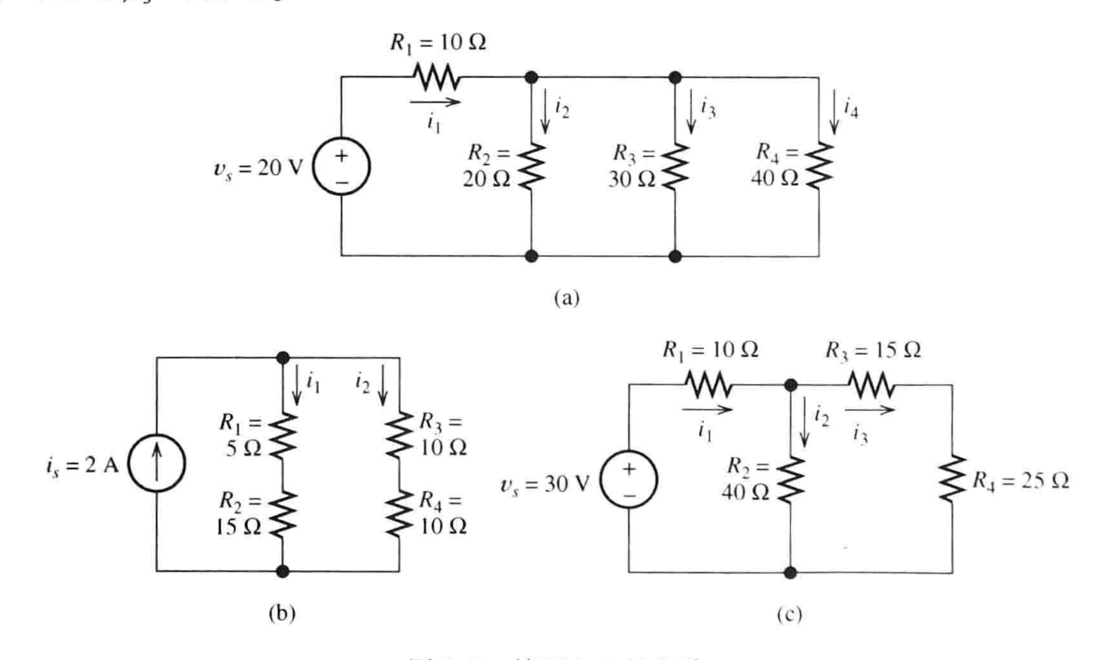


图 2.7 练习 2.2 的电路

2.3 分压和分流电路

2.3.1 分压原理

将电压加在一个串联电阻电路时，每个电阻都会得到一部分电压。如图 2.8 所示的电路，电压源两端的等效电阻为：

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 \tag{2.22}$$

电流等于总电压除以等效电阻：

$$i = \frac{v_{total}}{R_{eq}} = \frac{v_{total}}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{2.23}$$

此外，电阻 R_1 的端电压为：

$$v_1 = R_1 i = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} v_{total} \tag{2.24}$$

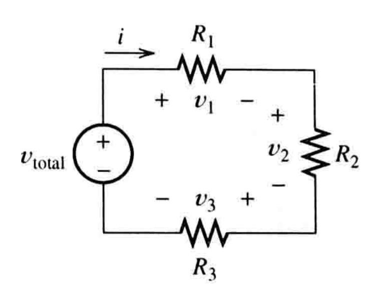


图 2.8 用于推导分压原理的电路

同理有：

$$v_2 = R_2 i = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} v_{total} \tag{2.25}$$

和

$$v_3 = R_3 i = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} v_{total} \tag{2.26}$$

总结：对于总电压而言，串联电路中给定电阻分到的电压比值等于给定电阻与串联电阻总和的比值，这就是分压原理。

该原理适用于 3 个电阻串联的电路。其实，只要任意个电阻是串联连接的，该原理都适用。

例 2.3 分压原理的应用。

计算图 2.9 中的电压 v_1 和 v_4。

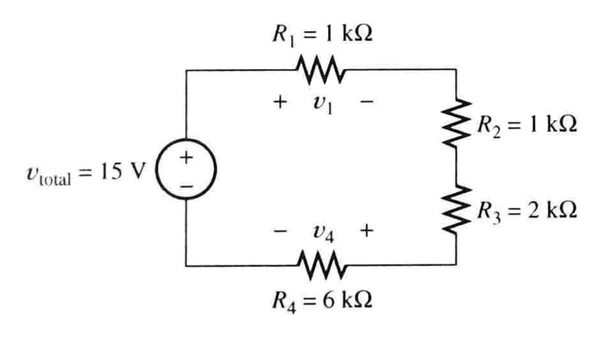


图 2.9 例 2.3 的电路

解： 运用分压原理，可知 v_1 是 R_1 与总电阻的比率再乘以总电压。

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} v_{total}$$

$$= \frac{1000}{1000 + 1000 + 2000 + 6000} \times 15 = 1.5\ \text{V}$$

同样，

$$v_4 = \frac{R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} v_{total}$$

$$= \frac{6000}{1000 + 1000 + 2000 + 6000} \times 15 = 9\ \text{V}$$

注意：在串联电路中最大阻值的电阻分得的电压最多。

2.3.2 分流原理

当总电流流入并联电阻组合的电路中时将被分流，每个电阻将分得一部分电流。如图 2.10 所示电路的等效电阻为：

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.27}$$

并联电阻的电压为：

$$v = R_{eq} i_{total} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_{total} \tag{2.28}$$

图 2.10 推导分流公式的电路

计算每个电阻的电流：

$$i_1 = \frac{v}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_{\text{total}} \tag{2.29}$$

和

$$i_2 = \frac{v}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_{\text{total}} \tag{2.30}$$

分流公式的总结如下：对于两个并联电阻，一个电阻的电流是总电流乘以另一个电阻值与两个电阻值之和的比值。注意：此公式只适用于两个并联电阻的情况。如果有两个以上的电阻并联，在运用分流原理之前必须将这些电阻等效变换为两个电阻并联。

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + \cdots + G_n} i_{\text{total}}$$

$$i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2 + \cdots + G_n} i_{\text{total}}$$

例 2.4 分压分流原理的应用。

运用分压原理计算图 2.11(a)中的电压 v_x，然后计算电源电流 i_s 并运用分流原理计算电流 i_3。

解： 分压原理只适用于两个电阻串联的形式。因此，首先计算 R_2 和 R_3 的并联等效电阻：

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{30 \times 60}{30 + 60} = 20\ \Omega$$

等效电路如图 2.11(b)所示。

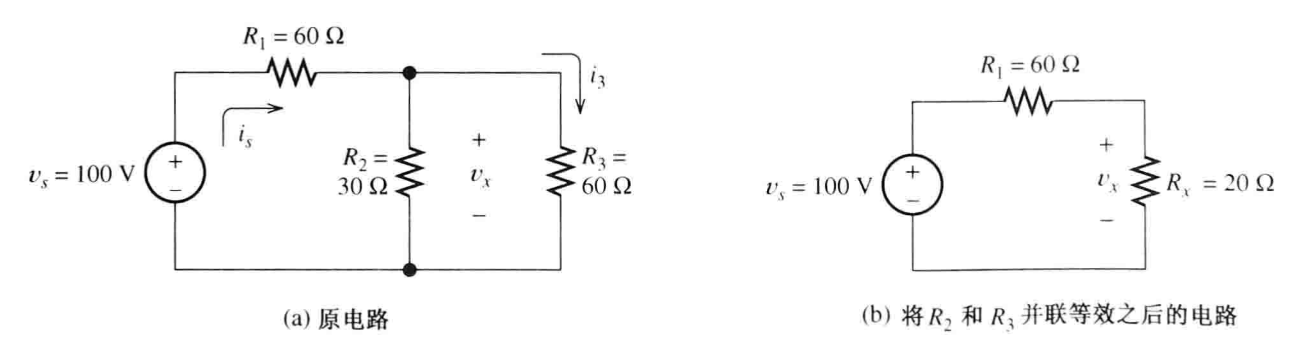


图 2.11 例 2.4 的电路

现在，运用分压原理计算 v_x，电压 v_x 等效于总电压与 R_x 在总电阻中的分量之积：

$$v_x = \frac{R_x}{R_1 + R_x} v_s = \frac{20}{60 + 20} \times 100 = 25\ \text{V}$$

电源电流 i_s 为：

$$i_s = \frac{v_s}{R_1 + R_x} = \frac{100}{60 + 20} = 1.25\ \text{A}$$

现在，运用分流原理计算 i_3。

电源电流流过 R_3 的比例系数是 $R_2/(R_2 + R_3)$，因此，

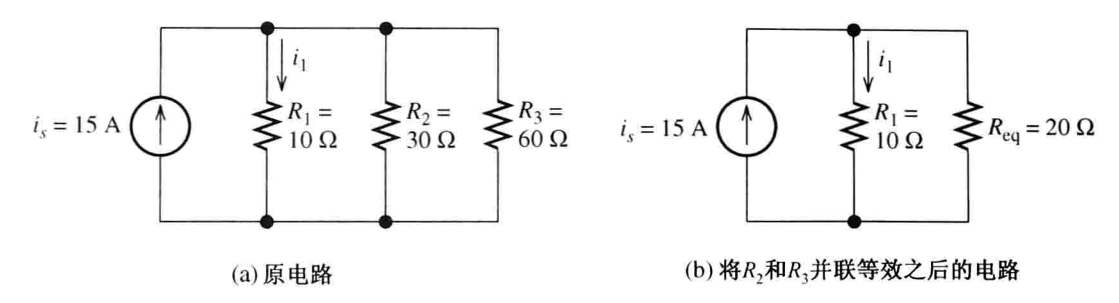
$$i_3 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} i_s = \frac{30}{30 + 60} \times 1.25 = 0.417\ \text{A}$$

也可以用另一种方法计算 i_3：

$$i_3 = \frac{v_x}{R_3} = \frac{25}{60} = 0.417\ \text{A}$$

例2.5 分流原理的应用。

运用分流原理计算图2.12(a)中的电流 i_1。



(a)原电路

(b)将R_2和R_3并联等效之后的电路

图2.12 例2.5的电路

解： 将分流原理用于两个并联电阻的电路。因此，第一步是结合 R_2和 R_3：

$$R_{eq} = \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3} = \frac{30 \times 60}{30 + 60} = 20\ \Omega$$

结果得到如图2.12(b)所示的等效电路，运用分流原理，有：

$$i_1 = \frac{R_{eq}}{R_1 + R_{eq}} i_s = \frac{20}{10 + 20} 15 = 10\ \text{A}$$

采用电导方式重新计算，得到

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = 100\,\text{mS}, \quad G_2 = \frac{1}{R_2} = 33.33\,\text{mS} \quad \text{和} \quad G_3 = \frac{1}{R_3} = 16.67\,\text{mS}$$

于是，计算出电流

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3} i_s = \frac{100}{100 + 33.33 + 16.67} 15 = 10\ \text{A}$$

所得值与采用电阻方式获得的结果完全相同。

2.3.3 基于分压原理的位置传感器

传感器是用电压(有时是电流)乘以比例系数表示如距离、压力或温度等的物理量。例如，图2.13展示了船只或飞机的舵的偏转角如何变换为与之成正比的电压。当舵偏转时，电阻的触头沿电阻移动，因此 R_2可以与舵角 θ 成正比。总电阻为 $R_1 + R_2$不变。输出电压为：

$$v_o = v_s \frac{R_2}{R_1 + R_2} = K\theta$$

K 是取决于电源电压和传感器结构的比例系数。像这样的传感器实例在科学和工程领域中还有很多。

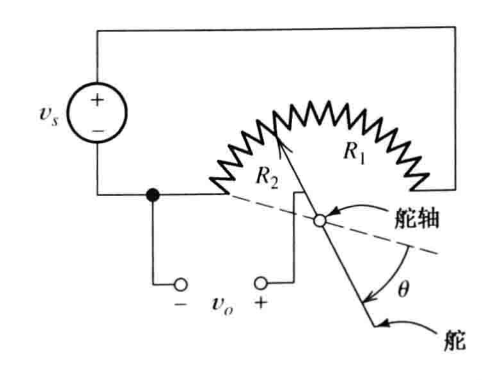


图2.13 分压原理用于某些传感器。此图表示一个传感器产生的输出电压正比于舵的偏转角

练习2.3 用分压原理计算图2.14所示电路中未知的电压。

答案： (a) $v_1 = 10$ V，$v_2 = 20$ V，$v_3 = 30$ V，$v_4 = 60$ V；(b) $v_1 = 6.05$ V，$v_2 = 5.88$ V，$v_4 = 8.07$ V。

练习2.4 用分流原理计算图2.15所示电路中未知的电流。

答案： (a) $i_1 = 1$ A，$i_3 = 2$ A；(b) $i_1 = i_2 = i_3 = 1$ A。

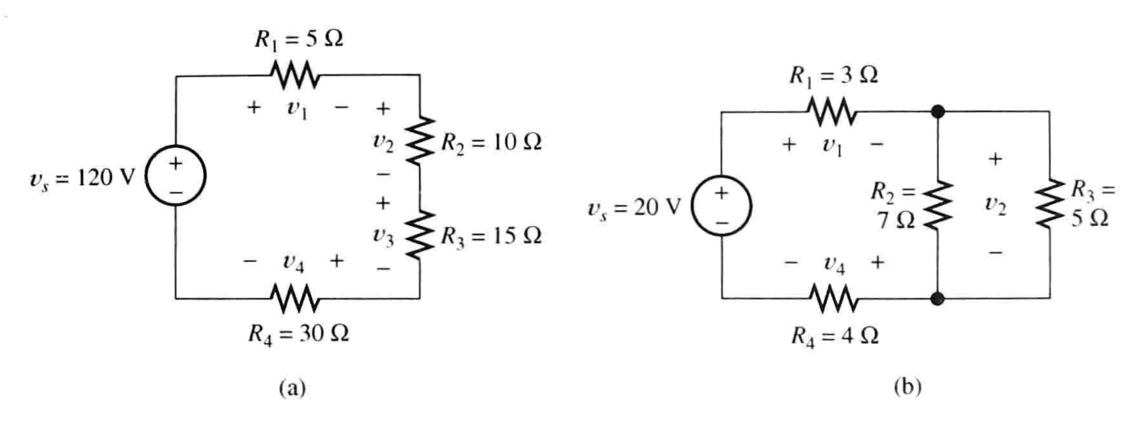


图 2.14 练习 2.3 的电路

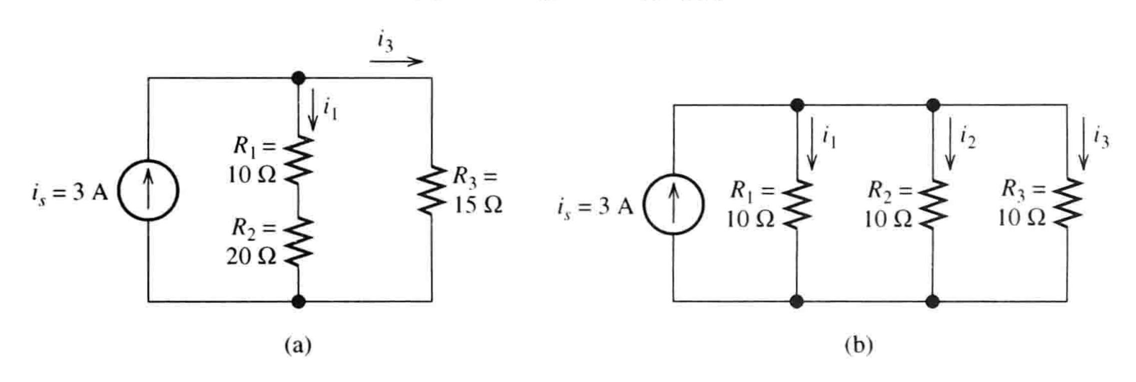


图 2.15 练习 2.4 的电路

2.4 节点电压分析法

我们已经学习的网络分析方法很有效，但并不适用于所有网络。例如，对图 2.16 所示的电路，不能使用电路串/并联方法求解电路，因为电路中没有串/并联电路块。而且分压和分流原理也不能求解该电路。本节将介绍节点电压分析方法，该方法是一种可以适用于任何电路的分析方法。

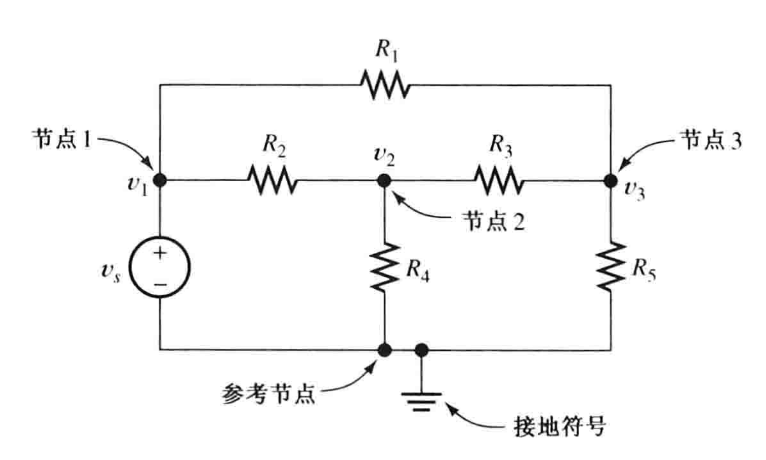


图 2.16 节点分析的第一步是选择参考节点和表示其他节点的电压

2.4.1 选择参考节点

节点是两个或多个电路元件的连接点。在节点电压分析方法中，首先选择一个节点作为参考节点。理论上，任何节点都可以作为参考节点。一般情况下，我们选择电压源的一端作为参考节点，我们将证明为什么这么做。

例如，图2.16所示的电路有4个节点，选择最下面的节点作为参考节点。我们用接地符号标示参考节点。

2.4.2 设定节点电压

下一步标示其他所有节点的电压。例如，把图2.16中其他3个节点电压标示为v_1、v_2、v_3，电压v_1表示节点1和参考节点之间的电压，电压v_1的极性是节点1为正极、参考节点为负极。类似地，电压v_2表示节点2和参考节点之间的电压，节点2为正极、参考节点为负极。实际上，每一个节点电压的参考负极都是参考节点。我们称电压v_1是节点1对参考节点的电压。

2.4.3 根据节点电压分析法分析电路元件电压

在节点电压分析方法中，列写方程式求解节点电压。一旦求出所有电压，求解每个电路元件的电流、电压和功率就容易多了。

例如，假设已知节点电压值，如果要求解电阻R_3的电压（电压正极在左边）。为了避免在图2.16中做其他标识，我们再画出如图2.17的电路图，标出所有节点电压和电阻R_3的电压v_x，用箭头标示电路元件的极性（箭头起始端为正极）。注意，v_2、v_x、v_3是由电阻R_4、R_3和R_5所组成的循行回路的电压。这些电压满足基尔霍夫电压定律，按照顺时针列写基尔霍夫电压定律方程：

$$-v_2 + v_x + v_3 = 0$$

求v_x：

$$v_x = v_2 - v_3$$

这样就可以通过求节点电压之间的差值得到所有电路元件的电压（如果元件一端为参考节点，则元件电压就等于节点电压）。

一旦求出元件电压，应用欧姆定律和KCL就可以求出每个元件的电流。然后，用每个元件的电压和电流相乘就得到功率。

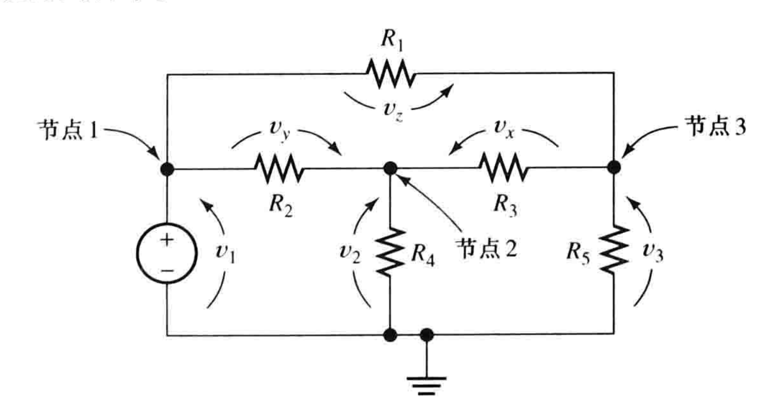


图2.17 假如能计算出节点电压v_1、v_2、v_3，就可以根据KVL求出v_x、v_y、v_z，然后根据欧姆定律，得到所有电阻的电流。因此，关键问题是计算节点电压

练习2.5 如图2.17所示电路，根据节点电压v_1、v_2、v_3列写v_y和v_z的表达式。

答案： $v_y = v_2 - v_1$，$v_z = v_3 - v_1$。

2.4.4 根据节点电压列写KCL方程

选择参考节点和设定电压变量以后，列写方程式求解节点电压。这里继续用图2.16所示的电路来说明。

在图2.16中，电压v_1等于电压源电压v_s：

$$v_1 = v_s$$

(在本例中，因为选择了一个独立电压源的一端为参考节点，有一个节点电压不用求解就可知道。)

因此，为了求解电压v_2、v_3的值，必须列写两个独立方程。通常，我们列写未知节点电压相应节点的电流方程。例如，图2.16中的节点2，流过电阻R_4的电流为

$$\frac{v_2}{R_4}$$

这是因为v_2是电阻R_4两端的电压，节点2为正极。因此，电流v_2/R_4是节点2流向参考节点的电流，电流从节点2流出。

然后可以看出，在图2.17中，节点2流经电阻R_3的电流为v_x/R_3，$v_x = v_2 - v_3$，因此节点2流经电阻R_3的电流为

$$\frac{v_2 - v_3}{R_3}$$

到这里我们总结一下:为了求解从节点n流向节点k的电流，用节点k的电压减节点n的电压再除以电阻。

因此，如果v_n和v_k是节点电压，R是连接两节点的电阻，节点n流向节点k的电流为

$$\frac{v_n - v_k}{R}$$

应用到图2.16中，求解节点2流出的经过R_2的电流为

$$\frac{v_2 - v_1}{R_2}$$

在练习2.5中，可以发现$v_y = v_2 - v_1$(见图2.17)，方向向左流经R_2的电流为v_y/R_2，分子替换后与上面的表达式一样。

当然，如果电阻连接在节点n和参考节点之间，则从节点n流向参考节点的电流等于节点电压v_n除以电阻。例如，在图2.17中，从节点2流经R_4的电流等于v_2/R_4。

现在我们应用KCL，所有流经节点2的电流代数和为0，得到：

$$\frac{v_2 - v_1}{R_2} + \frac{v_2}{R_4} + \frac{v_2 - v_3}{R_3} = 0$$

节点3的电流方程的列写与此相似。我们尽量采用相同的形式列写所有方程式，这样可以减少出错的概率。通常采用流出节点的电流代数和为0的表达式。应用这种方法，图2.16中节点3的方程为

$$\frac{v_3 - v_1}{R_1} + \frac{v_3}{R_5} + \frac{v_3 - v_2}{R_3} = 0$$

在许多网络中，可以通过对节点电压未知的节点应用KCL列写方程式求解节点电压。

例2.6 节点电压分析。

列写图2.18所示电路中求解节点电压v_1、v_2和v_3的方程式。

解：对节点1应用KCL列写方程：

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} + i_s = 0$$

方程式等号左边每一项代表一个从节点1流出的电流。

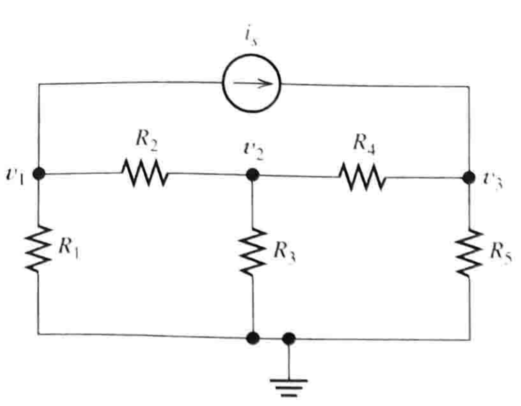


图2.18 例2.6的电路

列写从节点2流出的电流的代数和，得到：

$$\frac{v_2-v_1}{R_2}+\frac{v_2}{R_3}+\frac{v_2-v_3}{R_4}=0$$

类似地，对节点3有：

$$\frac{v_3}{R_5}+\frac{v_3-v_2}{R_4}=i_s$$

其中，等号左边代表从节点3流出的电流，等号右边代表流入节点3的电流。

练习2.6 对图2.19所示电路应用KCL列写每一个节点的电流方程(参考节点除外)。

答案：

$$节点1:\quad \frac{v_1-v_3}{R_1}+\frac{v_1-v_2}{R_2}=i_a$$

$$节点2:\quad \frac{v_2-v_1}{R_2}+\frac{v_2}{R_3}+\frac{v_2-v_3}{R_4}=0$$

$$节点3:\quad \frac{v_3}{R_5}+\frac{v_3-v_2}{R_4}+\frac{v_3-v_1}{R_1}+i_b=0$$

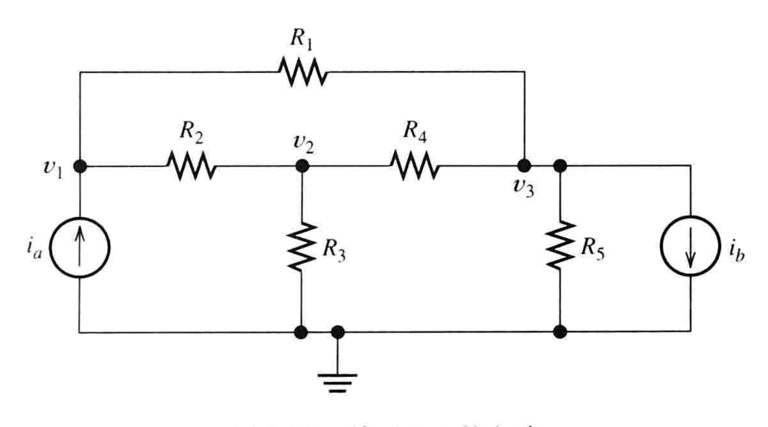


图2.19 练习2.6的电路

2.4.5 标准形式的电路方程

一旦列写出求解节点电压需要的方程式，即可把这些方程式标准化。把节点电压变量放在方程式左边，不涉及节点电压的项放在方程式右边。对两个节点电压，最终的方程式形式为

$$g_{11}v_1+g_{12}v_2=i_1 \tag{2.31}$$

$$g_{21}v_1+g_{22}v_2=i_2 \tag{2.32}$$

对3个未知节点电压，方程式形式为

$$g_{11}v_1+g_{12}v_2+g_{13}v_3=i_1 \tag{2.33}$$

$$g_{21}v_1+g_{22}v_2+g_{23}v_3=i_2 \tag{2.34}$$

$$g_{31}v_1+g_{32}v_2+g_{33}v_3=i_3 \tag{2.35}$$

我们选择字符 g 作为方程式左边节点的电压系数，是因为它们通常(并非所有)是单位为西门子的电导。类似地，我们选择字符 i 在方程式右边，因为它们通常是电流。

用矩阵形式，方程式可以写为

$$\mathbf{GV}=\mathbf{I}$$

其中：

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \quad 或 \quad \mathbf{G}=\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$$

具体取决于有两个还是3个未知节点电压。同样，**V** 和 **I** 是列向量：

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{V}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{I}=\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{I}=\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

随着节点和节点电压数量的增加，矩阵维数也相应增加。

求解节点电压的一种方法是求出 **G** 的逆阵，然后根据下式得到解向量：

$$\mathbf{V}=\mathbf{G}^{-1}\mathbf{I}$$

2.4.6 一种列写矩阵方程的快捷方法

如果把练习2.6(见图2.19)的电路节点方程式写成矩阵形式，则得到：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_a \\ 0 \\ -i_b \end{bmatrix}$$

比较图2.19所示电路各元件的方程式。首先，看矩阵 **G** 的对角线上的元素：

$$g_{11}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} \qquad g_{22}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} \qquad g_{33}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}$$

可以看出矩阵 **G** 对角线上的元素等于连接于该节点的所有电导之和。另外，注意其他元素：

$$g_{12}=-\frac{1}{R_2} \quad g_{13}=-\frac{1}{R_1} \quad g_{21}=-\frac{1}{R_2} \quad g_{23}=-\frac{1}{R_4} \quad g_{31}=-\frac{1}{R_1} \quad g_{32}=-\frac{1}{R_4}$$

在任何情况下，g_{ik}等于连接节点 i 和 k 之间的电导和的负数。**I** 矩阵的元素是电流源流入对应节点的电流。当网络由电阻和独立电流源组成时，假设采用常用方式列写方程式，这个结论始终成立。

因此，如果电路由电阻和独立电流源组成，则可以根据下列步骤快速列写矩阵形式的节点方程。

1. 确认电路只由电阻和独立电流源组成。
2. 矩阵 **G** 对角线上的元素是连接相应节点的电导之和。
3. 矩阵 **G** 非对角线上的元素是连接相应节点之间电导的负数。
4. 矩阵 **I** 的元素是电流源流入相应节点的电流值。

记住，如果网络中含有电压源或者控制电源，则上述方法不能使用。

练习2.7 根据图2.18，写出电路矩阵形式的节点电压方程。

答案：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\ 0 & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -i_s \\ 0 \\ i_s \end{bmatrix}$$

例2.7 节点电压分析。

如图2.20所示，写出电路矩阵形式的节点电压方程。

对每个节点写出KCL方程，有：

$$\frac{v_1}{5}+\frac{v_1-v_2}{4}+3.5=0$$
$$\frac{v_2-v_1}{4}+\frac{v_2}{2.5}+\frac{v_2-v_3}{5}=3.5$$
$$\frac{v_3-v_2}{5}+\frac{v_3}{10}=2$$

把方程式变成标准形式，得到：

$$0.45v_1-0.25v_2=-3.5$$
$$-0.25v_1+0.85v_2-0.2v_3=3.5$$
$$-0.2v_2+0.35v_3=2$$

最后得到矩阵方程式：

$$\begin{bmatrix} 0.45 & -0.25 & 0 \\ -0.25 & 0.85 & -0.20 \\ 0 & -0.20 & 0.30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3.5 \\ 3.5 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

因为电路中没有电压源和受控电源，所以可以根据快捷方法直接写出矩阵方程式。例如，$g_{11}=-0.25$是连接节点1的电导之和，$g_{12}=-0.25$是连接节点1和节点2之间电导的负数，$i_3=2$是2 A电流源流入节点3的电流，以此类推。

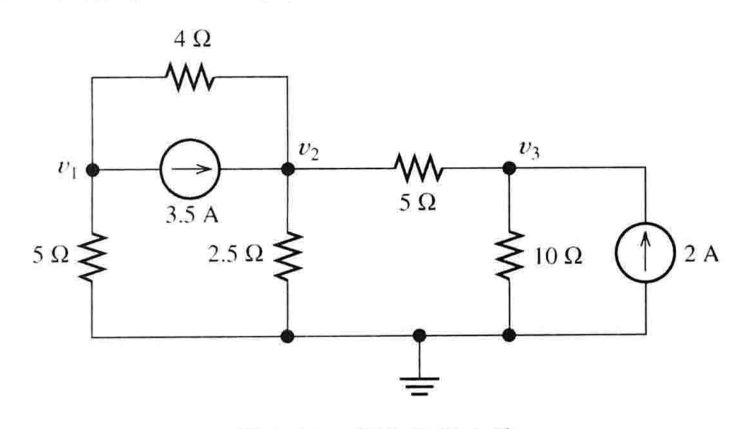


图2.20 例2.7的电路

2.4.7 求解电路方程

得到标准形式的电路方程式后，可以通过多种方法求解，如替代法、高斯消元法和行列式法。作为工程专业的学生，你也许有一个高效计算器(如TI-84或TI-89)，它们可以直接求解线性方程组，你可以在本章后面的习题和作业实践中学习这些方法。

在有些场合，可能不会允许使用高效计算器或者笔记本电脑。例如，在美国要成为专业工程师之前必须参加的工程师基础知识考试(FE)中只能使用简单的科学计算机。专业工程师考试的计算器政策可以在网址 http://www.ncees.org/exams/calcuators/找到。因此，即使有高效计算器，你也许希望在FE考试中使用这些方法。

练习2.8 使用计算器求解式(2.36)。

答案：$v_1=-5$ V，$v_2=5$ V，$v_3=10$ V。

2.4.8 使用MATLAB求解电路方程

MATLAB是一种用于工程和科学计算非常高效的软件系统。许多工程学校的学生会学习这个软件，而且很可能会在其他课程中应用。

在本章和接下来的几章中，我们将列举一些 MATLAB 在电路分析中的应用情况，但是本书不可能完全介绍该软件的所有有效功能。如果是初学 MATLAB，可以通过视频或者命令窗口顶部以及帮助菜单的入门文件进行学习，也可以通过登录网址 http：//www. mathworks. com/academic/student_center/tutorials/register. html 在线教材学习。如果已经用过 MATLAB，一定熟悉我们提供的 MATLAB 命令。无论哪种情况，你都可以轻松地修改示例程序以解决相似的电路问题。

其次，我们将演示如何用 MATLAB 求解式(2. 36)。MATLAB 文件使用命令 V = G\I，取代 $\mathbf{V} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{I}$ 来计算节点电压，对线性方程的求解来说它的计算精度更高。

% 符号后面所跟的注释会被 MATLAB 忽略。为了表达得更清楚，我们用粗体来显示输入命令，其他的表示注释文字。(> >是 MATLAB 的命令提示符。)

```
>> clear  % 首先清除内存
>> % 然后， 输入方程式 2.36 的系数矩阵
>> % 系数矩阵的列与列之间用空格分隔， 行与行之间用分号分隔。
>> G = [0.45 -0.25 0; -0.25 0.85 -0.2; 0 -0.2 0.30]
G =
    0.4500   -0.2500         0
   -0.2500    0.8500   -0.2000
         0   -0.2000    0.3000
>> % 接下来， 输入方程式右边的列向量。
>> I = [-3.5; 3.5; 2]
I =
   -3.5000
    3.5000
    2.0000
>>  %MATLAB 文件推荐用V = G\I代替V = inv(G)*I来计算节点电压
>> V = G\I
V =
   -5.0000
    5.0000
   10.0000
```

因此得到：$v_1 = -5$ V，$v_2 = 5$ V，$v_3 = 10$ V，和习题 2. 8 用计算器求出的结果一样。

2.4.9 LabVIEW MathScript

作为求解数字电路方程的一种替代方法，你可以安装 LabVIEW(见附录 F)并使用它的 MathScript 功能。首先启动 LabVIEW，左键单击 **Blank VI**，弹出两个界面：一个图形块窗口，一个字面板窗口。左键单击任意一个窗口的菜单条，然后左键单击 MathScript Window…，将弹出一个可以输入类似 MATLAB 命令的窗口。此时，可以关闭图形块窗口和字面板窗口。在命令窗口输入命令，结果将显示在输出窗口。如果想看一下这个软件的替换效果，只需要复制前几页例题求解过程，在命令窗口输入以下命令：

```
clear
G = [0.45 -0.25 0; -0.25 0.85 -0.2; 0 -0.2 0.30]
I = [-3.5; 3.5; 2]
V = G\I
```

结果将在输出窗口显示。

例 2.8 节点电压分析。

求解图 2. 21 所示电路的节点电压，计算电流 i_x 的值。

解： 首先选择参考节点，设置节点电压，这些已经在图 2. 21 中标示，然后写出方程式。这里，我们写出每一个节点的电流方程。

$$\text{节点1:}\quad \frac{v_1}{10}+\frac{v_1-v_2}{5}+\frac{v_1-v_3}{20}=0$$

$$\text{节点2:}\quad \frac{v_2-v_1}{5}+\frac{v_2-v_3}{10}=10$$

$$\text{节点3:}\quad \frac{v_3}{5}+\frac{v_3-v_2}{10}+\frac{v_3-v_1}{20}=0$$

下一步，把方程式变成标准形式：

$$0.35v_1-0.2v_2-0.05v_3=0$$
$$-0.2v_1+0.3v_2-0.10v_3=10$$
$$-0.05v_1-0.10v_2+0.35v_3=0$$

方程式的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}0.35 & -0.2 & -0.05\\ -0.2 & 0.3 & -0.1\\ -0.05 & -0.1 & 0.35\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 10\\ 0\end{bmatrix}$$

或者 **GV** = **I**

其中，**G** 代表电导系数矩阵，**V** 是节点电压列向量，**I** 是方程式右边的电流列向量。

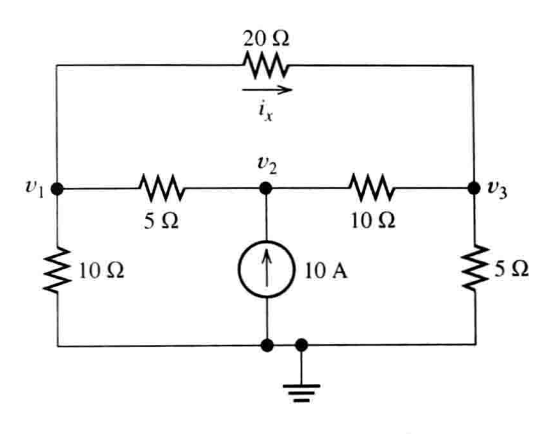


图2.21　例2.8的电路

在这里，因为电路只有电阻和独立电流源，我们可以根据快捷方法直接写出标准形式的矩阵方程。

MATLAB 程序为

```
>> clear
>> G = [0.35 -0.2 -0.05; -0.2 0.3 -0.1; -0.05 -0.1 0.35];
>> % 命令行最后加一个分号会隐藏运行结果显示。
>> % MATLAB response.
>> I = [0; 10; 0];
>> V = G\I
V =
   45.4545
   72.7273
   27.2727
>> % 最后计算电流。
>> Ix = (V(1) - V(3))/20
Ix =
    0.9091
```

另外，还可以在 LabVIEW MathScript 中输入相同命令以得到答案。

练习2.9　重复例2.8的电路分析，应用图2.22所示的参考节点和节点电压。a. 写出网络方程式；b. 把网络方程式改成标准形式。c. 求解 v_1、v_2、v_3（它们的值和例2.8中不同，因为在两个图中 v_1、v_2、v_3 不同）。d. 求 i_x（当然两个图中的 i_x 相同，因此它们的值相同）。

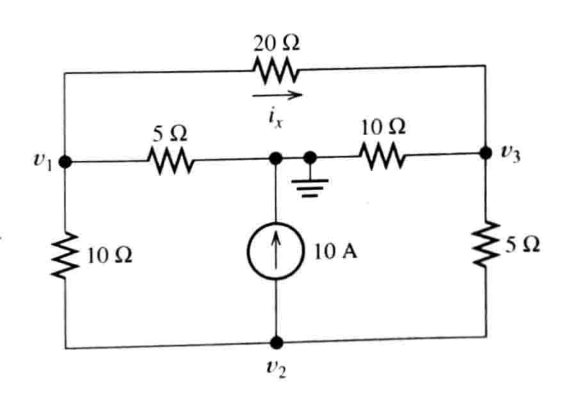


图2.22　例2.8的电路中选择不同的参考节点。见练习2.9

答案

a.
$$\frac{v_1-v_3}{20}+\frac{v_1}{5}+\frac{v_1-v_2}{10}=0$$
$$\frac{v_2-v_1}{10}+10+\frac{v_2-v_3}{5}=0$$
$$\frac{v_3-v_1}{20}+\frac{v_3}{10}+\frac{v_3-v_2}{5}=0$$

b.

$$0.35v_1 - 0.10v_2 - 0.05v_3 = 0$$
$$-0.10v_1 + 0.30v_2 - 0.20v_3 = -10$$
$$-0.05v_1 - 0.20v_2 + 0.35v_3 = 0$$

c.

$$v_1 = -27.27; v_2 = -72.73; v_3 = -45.45$$

d.

$$i_x = 0.909\ \mathrm{A}$$

2.4.10 含有电压源的电路

当电路含有电压源时，一般选择电源一端作为参考节点，这样可以减少一个未知节点电压的求解。

例 2.9 节点电压分析。

写出图 2.23 所示电路的网络方程式，并把它们变成标准形式。

解： 注意，我们选择了电压源的下端作为参考节点。因此，节点 3 的电压值为 10 V，我们不需要对该节点设置变量。

对节点 1 和节点 2 列写电流方程，得到：

$$\frac{v_1 - v_2}{5} + \frac{v_1 - 10}{2} = 1$$
$$\frac{v_2}{5} + \frac{v_2 - 10}{10} + \frac{v_2 - v_1}{5} = 0$$

现在把常数项放在方程式右边，得到：

$$0.7v_1 - 0.2v_2 = 6$$
$$-0.2v_1 + 0.5v_2 = 1$$

因此，我们得到了求解 v_1 和 v_2 方程式的标准形式。

图 2.23 例 2.9 的电路

练习 2.10 求解例 2.9 中的 v_1 和 v_2。

答案： $v_1 = 10.32\ \mathrm{V}; v_2 = 6.129\ \mathrm{V}$。

练习 2.11 求解图 2.24 中的 v_1 和 v_2。

答案： $v_1 = 6.77\ \mathrm{V}; v_2 = 4.19\ \mathrm{V}$。

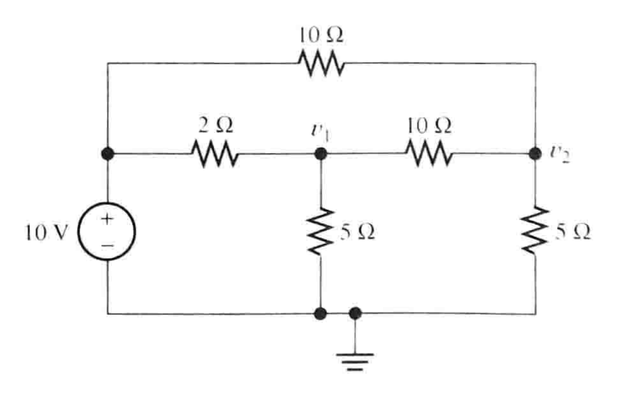


图 2.24 练习 2.11 的电路

有时候，我们前面提出列写节点电压方程的方式必须改变。例如，图 2.25 所示的网络和节点电压。我们注意到 $v_3 = -15\ \mathrm{V}$，因为节点 3 和参考节点之间是 15 V 的电源，因此需要列写两个有关未知变量 v_1 和 v_2 的方程。

如果试图写出节点 1 的电流方程，必须包含 10 V 电压源的电流项。我们可以设置一个未知电流变量，然而需要求解更高阶的方程。尤其如果是手工求解，则希望未知量越少越好。对这个电路，不可能根据任意节点的节点电压来写出电流方程(即使是参考节点)，因为电压源和每一个节点连接。

另一种列写电流方程的方法是组成广义节点，这可以通过画出包围几个节点的圆圈线实现。如图 2.25 所示，其中有两个广义节点，一个广义节点包含一个电压源。

我们可以把基尔霍夫电流定律表述为广义形式：流过任何闭合表面的净电流为 0。因此，可以对广义节点应用 KCL，对包含 10 V 的广义节点，其电流流出和流入之和为：

$$\frac{v_1}{R_2}+\frac{v_1-(-15)}{R_1}+\frac{v_2}{R_4}+\frac{v_2-(-15)}{R_3}=0 \tag{2.37}$$

等式左边每一项代表从节点流出的经过一个电阻的电流。因此，通过对广义节点内的10 V电压源进行封闭，我们在得到一个电流方程的同时不会产生一个新的未知量。

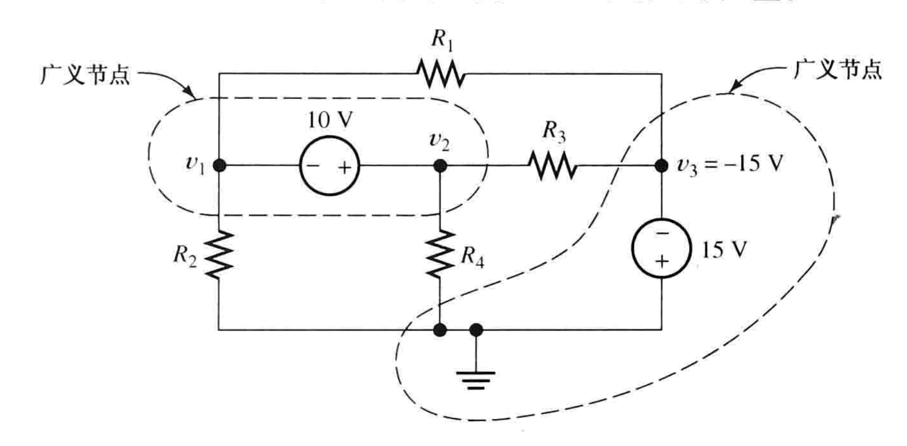


图2.25 通过短画线把几个节点和元件围起来形成广义节点

下一步，我们也许试图对其他广义节点列写电流方程。不管怎样，列写的方程个数应该等于设定的变量数。一般而言，所有节点的电流方程就等于独立方程的个数。节点1和节点2是第一个广义节点的一部分。同时，节点3和参考节点是第二个广义节点的一部分。因此，对两个广义节点列写方程，我们将用到网络的4个节点。

如果应用替换方法求解节点电压，有时所有节点电压变量将不会出现在方程中而无法求解。在MATLAB中，会出现警告提示矩阵**G**是奇异阵，换句话说，矩阵行列式等于0。如果出现这种情况，必须重新列写其他方程才能得到解。如果避免对所有节点列写电流方程，则可以防止这种现象发生。

还有一种办法是利用KVL可以得到一个需要的网络独立方程，v_1、10 V电压源和v_2组成一个闭合回路。例如，在图2.26中，用箭头标示v_1和v_2的极性，按照顺时针转一圈得到电压的代数和：

$$-v_1-10+v_2=0 \tag{2.38}$$

利用式(2.37)和式(2.38)可以求解v_1和v_2的独立方程组（假设电阻值已知）。

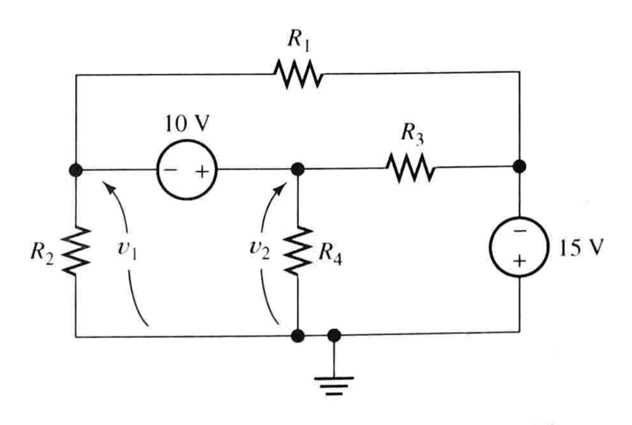


图2.26 节点电压v_1、v_2和10 V电压源组成一个闭合回路，可以应用KVL（与图2.25相同的电路）

练习2.12 写出图2.25所示电路包含15 V电压源的广义节点电流方程。证明所列方程式和式(2.37)相等。

练习2.13 写出图2.27所示电路节点电压的独立方程组。

答案： KVL：

$$-v_1+10+v_2=0$$

包含10 V电压源的广义节点KCL：

$$\frac{v_1}{R_1}+\frac{v_1-v_3}{R_2}+\frac{v_2-v_3}{R_3}=1$$

节点 3 的 KCL:

$$\frac{v_3 - v_1}{R_2} + \frac{v_3 - v_2}{R_3} + \frac{v_3}{R_4} = 0$$

参考节点的 KCL:

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_3}{R_4} = 1$$

为了方程组的独立性，方程组必须包括 KVL 方程，因此，3 个 KCL 方程中只能任选两个进入方程组。(3 个 KCL 使用了所有电路节点，因此不能形成独立方程组。)

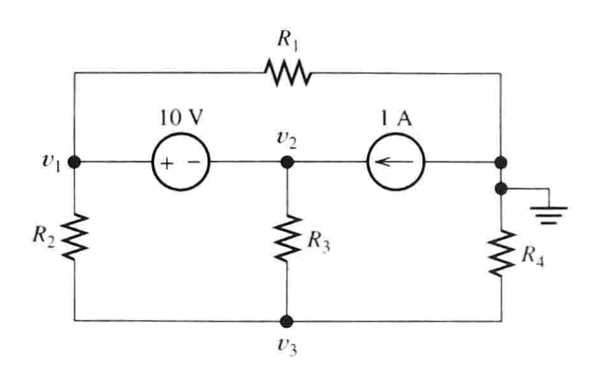


图 2.27 练习 2.13 的电路

2.4.11 含有受控源的电路

电路含有受控源时将给节点电压分析方法带来另外一些复杂性。(回想受控源的值取决于电路某一电流或者电压值)。在节点电压分析方法中，首先采用与独立电源一样的方法列写方程，然后根据节点电压变量列写控制变量的替代方程。下面举两个例子说明一下。

例 2.10 含受控源的节点电压分析。

写出图 2.28 所示电路的独立节点电压方程。

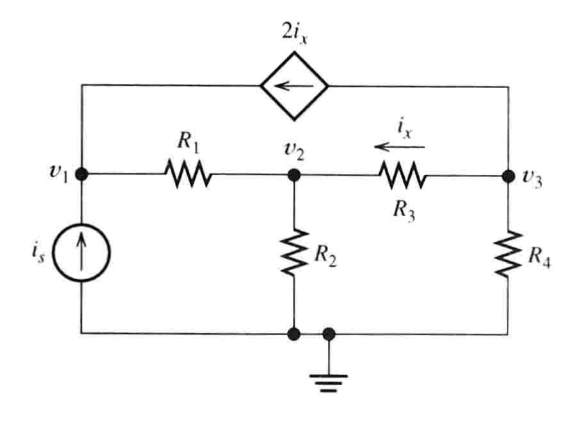


图 2.28 含电流控制电流源的电路，见例2.10

解: 首先，写出每个节点的 KCL 方程，包括受控电源的电流，把它看成一个普通电流源。

$$\frac{v_1 - v_2}{R_1} = i_s + 2i_x \tag{2.39}$$

$$\frac{v_2 - v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_2 - v_3}{R_3} = 0 \tag{2.40}$$

$$\frac{v_3 - v_2}{R_3} + \frac{v_3}{R_4} + 2i_x = 0 \tag{2.41}$$

接下来，根据节点电压写出控制电流 i_x 的表达式。注意 i_x 是节点 3 流经 R_3 的电流值。因此，可以写出:

$$i_x = \frac{v_3 - v_2}{R_3} \tag{2.42}$$

最后，将式(2.42)代入到式(2.39)~式(2.41)，得到需要的方程组:

$$\frac{v_1 - v_2}{R_1} = i_s + 2\frac{v_3 - v_2}{R_3} \tag{2.43}$$

$$\frac{v_2 - v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_2 - v_3}{R_3} = 0 \tag{2.44}$$

$$\frac{v_3 - v_2}{R_3} + \frac{v_3}{R_4} + 2\frac{v_3 - v_2}{R_3} = 0 \tag{2.45}$$

如果 i_s 的值已知，就可以根据上述方程组得到 v_1、v_2 和 v_3 的值。

例 2.11 含受控源的节点电压分析。

写出图 2.29 所示电路的独立节点电压方程。

解: 首先，忽略电压源是受控电源，写出像独立电源的节点电压方程。不能对节点 1 或节

点2列写方程式，因为它们是受控源连接的。得到KVL方程：

$$-v_1 + 0.5v_x + v_2 = 0 \qquad (2.46)$$

然后，写出包含受控电压源的广义节点KCL方程：

$$\frac{v_1}{R_2} + \frac{v_1 - v_3}{R_1} + \frac{v_2 - v_3}{R_3} = i_s$$

对节点3，有：

$$\frac{v_3}{R_4} + \frac{v_3 - v_2}{R_3} + \frac{v_3 - v_1}{R_1} = 0 \qquad (2.47)$$

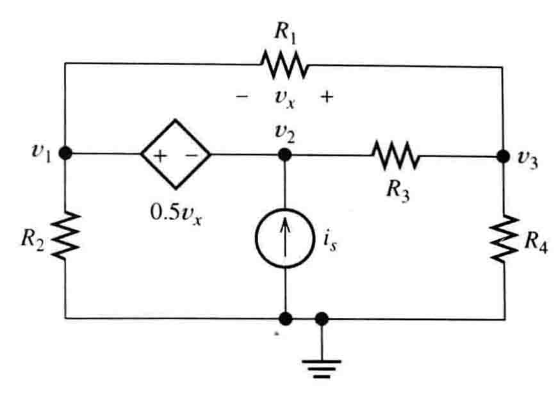


图2.29 含电压控制电压源的电路，见例2.11

对参考节点，有：

$$\frac{v_1}{R_2} + \frac{v_3}{R_4} = i_s \qquad (2.48)$$

当然，这些电流方程是非独立方程，因为我们用到了所有4个节点。我们必须应用式(2.46)和两个KCL方程组成独立方程组。但是，式(2.46)中含有控制变量v_x，因此必须根据节点电压消除该变量。

因此，下一步要根据节点电压写出控制变量v_x的方程。注意到v_1、v_x和v_3组成了封闭回路，按照顺时针方向写出KVL方程：

$$-v_1 - v_x + v_3 = 0$$

求解v_x得到：

$$v_x = v_3 - v_1$$

现在用新方程代入式(2.46)，得到：

$$v_1 = 0.5(v_3 - v_1) + v_2 \qquad (2.49)$$

式(2.49)和任意两个KCL方程组成独立方程组即可求出节点电压。

应用本节介绍的原则可以写出所有包含电源和电阻电路的节点方程。如果有计算机或计算器帮助求解方程，则可以计算任何电路中的电流、电压值。

下面总结一下节点电压分析方法的分析步骤：

1. 选择一个参考节点，设置未知节点电压变量。如果参考节点是独立电压源的一端，则电压源另一端的节点电压是已知的，因此可以减少计算量。
2. 写出电路方程式。首先，写出所有节点和广义节点的KCL方程，注意不能用到所有节点。如果不能得到求解节点电压足够的方程式，则应用KVL补充。
3. 如果电路含有受控源，根据节点电压求出控制变量的表达式，把它代入网络方程式，得到只有未知节点电压的方程。
4. 组成标准方程组，解出所有节点电压。
5. 根据节点电压值计算电路任意需要求解的电压和电流值。

练习2.14 应用节点电压分析方法求解图2.30所示电路标出的电流值。

答案：(a)$i_a = 1.33$ A；(b)$i_b = -0.259$ A。

练习2.15 应用节点电压分析方法求解图2.31所示电路中的i_x和i_y。

答案：(a)$i_x = 0.5$ A；(b)$i_y = 2.31$ A。

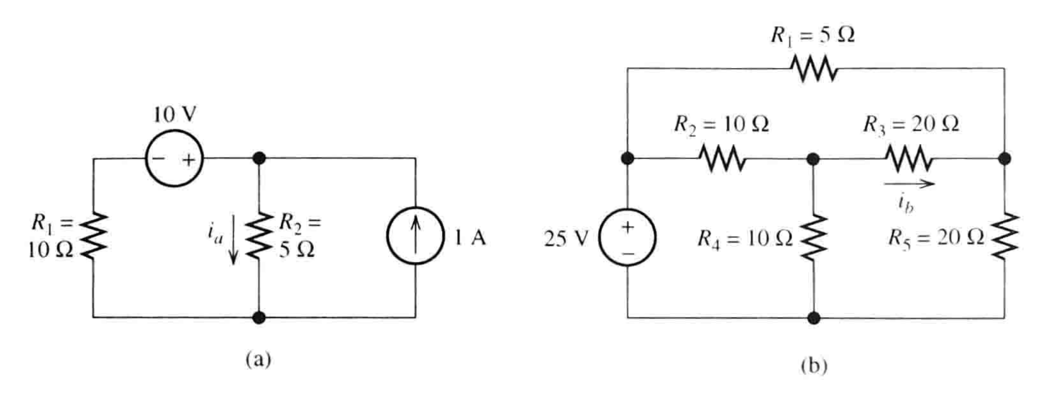


图 2.30　练习 2.14 的电路

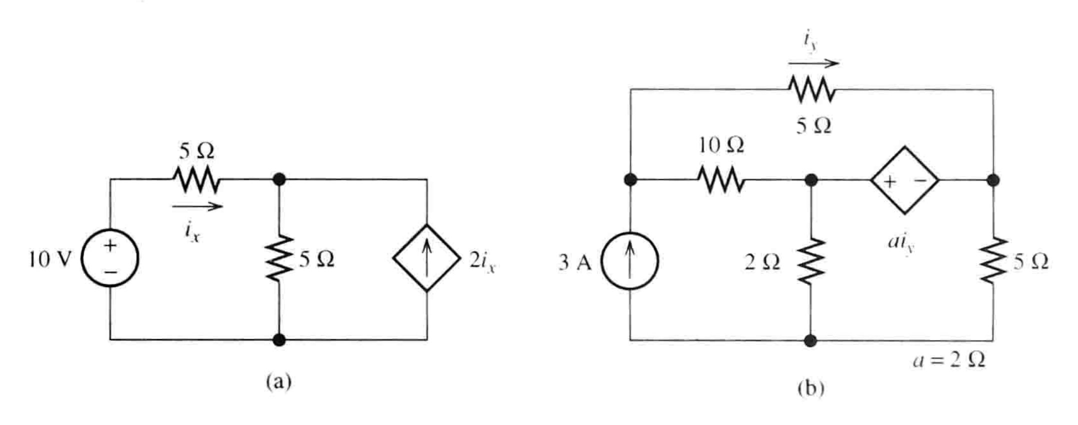


图 2.31　练习 2.15 的电路

2.4.12　应用 MATLAB 符号工具箱得到符号解

如果用到的 MATLAB 含有符号工具箱，则可以求解符号节点电压和其他方程。(LabVIEW MathScript 没有符号运算功能。)下面以例 2.10 为例说明方程求解办法。

```
>> clear
>> 首先清除内存空间， 再写出待求变量的方程式。
>> [V1, V2, V3] = solve('(V1 - V2)/R1 = Is + 2*(V3 - V2)/R3', ...
                  '(V2 - V1)/R1 + V2/R2 + (V2 - V3)/R3 = 0', ...
                  '(V3 - V2)/R3 + V3/R4 + 2*(V3 - V2)/R3 = 0',...
                  'V1','V2','V3')

V1 =
(Is*R1*R2 + Is*R1*R3 + 3*Is*R1*R4 + Is*R2*R3 + 3*Is*R2*R4)/(3*R2 + R3 +
3*R4)
V2 =
(Is*R2*R3 + 3*Is*R2*R4)/(3*R2 + R3 + 3*R4)
V3 =
(3*Is*R2*R4)/(3*R2 + R3 + 3*R4)
>> % 程序运行得到了答案， 但是读起来有些困难。可以应用简化指令得到更好
>> % 懂的表达式。
>> pretty(V1), pretty(V2), pretty(V3)
  Is R1 R2 + Is R1 R3 + 3 Is R1 R4 + Is R2 R3 + 3 Is R2 R4
  ---------------------------------------------------------
                       3 R2 + R3 + 3 R4

  Is R2 R3 + 3 Is R2 R4
  ---------------------
     3 R2 + R3 + 3 R4

     3 Is R2 R4
  ----------------
  3 R2 + R3 + 3 R4
```

(这里我们采用 MATLAB R2008b 版软件求出的结果，其他版本的结果应该大同小异。)更标准的数学表达式为：

$$v_1=\frac{i_sR_1R_2+i_sR_1R_3+3i_sR_1R_4+i_sR_2R_3+3i_sR_2R_4}{3R_2+R_3+3R_4}$$
$$v_2=\frac{i_sR_2R_3+3i_sR_2R_4}{3R_2+R_3+3R_4}$$
$$v_3=\frac{3i_sR_2R_4}{3R_2+R_3+3R_4}$$

2.4.13 检验答案

与往常一样，对答案进行检验是必要的。首先，确保答案的单位是合适的，本例中是伏特(V)。如果单位检查有问题，就看方程式中的数值是否有单位。在图 2.28 所示电路中，电路方程式中唯一的数值是受控电流源的增益，它没有单位。

另外，该电路中因为 $R_3=0$，因此 $v_2=v_3$，对结果进行检验是成立的。另一种检验是看 v_3是否为0，因为 $R_4=0$。还有一种检验是假设 R_3趋于无穷大，看 i_x是否为 0(此时受控电流源开路)，同时 $v_3=0$，$v_1=i_s(R_1+R_2)$，$v_2=i_sR_2$。还可以进行更多类似的检验。这类检验并不能确保结果正确，但是可以发现很多错误。

练习 2.16 用 MATLAB 符号运算功能求解式(2.47)、式(2.48)和式(2.49)，得到节点电压符号形式解。

答案：

$$v_1=\frac{2i_sR_1R_2R_3+3i_sR_1R_2R_4+2i_sR_2R_3R_4}{3R_1R_2+2R_1R_3+3R_1R_4+2R_2R_3+2R_3R_4}$$
$$v_2=\frac{3i_sR_1R_2R_3+3i_sR_1R_2R_4+2i_sR_2R_3R_4}{3R_1R_2+2R_1R_3+3R_1R_4+2R_2R_3+2R_3R_4}$$
$$v_3=\frac{3i_sR_1R_2R_4+2i_sR_2R_3R_4}{3R_1R_2+2R_1R_3+3R_1R_4+2R_2R_3+2R_3R_4}$$

不同的 MATLAB 版本和符号工具箱得到的答案也许有所差别，但它们应该是代数相等的。

2.5 网孔电流分析法

本节将学习用另一种方法(即网孔电流法)分析电路。如果电网络可以画在一个平面中，没有一个元件或电阻穿过其他元件，则称为平面网络。另一方面，如果一个元件或电阻穿过其他元件，则称为非平面网络。本节只讨论平面网络。

我们从图 2.32(a)所示的平面网络开始分析。假设电源电压和电阻值是已知的，求解电流值。首先，可以写出图 2.32(a)所示电路的支路电流方程，因为每一个支路电流已经标示出来了，我们最终会发现应用网孔电流法求解更简单。

要求解图 2.32(a)所示电路的 3 个支路电流需要列写 3 个独立方程。一般来说，独立的 KVL 方程数量等于网孔回路数。例如，图 2.32(a)所示电路中有两个网孔回路，一个是由 v_A、R_1和 R_3组成，另一个由 R_3、R_2和 v_B组成，因此该电路中只能列写两个独立 KVL 方程，我们必须应用 KCL 得到第三个方程式。

对 v_A、R_1和 R_3组成的回路应用 KVL，得到：

$$R_1i_1+R_3i_3=v_A \tag{2.50}$$

同样，对 R_3、R_2和 v_B组成的回路应用 KVL，得到：

$$-R_3i_3 + R_2i_2 = -v_B \tag{2.51}$$

对电阻 R_3上端的节点应用 KCL，得到：

$$i_1 = i_2 + i_3 \tag{2.52}$$

接下来，把式(2.52)求出的 i_3代入式(2.50)和式(2.51)，得到：

$$R_1i_1 + R_3(i_1 - i_2) = v_A \tag{2.53}$$

$$-R_3(i_1 - i_2) + R_2i_2 = -v_B \tag{2.54}$$

这样，就可以应用 KCL 方程把 KVL 方程改造成两个方程式对应两个未知量，方程可解。

现在，来分析图 2.32(b)所示电路的网孔电流 i_1和 i_2。如图所示，网孔电流被认为是流过封闭回路的电流，它们满足 KCL 定律，当多个网孔电流流过某一个元件时，该元件的电流可以看成是网孔电流的代数和。因此，假设参考方向向下时，电阻 R_3的电流为$(i_1 - i_2)$，$v_3 = R_3(i_1 - i_2)$。现在对跟随 i_1围绕回路一圈应用 KVL 可以直接得到式(2.53)；同样，跟随 i_2围绕回路一圈可以得到式(2.54)。

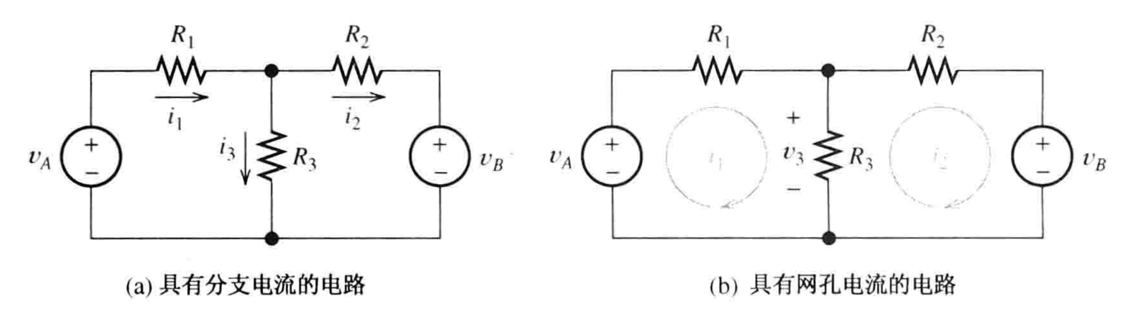


图 2.32 阐述网孔电流分析方法的电路

因为网孔电流自动满足 KCL，在列写和求解方程时可以省去一些工作量，图 2.32 所示电路相对比较简单，网孔电流法的优势表现得并不明显。电路越复杂，其优势越明显。

2.5.1 选择网孔电流

对平面电路，我们可以选择电路图中所有网孔回路的电流变量，通常其方向为顺时针方向。

图 2.33 显示了两个电路以及合适的网孔电流选项。当电路没有交叉元件时，它像一个窗户，每一个网孔区域代表一面玻璃。

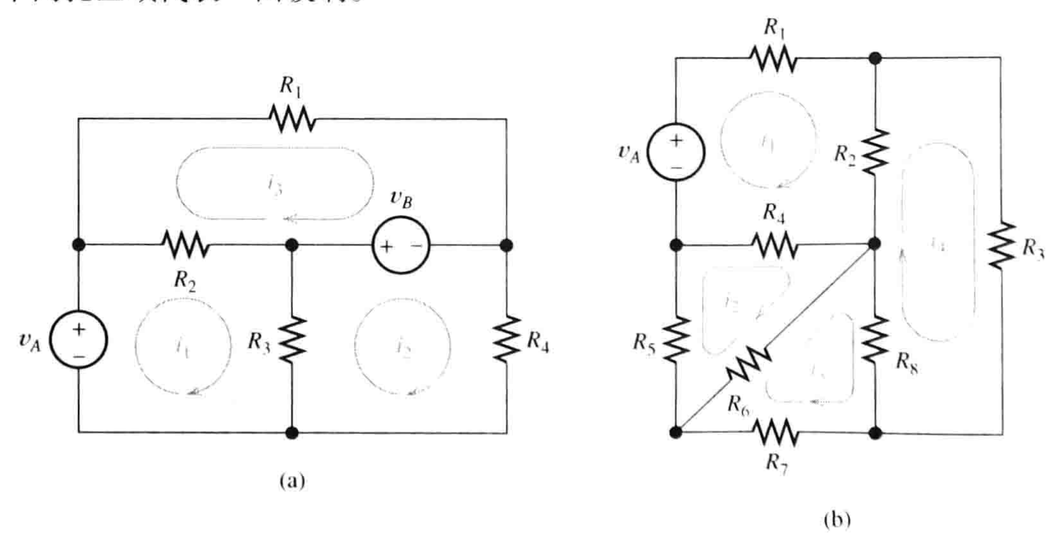


图 2.33 两个电路及其网孔电流变量

记住，如果两个网孔电流流过一个电路元件，则该元件电流是网孔电流的代数和。例如，图2.32(a)所示电阻R_2方向向左的电流等于(i_3-i_1)，电阻R_3方向向上的电流等于(i_2-i_1)。

练习2.17 分析图2.33(b)所示电路，应用网孔电流法求解：(a)电阻R_2方向向上的电流；(b)电阻R_4方向向右的电流；(c)电阻R_8方向向下的电流；(d)电阻R_8方向向上的电流。

答案：(a)i_4-i_1；(b)i_2-i_1；(c)i_3-i_4；(d)i_4-i_3。(注意，答案d是答案c的负数。)

2.5.2 列写求解网孔电流的方程

如果电路中只有独立电压源和电阻元件，则可以根据KVL写出网孔电流方程式。(我们不需要应用KCL，因为流入、流出一个节点的网孔电流相等。)

例2.12 网孔电流分析。

写出求解图2.33(a)所示电路网孔电流所需的方程式。

解：为减少错误，在分析网孔电流时一般这样约定：网孔电流方向是顺时针的。每一个网孔顺时针巡行一圈写出KVL方程。与往常一样，如果巡行时先经过正极则电压符号为正，否则先经过负极则电压符号为负。一般规定电阻第一端为电压正极，因此电阻电压的符号为正。

例如，对图2.33(a)所示的网孔1，首先从电阻R_2左端开始巡行，电阻R_2电压正极在左端，其电压值为$R_2(i_1-i_3)$。类似地，电阻R_3先到上端，其电压值为$R_3(i_1-i_2)$。根据这种约定，可以把每一个电阻电压(电阻乘以当前网孔电流减去相邻网孔电流)加入到KVL方程。对图2.33(a)所示网孔1，有：

$$R_2(i_1-i_3)+R_3(i_1-i_2)-v_A=0$$

类似地，对图2.33(a)所示网孔2，有：

$$R_3(i_2-i_1)+R_4i_2+v_B=0$$

对图2.33(a)所示网孔3，有：

$$R_2(i_3-i_1)+R_1i_3-v_B=0$$

注意，在网孔1中电阻R_3电压正极在上端，网孔2中电阻R_3电压正极在下端。这样没有错，因为在两个方程式中电压符号是相反的。

把方程式写成标准形式，得到：

$$\begin{aligned}(R_2+R_3)i_1-R_3i_2-R_2i_3&=v_A\\ -R_3i_1+(R_3+R_4)i_2&=-v_B\\ -R_2i_1+(R_1+R_2)i_3&=v_B\end{aligned}$$

写成矩阵形式，得到：

$$\begin{bmatrix}(R_2+R_3) & -R_3 & -R_2\\ -R_3 & (R_3+R_4) & 0\\ -R_2 & 0 & (R_1+R_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_A\\ -v_B\\ v_B\end{bmatrix}$$

通常我们用$\mathbf{R}$代表矩阵系数阵，$\mathbf{I}$代表网孔电流列向量，$\mathbf{V}$代表标准方程式右边的列向量，这样上述网孔电流方程可以表示为

$$\mathbf{RI}=\mathbf{V}$$

我们把$\mathbf{R}$中第i行、第j列的元素标注为：r_{ij}。

练习2.18 写出图2.32(b)所示电路的网孔电流方程式，并把它转化为矩阵形式。

答案：依次列写每一个网孔电流方程，得到：

$$R_1i_1 + R_2(i_1 - i_4) + R_4(i_1 - i_2) - v_A = 0$$
$$R_5i_2 + R_4(i_2 - i_1) + R_6(i_2 - i_3) = 0$$
$$R_7i_3 + R_6(i_3 - i_2) + R_8(i_3 - i_4) = 0$$
$$R_3i_4 + R_2(i_4 - i_1) + R_8(i_4 - i_3) = 0$$

$$\begin{bmatrix} (R_1+R_2+R_4) & -R_4 & 0 & -R_2 \\ -R_4 & (R_4+R_5+R_6) & -R_6 & 0 \\ 0 & -R_6 & (R_6+R_7+R_8) & -R_8 \\ -R_2 & 0 & -R_8 & (R_2+R_3+R_8) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

2.5.3　求解网孔电流方程

写出网孔电流方程以后，不能采用2.4节介绍的方法求解。我们用一个简单的例子加以说明。

例2.13　网孔电流分析。

求解图2.34所示电路每个元件的电流。

解：首先根据标准约定，定义每一个网孔电流方向为顺时针。对网孔1写出KVL方程：

$$20(i_1 - i_3) + 10(i_1 - i_2) - 70 = 0 \quad (2.56)$$

对网孔2和网孔3，有：

$$10(i_2 - i_1) + 12(i_2 - i_3) + 42 = 0 \quad (2.57)$$

$$20(i_3 - i_1) + 14i_3 + 12(i_3 - i_2) = 0 \quad (2.58)$$

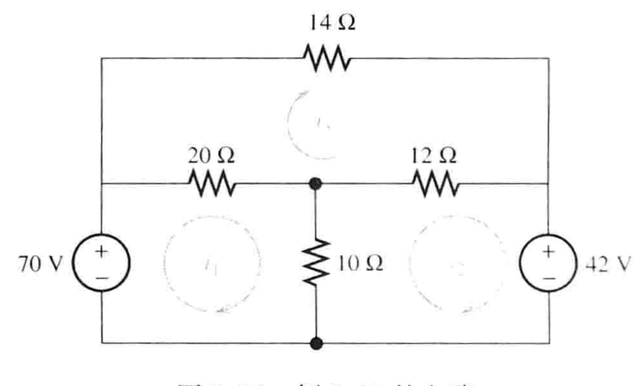


图2.34　例2.13的电路

变为标准形式，有：

$$30i_1 - 10i_2 - 20i_3 = 70 \quad (2.59)$$

$$-10i_1 + 22i_2 - 12i_3 = -42 \quad (2.60)$$

$$-20i_1 - 12i_2 + 46i_3 = 0 \quad (2.61)$$

写成矩阵形式，得到：

$$\begin{bmatrix} 30 & -10 & -20 \\ -10 & 22 & -12 \\ -20 & -12 & 46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ -42 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这些方程式可以通过多种方法求解。我们演示用MATLAB来求解。(在LabVIEW MathScript中输入相同命令可以得到相同的结果。)我们用**R**表示系数阵，因为系数通常是电阻值。类似地，用**V**表示方程式右边的列向量，**I**表示网孔电流列向量，命令和结果如下：

```
>> R = [30 -10 -20; -10 22 -12; -20 -12 46];
>> V = [70; -42; 0];
>> I = R\V % 尽量避免采用变量i， 因为它代表虚数单位，是-1的平方根。
>> % -1 in MATLAB.
I =
    4.0000
    1.0000
    2.0000
```

因此，我们求得网孔电流值：$i_1 = 4$ A，$i_2 = 1$ A，$i_3 = 2$ A。接下来，可以求出每一个元件的电流值，例如10 Ω电阻方向向下的电流为 $i_1 - i_2 = 3$ A。

练习2.19　应用网孔电流求解图2.35所示电路中10 Ω电阻的电流。根据电阻串并联方法检验得到的答案，再用节点电压来检验答案。

答案：10 Ω 电阻的电流值为 5 A。

练习 2.20 应用网孔电流求解图 2.24 所示电路中 2 Ω 电阻的电流。

答案：2 Ω 电阻的电流值为 1.613 A，方向朝右。

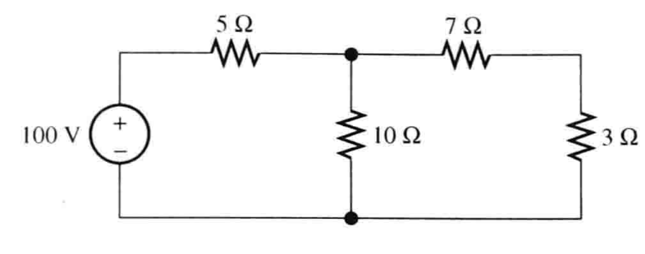


图 2.35 练习 2.19 的电路

2.5.4 直接写出网孔电流方程的矩阵形式

如果电路中只有电阻和独立电压源，选择网孔电流方向为顺时针，可以根据以下步骤直接得到网孔电流方程的矩阵形式：

1. 确认电路中只有电阻和独立电压源，选择所有网孔电流方向为顺时针。
2. 矩阵 **R** 的对角线元素为对应网孔的电阻之和。换句话说，r_{jj}代表第 j 个网孔中所有电阻的和。
3. 矩阵 **R** 的非对角线元素为相应网孔之间所有公共电阻的负数，因此 $i \neq j$，r_{ij}和 r_{ji}相等，等于网孔 i 和网孔 j 的所有公共电阻和的负数。
4. 设置矩阵 **V** 的元素。按照对应网孔顺时针方向巡行一圈，如果电压源方向与巡行方向一致，则电压取负号；如果电压源方向与巡行方向相反，则电压取正号。（我们把列写 KVL 方程时电压的正负号颠倒过来，因为矩阵 **V** 是在方程式的右边，和 KVL 相反。）

注意，上述方法不适用含有电流源的受控电源的电路。

例 2.14 直接写出网孔电流方程的矩阵形式。

直接写出图 2.36 所示电路网孔电流方程的矩阵形式。

解：矩阵方程为：

$$\begin{bmatrix} (R_2+R_4+R_5) & -R_2 & -R_5 \\ -R_2 & (R_1+R_2+R_3) & -R_3 \\ -R_5 & -R_3 & (R_3+R_5+R_6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_A+v_B \\ v_A \\ -v_B \end{bmatrix}$$

其中，网孔 1 包括电阻 R_2、R_4、R_5，因此 r_{11}的值为 3 个电阻的和。类似地，网孔 2 包括电阻 R_1、R_2、R_3，因此 r_{22}的值也为这 3 个电阻的和。因为电阻 R_2是网孔 1 和网孔 2 的公共电阻，因此 $r_{12}=r_{21}=-R_2$，类似可以得到矩阵 **R** 的所有元素值。

当围绕网孔 1 顺时针巡行时，电压源 v_A的电压方向与巡行方向相同，电压源 v_B的电压方向与巡行方向相反，因此 $v_1=-v_A+v_B$，以此类推得到矩阵 **V** 的其他元素值。

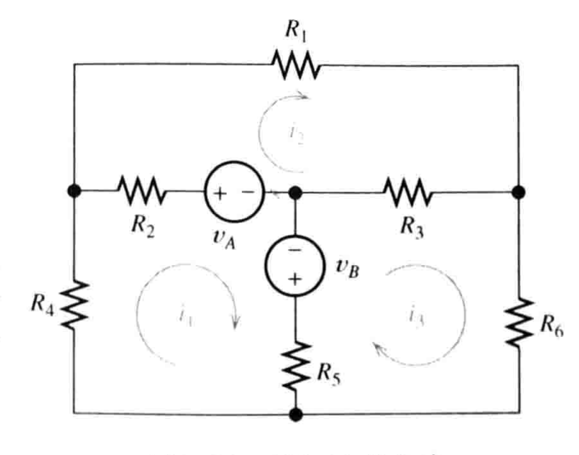


图 2.36 例 2.14 的电路

练习 2.21 直接写出图 2.33(a)所示电路网孔电流方程的矩阵形式。

答案:

$$\begin{bmatrix} (R_2+R_3) & -R_3 & -R_2 \\ -R_3 & (R_3+R_4) & 0 \\ -R_2 & 0 & (R_1+R_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_A \\ -v_B \\ v_B \end{bmatrix}$$

2.5.5 含有电流源电路的网孔电流方程

回顾前面的介绍，电流源两端的电流值是常数，而其两端的电压值是不定的。电流源两端的电压取决于其连接的电路。一般来说，不容易写出电流源两端电压的表达式。初学者常见的通病是把电流源的端电压看成0。

当电路中含有一个电流源时，我们不能使用前面仅有电压源和电阻的电路的分析方法。先来看一下图2.37所示的电路。与前面一样，首先定义网孔电流的方向为顺时针。如果试图写出网孔1的KVL方程，则必须包含一个电流源电压的未知量。如果不希望增加方程的未知量，就应该避免列写包含电流源网孔的KVL方程。在图2.37中，我们已经定义了电流源的电流为 i_1，其值为2 A，因此可以写出:

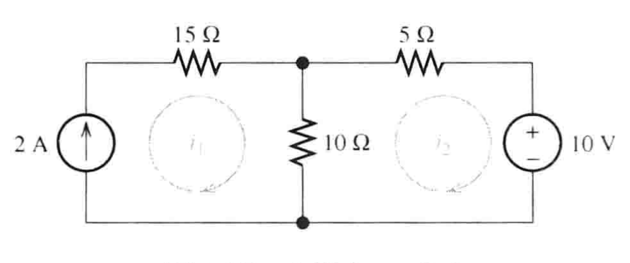


图2.37 电路中 $i_1=2$ A

$$i_1 = 2\text{ A} \tag{2.62}$$

对网孔2应用KVL得到第二个方程式:

$$10(i_2-i_1)+5i_2+10=0 \tag{2.63}$$

根据式(2.62)和式(2.63)可以很容易求出 i_2。可以看出，这种情况下，电流源可以简化求解过程。

下面分析一下图2.38所示的更复杂电路的情况。与前面一样，网孔电流方向为顺时针。因为网孔1中5 A电流源的电压未知，因此不能列写其KVL方程(我们不想增加方程式的未知数)。一种解决办法是把网孔1和网孔2合并为一个广义网孔。换句话说，我们围绕网孔1和网孔2的外围巡行一圈，得到KVL方程:

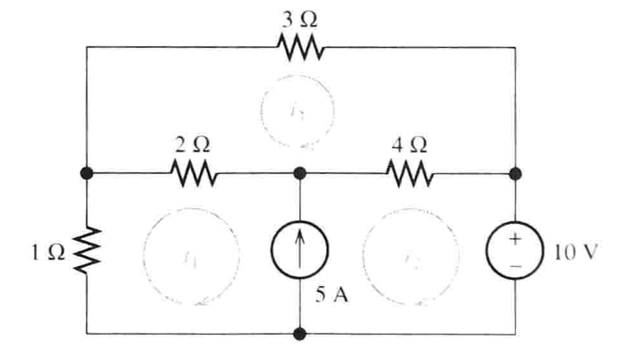


图2.38 两个网孔含有一个公共电流源的电路

$$i_1+2(i_1-i_3)+4(i_2-i_3)+10=0 \tag{2.64}$$

接下来，对网孔2列写KVL方程:

$$3i_3+4(i_3-i_2)+2(i_3-i_1)=0 \tag{2.65}$$

最后，我们意识到电流源方向朝上的电流等于 i_2-i_1，因为电流源朝上的电流值已知为5 A，因此有:

$$i_2-i_1=5 \tag{2.66}$$

很显然，式(2.66)不是一个KCL方程，它只是表明我们定义电流源朝上的电流值为 i_2-i_1，而其值为5 A，式(2.64)、式(2.65)、式(2.66)联立可以求解网孔电流。

练习2.22 直接写出图2.39所示电路求解网孔电流的方程式。

答案:

$$i_1 = -5\text{ A}$$

$$10(i_2-i_1)+5i_2-100=0$$

习题2.23 直接写出图2.40所示电路求解网孔电流的方程式，并求解电流值。

答案： 方程式是 $i_2 - i_1 = 1$ 和 $5i_1 + 10i_2 + 20 - 10 = 0$。电流值 $i_1 = -4/3$ A，$i_1 = -1/3$ A。

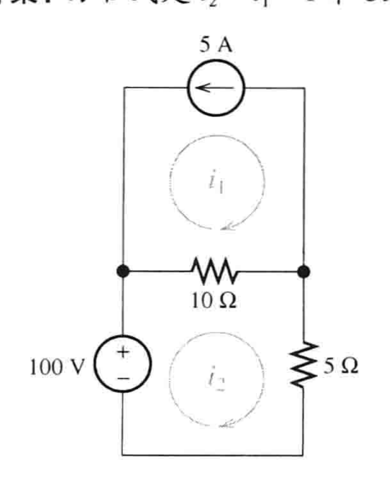




图2.39 练习2.22的电路

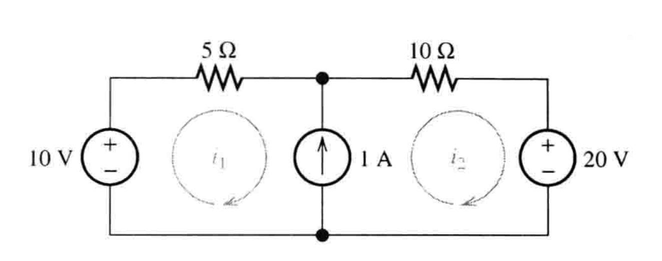


图2.40 练习2.23的电路

2.5.6 含有受控源的电路

受控源会给网孔电流法带来附加的复杂性。首先，像独立电源电路一样列写方程式。然后，根据网孔电流变量写出控制变量的表达式，代入电路方程。下面举一个例子来说明。

例题2.15 含受控源电路的网孔电流分析。

图2.41(a)所示电路中两网孔之间有一个公共的受控电流源，求解电流值。

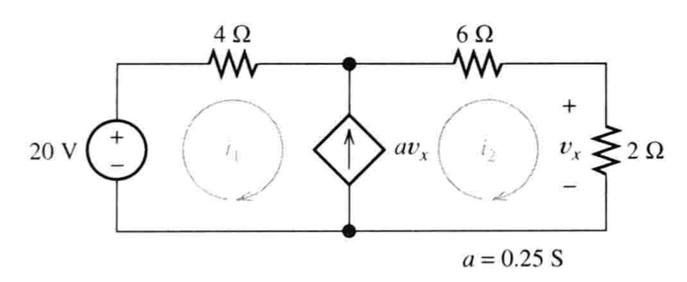


图2.41 含电压控制电流源的电路，见例2.15

解： 首先按照独立电源电路的方法写出网孔电流方程。因为网孔1和2之间有一个公共的受控电流源，把它们合并为一个广义网孔，写出电压方程式：

$$-20 + 4i_1 + 6i_2 + 2i_2 = 0 \tag{2.67}$$

然后，根据网孔电流写出受控源电流的表达式：

$$av_x = 0.25v_x = i_2 - i_1 \tag{2.68}$$

接下来，可以看出控制电压为：

$$v_x = 2i_2 \tag{2.69}$$

应用式(2.69)替换式(2.68)的 v_x，得到：

$$\frac{i_2}{2} = i_2 - i_1 \tag{2.70}$$

最后，把式(2.67)和式(2.70)转化为标准形式，有：

$$4i_1 + 8i_2 = 20 \tag{2.71}$$

$$i_1 - \frac{i_2}{2} = 0 \tag{2.72}$$

求解方程式得到 $i_1 = 1$ A，$i_2 = 2$ A。

根据本节讨论的方法，可以写出所有含有电源和电阻元件的平面网络的网孔电流方程。

下面总结一下网孔电流分析方法的步骤：

1. 如果有必要，重新画出不含交叉导线或元件的电路图。标示网孔电流，一般设置其方向为顺时针，但方向也不是必须为顺时针。
2. 写出电路方程，方程式个数等于网孔电流数量。首先，根据 KVL 列写不含电流源网孔的方程式。其次，如果含有电流源，根据网孔电流写出其电流表达式。最后，如果某一电流源是两个网孔的公共元件，写出合并两个网孔的广义网孔 KVL 方程。
3. 如果电路含有受控源，根据网孔电流写出控制变量的表达式，代入电路方程，得到只有网孔电流作为未知量的方程式。
4. 把方程式转化为标准形式，应用行列式或其他方法求解网孔电流。
5. 根据求出的网孔电流计算电路中其他的电压电流值。

习题 2.24 应用网孔电流法求解图 2.30 所示电路标注的电流值。

答案： (a) $i_a = 1.33$ A；(b) $i_b = -0.259$ A。

习题 2.25 应用网孔电流法求解图 2.31 所示电路中的电流 i_x 和 i_y。

答案： $i_x = 0.5$ A，$i_y = 2.31$ A。

2.6 戴维南和诺顿等效电路

本章将学习怎么用简单的等效电路代替仅包含电阻和电源的二端口网络。二端口网络是指只有两个端点可与其他电路相连接的部分电路。原电路可以是任何复杂形式的多电源和多电阻的连接，条件是受控源的控制变量必须在原电路内。

2.6.1 戴维南等效电路

等效电路的一种形式是戴维南等效电路，是由一个独立的电压源和一个电阻串联组成的，如图 2.42 所示。

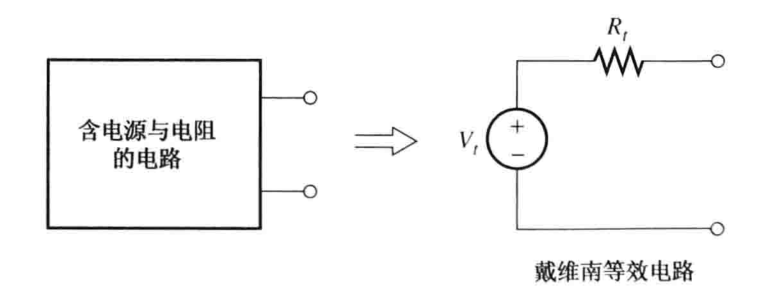


图 2.42 含多个电源和电阻的二端口网络可以用戴维南等效电路来代替

有开路端点的戴维南等效电路如图 2.43 所示，根据定义，没有电流流过开路电路，所以没有电流流过这个戴维南等效电路，电阻电压为 0。应用 KVL 定理，可得：

$$V_t = v_{oc}$$

原电路和等效电路要求有相同的开路电压，所以戴维南电源电压与原电路的开路电压相等。

接下来，假设将戴维南等效电路的两端用导线短接，如图 2.44 所示，则流过电路的电流为：

$$i_{sc} = \frac{V_t}{R_t}$$

短路电流 i_{sc} 既是原电路的电流，也是戴维南等效电路的电流。最后，求等效电阻：

$$R_t = \frac{V_t}{i_{sc}} \tag{2.73}$$

因为戴维南电压与原开路电压相等，即：

$$R_t = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} \tag{2.74}$$

可见，要获得戴维南等效电路，可以首先分析原电路的开路电压和短路电流。戴维南电压等于开路电压，戴维南电阻则可根据式(2.74)来计算。

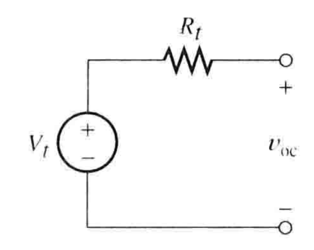


图 2.43　含开路端的戴维南等效电路，开路电压 v_{oc} 等于戴维南电压

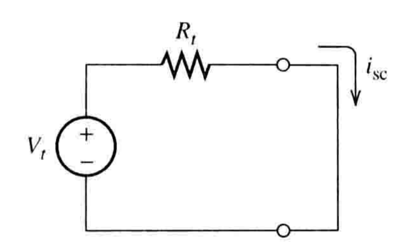


图 2.44　二端口短路的戴维南等效电路，短路电流 $i_{sc} = V_t/R_t$

例 2.16　求解戴维南等效电路。

计算图 2.45(a)所示的戴维南等效电路。

解：首先，分析这个部分开路的电路，如图 2.45(b)所示。电阻 R_1 和电阻 R_2 串联，总等效电阻为 $R_1 + R_2$。所以，流过电路的电流为

$$i_1 = \frac{v_S}{R_1 + R_2} = \frac{15}{100 + 50} = 0.10\ \text{A}$$

开路电压就是 R_2 的电压：

$$v_{OC} = R_2 i_1 = 50 \times 0.10 = 5\ \text{V}$$

所以，戴维南电压是 $V_t = 5$ V。

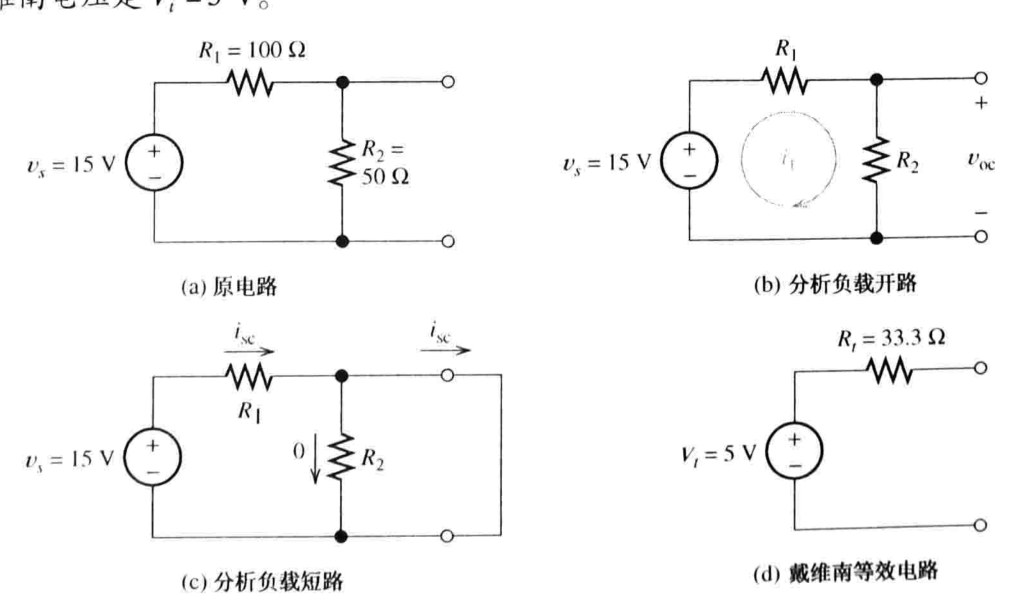


图 2.45　例 2.16 的电路

根据本节讨论的方法，可以写出所有含有电源和电阻元件的平面网络的网孔电流方程。

下面总结一下网孔电流分析方法的步骤：

1. 如果有必要，重新画出不含交叉导线或元件的电路图。标示网孔电流，一般设置其方向为顺时针，但方向也不是必须为顺时针。
2. 写出电路方程，方程式个数等于网孔电流数量。首先，根据 KVL 列写不含电流源网孔的方程式。其次，如果含有电流源，根据网孔电流写出其电流表达式。最后，如果某一电流源是两个网孔的公共元件，写出合并两个网孔的广义网孔 KVL 方程。
3. 如果电路含有受控源，根据网孔电流写出控制变量的表达式，代入电路方程，得到只有网孔电流作为未知量的方程式。
4. 把方程式转化为标准形式，应用行列式或其他方法求解网孔电流。
5. 根据求出的网孔电流计算电路中其他的电压电流值。

习题 2.24 应用网孔电流法求解图 2.30 所示电路标注的电流值。

答案： (a)$i_a = 1.33$ A；(b)$i_b = -0.259$ A。

习题 2.25 应用网孔电流法求解图 2.31 所示电路中的电流 i_x和 i_y。

答案： $i_x = 0.5$ A，$i_y = 2.31$ A。

2.6 戴维南和诺顿等效电路

本章将学习怎么用简单的等效电路代替仅包含电阻和电源的二端口网络。二端口网络是指只有两个端点可与其他电路相连接的部分电路。原电路可以是任何复杂形式的多电源和多电阻的连接，条件是受控源的控制变量必须在原电路内。

2.6.1 戴维南等效电路

等效电路的一种形式是戴维南等效电路，是由一个独立的电压源和一个电阻串联组成的，如图 2.42 所示。

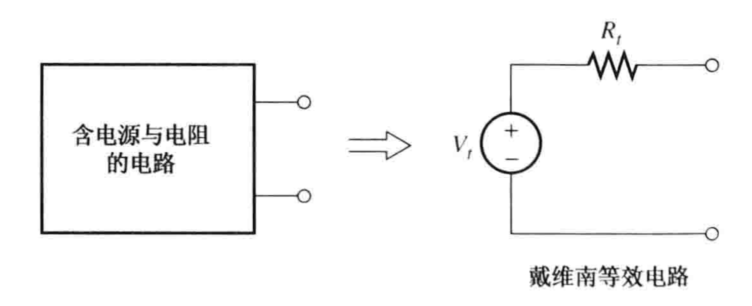


图 2.42 含多个电源和电阻的二端口网络可以用戴维南等效电路来代替

有开路端点的戴维南等效电路如图 2.43 所示，根据定义，没有电流流过开路电路，所以没有电流流过这个戴维南等效电路，电阻电压为 0。应用 KVL 定理，可得：

$$V_t = v_{oc}$$

原电路和等效电路要求有相同的开路电压，所以戴维南电源电压与原电路的开路电压相等。

接下来，假设将戴维南等效电路的两端用导线短接，如图 2.44 所示，则流过电路的电流为：

$$i_{sc} = \frac{V_t}{R_t}$$

短路电流 i_{sc}既是原电路的电流，也是戴维南等效电路的电流。最后，求等效电阻：

$$R_t = \frac{V_t}{i_{sc}} \tag{2.73}$$

因为戴维南电压与原开路电压相等，即：

$$R_t = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} \tag{2.74}$$

可见，要获得戴维南等效电路，可以首先分析原电路的开路电压和短路电流。戴维南电压等于开路电压，戴维南电阻则可根据式(2.74)来计算。

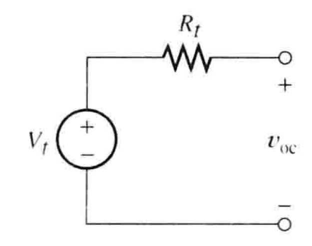


图 2.43　含开路端的戴维南等效电路，开路电压v_{oc}等于戴维南电压

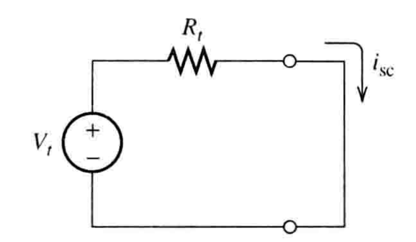


图 2.44　二端口短路的戴维南等效电路，短路电流$i_{sc} = V_t/R_t$

例 2.16　求解戴维南等效电路。

计算图 2.45(a)所示的戴维南等效电路。

解：首先，分析这个部分开路的电路，如图 2.45(b)所示。电阻 R_1 和电阻 R_2 串联，总等效电阻为 $R_1 + R_2$。所以，流过电路的电流为

$$i_1 = \frac{v_S}{R_1 + R_2} = \frac{15}{100 + 50} = 0.10\ \text{A}$$

开路电压就是 R_2 的电压：

$$v_{OC} = R_2 i_1 = 50 \times 0.10 = 5\ \text{V}$$

所以，戴维南电压是 $V_t = 5\ \text{V}$。

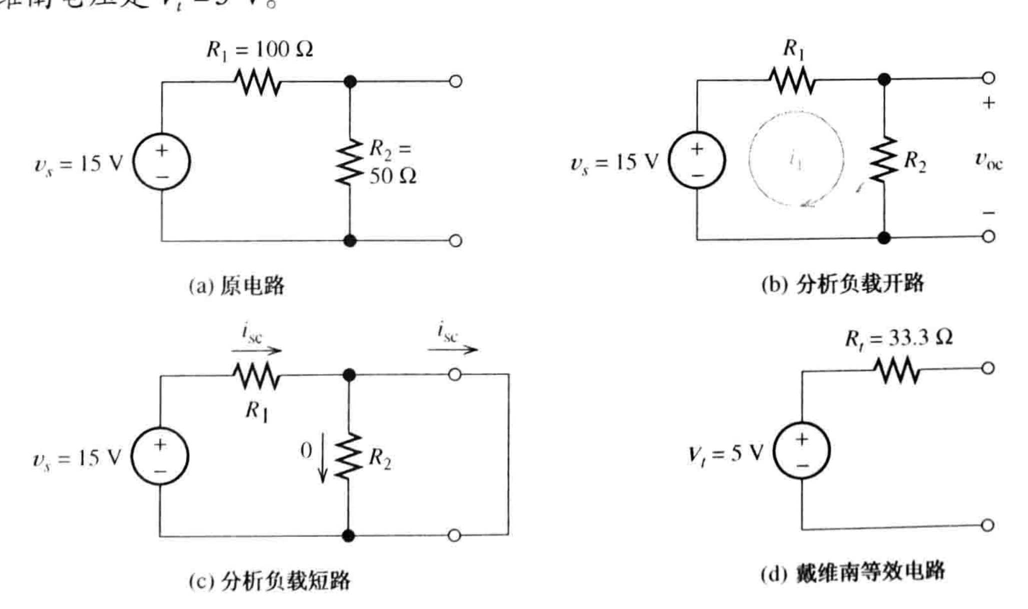


图 2.45　例 2.16 的电路

首先计算开路电压。如图2.50(b)所示，设定电路底端为参考节点。这样，v_{oc}是未知的节点电压。对节点1列写方程：

$$i_x + 2i_x = \frac{v_{oc}}{10} \tag{2.75}$$

然后，用v_{oc}来表示i_x：

$$i_x = \frac{10 - v_{oc}}{5}$$

代入式(2.75)，得：

$$3\frac{10 - v_{oc}}{5} = \frac{v_{oc}}{10}$$

解得$v_{oc} = 8.57\ \text{V}$。

现在，假设电路短路，如图2.50(c)所示，此时通过10 Ω电阻的电流为0。又有：

$$i_x = \frac{10\ \text{V}}{5\ \Omega} = 2\ \text{A}$$

和

$$i_{sc} = 3i_x = 6\ \text{A}$$

所以，由式(2.74)计算戴维南电阻为：

$$R_t = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = \frac{8.57\ \text{V}}{6\ \text{A}} = 1.43\ \Omega$$

最后，戴维南等效电路如图2.50(d)所示。

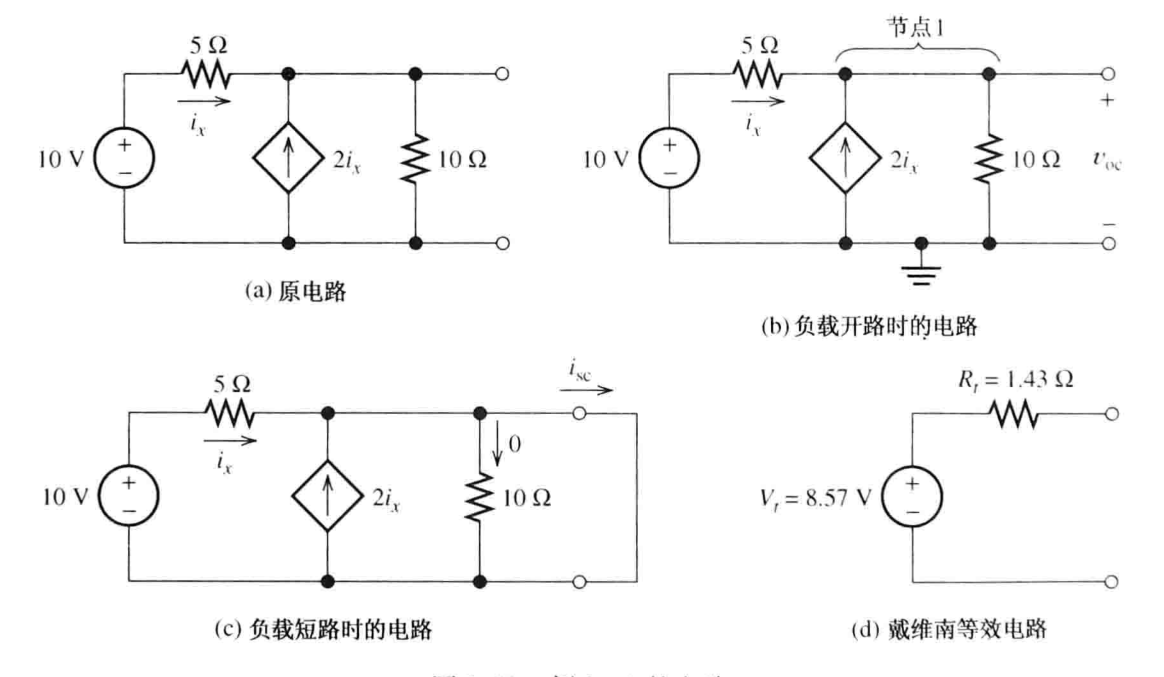


图2.50 例2.18的电路

2.6.2 诺顿等效电路

等效电路的另一种形式称为诺顿等效电路，如图2.51所示，是由一个独立电流源与一个等效电阻并联组成的。如果将独立电流源值置0(断开)，则诺顿等效电路变成了电阻R_t。将戴维南等效电路中的电压源短路之后结果也一样。可见，诺顿等效电阻与戴维南等效电阻是相等的。

假设将诺顿等效电路的输出端短路，如图2.52所示，则流过R_t的电流为0。因此，诺顿电

流与短路电流相等，即：

$$I_n = i_{sc}$$

用计算戴维南等效电路的方法同样可以得到诺顿等效电路。

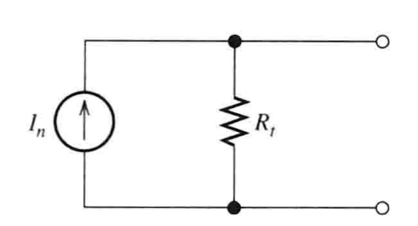


图2.51　诺顿等效电路含一个独立电流源 I_n 与戴维南等效电阻 R_t 并联

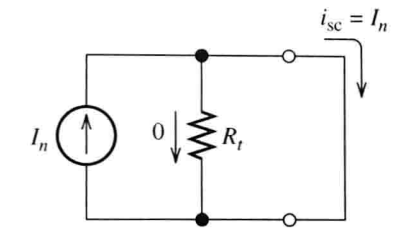


图2.52　将诺顿等效电路的输出端短路

2.6.3　分析戴维南(诺顿)等效电路的步骤

1. 先执行以下3步之中的两步：
   a. 确定开路电压 $V_t = v_{oc}$。
   b. 确定短路电流 $I_n = i_{sc}$。
   c. 将独立源置0，计算戴维南等效电阻。注意不能将受控源值置0。
2. 用等式 $V_t = R_t I_n$ 完成剩余一个参数的计算。
3. 戴维南等效电路由一个电压源 V_t 与电阻 R_t 串联组成。
4. 诺顿等效电路由一个电流源 I_n 与一个电阻 R_t 并联组成。

例2.19　求解诺顿等效电路。

画出图2.53(a)所示的诺顿等效电路。

解： 因为二端网络中包含一个受控源，不能通过将电源值置0以及计算串并联电阻的等效电阻的方法求解戴维南等效电阻。首先，考虑到二端口网络有开路端，如图2.53(a)所示，可将 v_{oc} 作为变量。对电路顶端的节点列写电流方程，有：

$$\frac{v_x}{4} + \frac{v_{oc} - 15}{R_1} + \frac{v_{oc}}{R_2 + R_3} = 0 \tag{2.76}$$

然后，根据分压原理用 v_x 和电阻来表示 v_{oc}：

$$v_x = \frac{R_3}{R_2 + R_3} v_{oc} = 0.25 v_{oc}$$

将上式代入式(2.76)，得到：

$$\frac{0.25 v_{oc}}{4} + \frac{v_{oc} - 15}{R_1} + \frac{v_{oc}}{R_2 + R_3} = 0$$

将上式代入式(2.76)，得到 $v_{oc} = 4.62$ V。

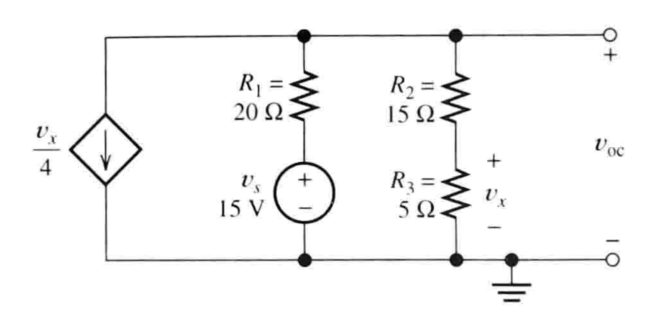
接下来，假设将原电路短路，如图2.53(b)所示，则通过电阻 R_2 和 R_3 的电流为0。这样，有 $v_x = 0$，受控电流源相当于开路。短路电流为

$$i_{sc} = \frac{v_s}{R_1} = \frac{15\ \text{V}}{20\ \Omega} = 0.75\ \text{A}$$

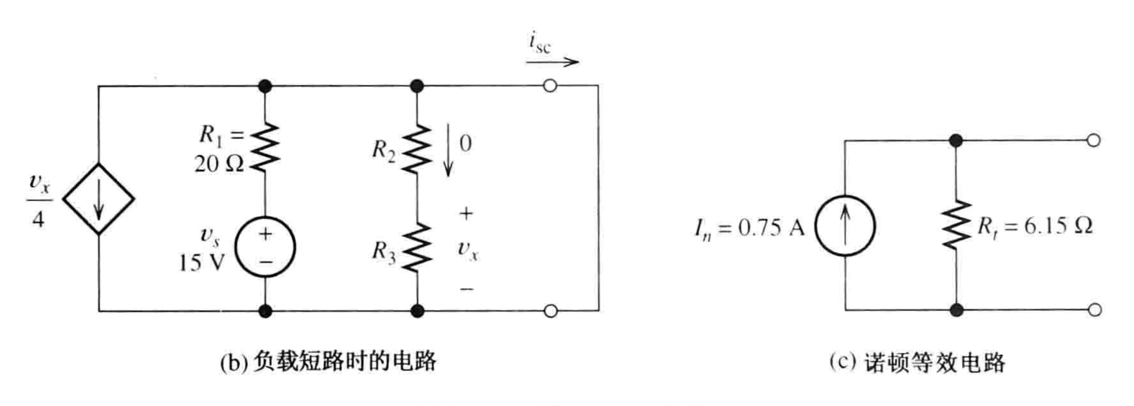
所以，可计算得到戴维南等效电阻：

$$R_t = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = \frac{4.62}{0.75} = 6.15\ \Omega$$

最后，得到诺顿等效电路，如图2.53(c)所示。



(a) 开路条件下的原电路

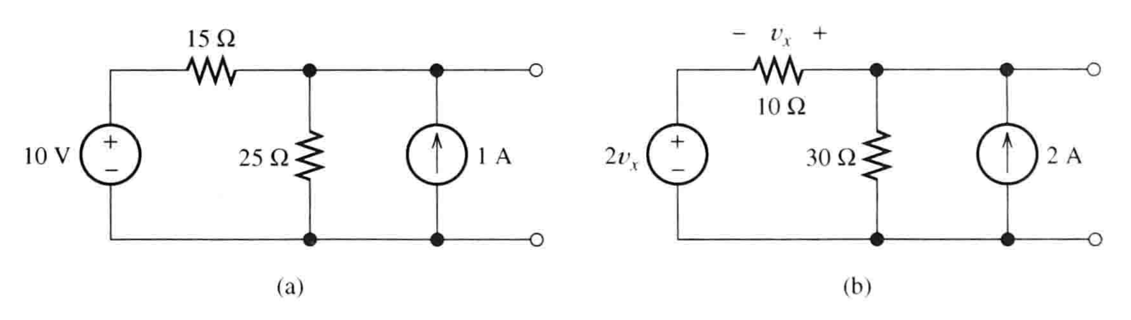


(b) 负载短路时的电路 (c) 诺顿等效电路

图 2.53 例 2.19 的电路

练习 2.29 求解图 2.54 所示各电路的诺顿等效电路。

答案: (a)I_n = 1.67 A, R_t = 9.375 Ω; (b)I_n = 2 A, R_t = 15 Ω。



(a) (b)

图 2.54 练习 2.29 的电路

2.6.4 电源的等效变换

我们已知可以用一个电流源和一个电阻并联的诺顿等效电路来代替一个电压源与一个电阻串联的电路，这叫作电源等效转换，如图 2.55 所示。就外电路而言，这两个等效电路是等价的。也就是说，经过变换后，端点 a 和 b 两点之间的电压和电流是一样的。但是，流过电阻 R 的电流不一样。例如，假设图 2.55 所示的两个电路均开路，则没有电流流过与电压源串联的电阻。不过，电流 I_n 流过与电流源并联的电阻。

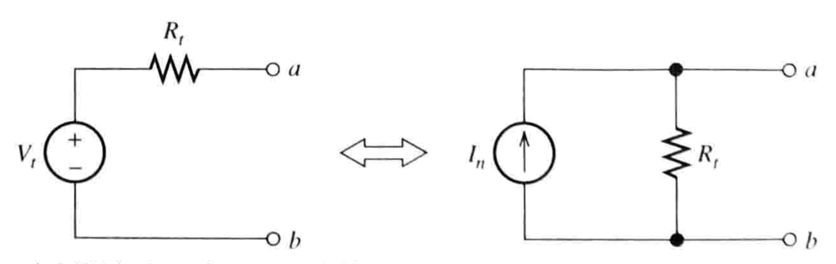


图 2.55 电压源与电阻串联的电路等效于电流源与电阻并联的电路，假设 $I_n = V_t/R_t$

在电源变换的过程中，保持电源极性不变很重要，如果转换前电压源的方向指向端点 a，则变换后电流源的方向也应该指向端点 a。

有时，可以通过电源变换来简化电路的求解，这与通过求解串并联电阻的等效电阻来求解电路相类似。

例 2.20　电源变换方法的应用。

应用电源变换的方法求解电流 i_1 和 i_2，如图 2.56(a)所示。

解：分析该电路可以有好几种方法。其中一种是把 1 A 的电流源和电阻 R_2 变换成一个电压源与电阻 R_2 串联的形式，如图 2.56(b)所示。注意，10 V 电压源的正极在上面，因为 1 A 电流源的流向是向上的。因此，可列出 KVL 方程如下：

$$R_1i_1 + R_2i_1 + 10 - 20 = 0$$

解得：

$$i_1 = \frac{10}{R_1 + R_2} = 0.667\ \text{A}$$

对原电路上端的节点列写电流方程，可得到电流 i_2：

$$i_2 = i_1 + 1 = 1.667\ \text{A}$$

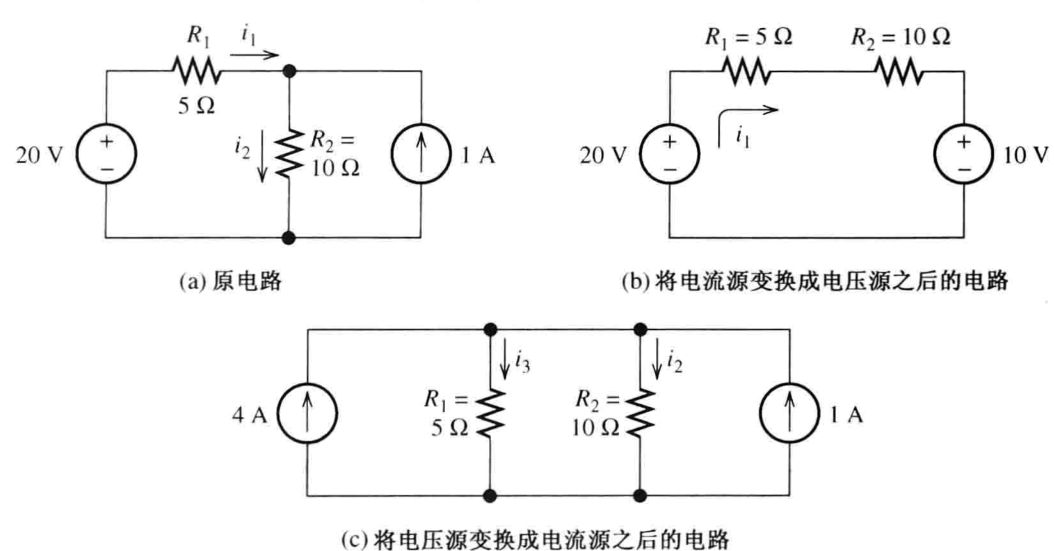


图 2.56　例 2.20 的电路

另一种求解方法是将电压源与电阻 R_1 变换成电流源与电阻 R_1 并联，如图 2.56(c)所示。注意，流过电阻 R_1 的电流是 i_3 而不是 i_1，这是因为转换后流过电阻 R_1 的电流已经与原电路中的电流不一样了。观察图 2.56(c)，可以看出流过电阻 R_1 和 R_2 的总电流是 5 A。根据分流原理：

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_{\text{total}} = \frac{5}{5 + 10}(5) = 1.667\ \text{A}$$

与以前的结果相吻合。

练习 2.30　用电源变换的方法求解图 2.57 中的电流 i_1 和 i_2。

首先，将电流源与电阻 R_1 变换为一个与电阻 R_1 串联的电压源（变换要保证电压源与电流源的参考极性和方向一致），也可以将电压源与电阻 R_2 变换为电流源与电阻 R_2 并联，结果是一样的。

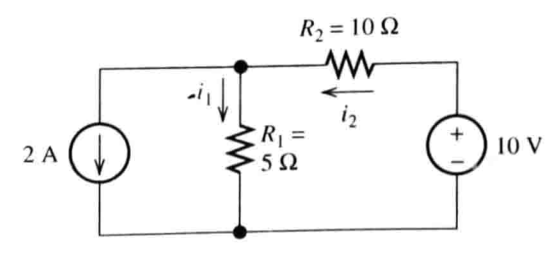


图 2.57　练习 2.30 的电路

答案：$i=-0.667$ A，$i=1.333$ A。

2.6.5 最大功率传输

对于图 2.58(a)所示的二端口网络电路，在连接一个负载电阻 R_L 之后，希望能将最大功率传输到负载上。分析这类问题，可首先用戴维南等效电路代替原电路，如图 2.58(b)所示。流过负载电阻的电流为

$$i_L=\frac{V_t}{R_t+R_L}$$

而传给负载的功率是：

$$p_L=i_L^2R_L$$

将电流代入上式，得到：

$$p_L=\frac{V_t^2R_L}{(R_t+R_L)^2} \tag{2.77}$$

对其求 R_L 的导数，并令导数方程式为 0：

$$\frac{\mathrm{d}p_L}{\mathrm{d}R_L}=\frac{V_t^2(R_t+R_L)^2-2V_t^2R_L(R_t+R_L)}{(R_t+R_L)^4}=0$$

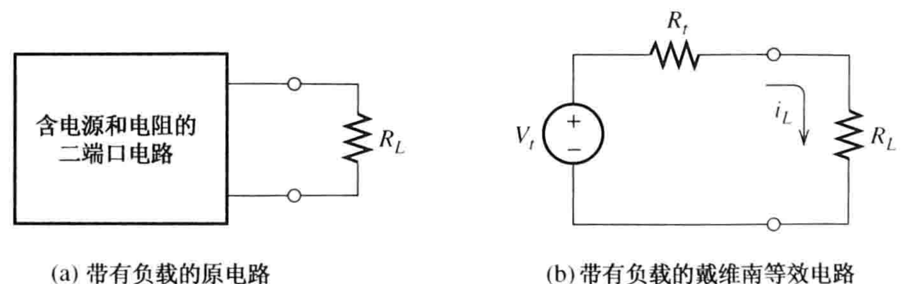
推导得到：

$$R_L=R_t$$

可见，当接在二端口网络两个端点的负载电阻等于戴维南等效电阻时，负载电阻可以最大程度地吸收能量，获得的最大功率为：



$$P_{L\max}=\frac{V_t^2}{4R_t} \tag{2.78}$$



(a) 带有负载的原电路　　(b) 带有负载的戴维南等效电路

图 2.58　分析最大功率传输的电路

举一个很经典的例子：在寒冷的冬天，你会很难发动汽车。汽车内的电池组可以看成一个戴维南电路，戴维南电压基本不随外界温度变化。但是，当电池组很冷的时候，其内部的化学物质反应很慢，戴维南电阻变得很大。因此，电池组能够给外界提供的能量就会大大减小。

例 2.21　计算最大传输功率。

求解在图 2.59 所示电路中能获得最大传输功率的负载电阻值，并计算最大输出功率。

解：首先，求解原电路的戴维南等效电路。令电压源置 0，则电阻 R_1 与 R_2 并联。戴维南等效电阻为：

$$R_t=\frac{1}{1/R_1+1/R_2}=\frac{1}{1/20+1/5}=4\ \Omega$$

戴维南电压与开路电压相等，根据分压原理，有：

$$V_t = v_{oc} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}(50) = \frac{5}{5+20}(50) = 10\ \text{V}$$

这样，能够得到最大功率的负载电阻：

$$R_L = R_t = 4\ \Omega$$

其消耗的最大功率为

$$P_{L\max} = \frac{V_t^2}{4R_t} = \frac{10^2}{4 \times 4} = 6.25\ \text{W}$$

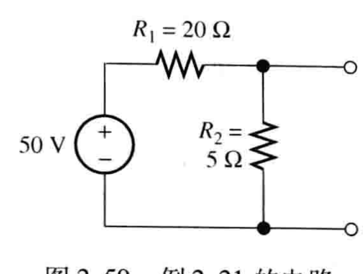


图2.59　例2.21的电路

实际应用2.1　一个重要的工程问题：电动汽车的能量存储系统

设想表现优良、行程达到500 km的无污染电动汽车。目前这种汽车还没有出现，但这是许多正在展开的大型工程努力实现的目标。这种电动汽车能量使用高效，尤其在走走停停的交通状况中。车辆制动时的动能可以恢复回收，用于后面的车辆加速。而且，电动汽车对拥挤的城市环境污染极小。

迄今为止，电动汽车的表现和行程是不尽如人意的。设计合适的能量存储设备(和其他许多理想设备，如一周不需要充电的便携式计算机)已成为电动汽车实用化的绊脚石。

在第3章介绍的电容和电感可以储存能量，但是它们的单位容积能值太小，不能解决电动汽车的实用化问题。现代充电式电池的能值不错，但是仍然无法和汽油相提并论，汽油的单位容积能值为10 000瓦时/升(Wh/L)，而目前电动汽车上使用的镍-金属氢化物电池仅为175 Wh/L。正在研发的锂离子电池估计可以提高到300 Wh/L。因此，即使内燃机效率相对较低，使用燃烧汽油把化学能转换为机械能得到的能量也远远大于使用相当容积电池获得的能量。

尽管电动汽车在使用时不会产生污染物，但是金属在采掘、冶炼和处理环节会严重污染环境。我们在设计这些系统时必须考虑整体的环境(还有经济方面)效果。作为工程师，你可以接受这一重大挑战：为人类开发安全环保、轻松转换电能的能量存储系统。

当然，一种解决方案可能是目前广泛研究的基于无毒化工产品的电化学电池。另一种是机械飞轮系统，它可以实现从发电机到电动机的耦合。另外还有一种是混合汽车，它包含有一个小内燃机、一个发电机、一个能量存储系统。通过优化使发动机工作在恒定的负荷状况，同时对能量存储系统充电，这样对环境的污染较低。当能量存储系统被充满电以后，发动机自动切断，汽车由能量存储系统提供能量。发动机只需要保证汽车在高速公路上高速行驶的能量需要即可。

无论采取哪一种最终解决汽车污染问题的方案，我们都可以预见将包括机械、化学、制造以及建筑工程和电气工程原理紧密结合的各种元件。

最大传输功率的应用　当负载电阻与戴维南等效电阻相等时，有一半功率输送给了负载，另一半功率被电源内部消耗掉了。在大功率设备的应用中，效率是非常重要的，此时就不能设计输出最大功率的电路。例如，在设计电机时，我们希望电池内存储的能量能够大量用于驱动电动机，并尽量减小电池内阻和导线的功率损耗。仅当需要达到最大加速运行时，才需要达到最大功率传输的工作状态。

2.7 叠加原理

假设一个电路由线性受控源、电阻和 n 个独立源组成(稍后会解释什么是线性受控源)，流过已知元件的电流(或电压)叫作响应。回忆前面学过的将独立源值置0，计算二端口网络的戴维南等效电阻的方法。这里将电源值置0，即令电流源为开路，电压源为短路。

现在，假设将除第一个独立源之外的所有独立源置0，计算某一特定元件的响应(电流或电压)，将这个响应值记为 r_1(用 r 而不用 i 或 v，因为此响应既可能是电流，也可能是电压)。类似地，将第二个独立源的响应记为 r_2，以此类推，将所有电源所产生的响应记为 r_T。叠加原理指：

$$r_T = r_1 + r_2 + \cdots + r_n \tag{2.79}$$

下面通过对图2.60的分析说明叠加原理的可行性。在此电路中有两个独立源，电压源记为 v_{s1}，电流源记为 i_{s2}。分析它们在电阻 R_2 上的电压响应。

首先，分析两个独立源共同作用下的总响应 v_T，对电路中的节点列写电流方程：

$$\frac{v_T - v_{s1}}{R_1} + \frac{v_T}{R_2} + Ki_x = i_{s2} \tag{2.80}$$

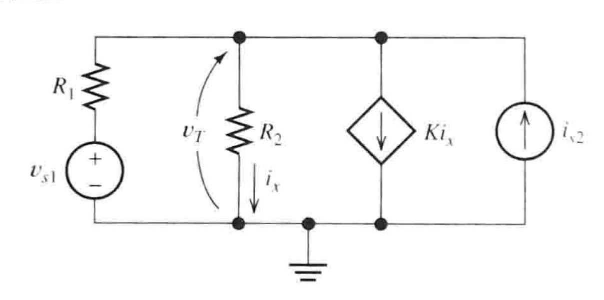


图2.60 例解叠加原理的电路

受控变量为

$$i_x = \frac{v_T}{R_2} \tag{2.81}$$

将式(2.81)代入式(2.80)，得到：

$$v_T = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + KR_1} v_{s1} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + KR_1} i_{s2} \tag{2.82}$$

令 $i_{s2}=0$，得到 v_{s1} 单独作用的电压响应为

$$v_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + KR_1} v_{s1} \tag{2.83}$$

令 $v_{s1}=0$，得到 i_{s2} 单独作用的响应为

$$v_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + KR_1} i_{s2} \tag{2.84}$$

比较式(2.82)、式(2.83)和式(2.84)，得到：

$$v_T = v_1 + v_2$$

由此验证了叠加原理，即总的电路响应等于每个独立源单独作用下各响应的总和。

注意，如果将两个独立源值均置0($v_{s1}=0$ 和 $i_{s2}=0$)，则响应为0。这样，受控源就无法在电路中引起响应。事实上，受控源对两个独立源的作用是有影响的。从受控源的增益系数 k 出现在电压 v_1 和 v_2 中就显而易见。总之，受控源不能对电路独立产生响应，在应用叠加原理时不能将受控源置0。(稍后将学习怎样回避这个规则，用叠加原理去计算含受控源的电路。)

2.7.1 线性

如果绘制流过一个电阻的电流与其端电压的特性曲线，会得到一条直线，如图2.61所示。这样，我们认为欧姆定律是线性方程。类似地，如图2.60所示受控电源的电流 $i_{cs}=Ki_x$，也是一

个线性方程。在本书中，电路中的线性受控源是指该电源值等于其控制电流或者控制电压乘以一个常数。

列举一些非线性方程的例子：

$$v = 10i^2$$

$$i_{cs} = K\cos(i_x)$$

以及

$$i = e^v$$

叠加原理不适用于含有非线性元件的电路。在本书后面电子电路的章节中将介绍非线性元件电路的分析方法。

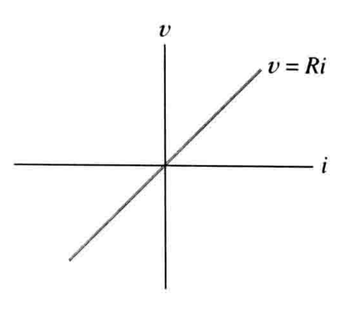


图 2.61　符合欧姆定律的电阻特性是线性的

2.7.2　用叠加法求解电路

对单个电源的响应进行逐个分析，再根据叠加性，把这些单个的响应叠加起来就是总响应。有时，逐个分析单电源电路会使问题简化，现举例说明如下。

例 2.22　用叠加法分析电路。

用叠加法求解图 2.62(a) 中的电压 v_T。

解：分析此电路，可以每次只考虑一个电源的独立作用，然后把各响应叠加起来。如图 2.62(b) 所示，电路只有一个电压源，产生的电压响应为：

$$v_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s = \frac{5}{5+10}(15) = 5\ \text{V}$$

分析电流源产生的响应，如图 2.62(c) 所示。这时，两个并联电阻的等效电阻为：

$$R_{eq} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} = \frac{1}{1/10 + 1/5} = 3.33\ \Omega$$

电流源产生的电压响应为：

$$v_2 = i_s R_{eq} = 2 \times 3.33 = 6.66\ \text{V}$$

综合上述分析，总的电压响应为：

$$v_T = v_1 + v_2 = 5 + 6.66 = 11.66$$

练习 2.31　求解图 2.62 的电流响应 i_1，i_2 和 i_T。

答案：$i_1 = 1$ A，$i_2 = -0.667$ A，$i_T = 0.333$ A。

练习 2.32　用叠加原理求解图 2.63 中的响应 v_T，i_T。

答案：$v_1 = 5.45$ V，$v_2 = 1.82$ V，$v_T = 7.27$ V，$i_1 = 1.45$ A，$i_2 = -0.181$ A，$i_T = 1.27$ A。

2.8　惠斯通电桥

惠斯通电桥是一个用来测量未知电阻的电路。例如，机械和建筑工程师在测试机械和建筑物拉伸力的时候，通常会测量仪表的拉伸电阻值。如图 2.64 所示电路，包含一个直流电压源 v_s，一个指示器(指针)，一个未知电阻 R_x 和 3 个精密电阻 R_1、R_2 和 R_3。通常，R_2 和 R_3 是可变电阻，在电阻符号上用箭头标示。

指示器能检测到微小的电流(小于 1 mA)。不过，通常不必要去校准，只需要指示出是否有电流流过就可以了。在操作过程中，不断调整电阻 R_2 和 R_3 的值，直到指示器显示流过的电流为 0，这时电桥平衡，而且电流 i_g 和加在指示器上的电压为 0。

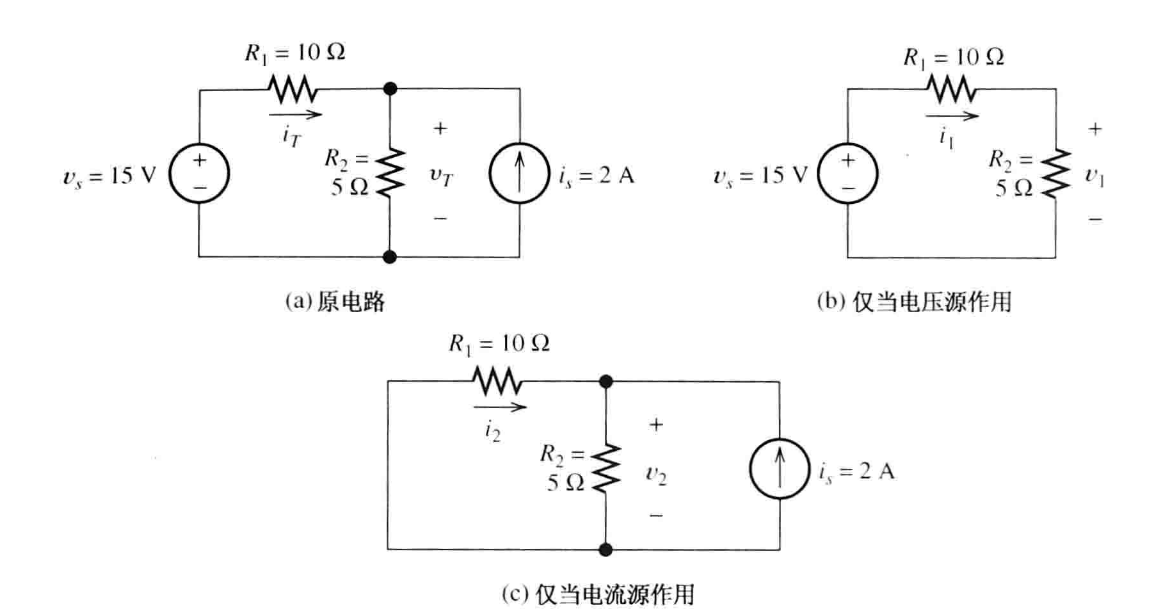


图 2.62　例 2.22 和练习 2.31 的电路

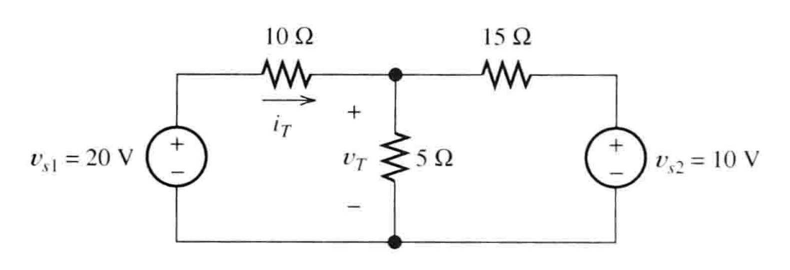


图 2.63　练习 2.32 的电路

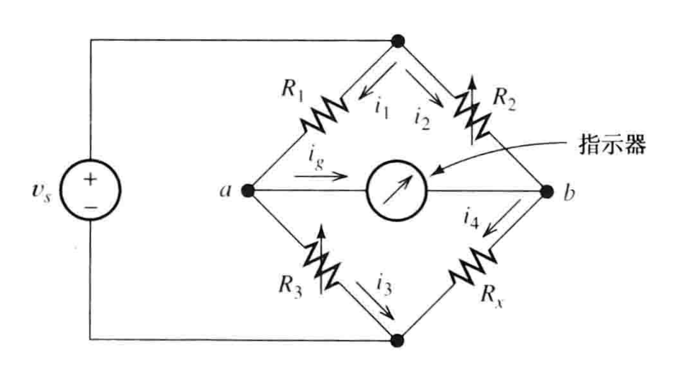


图 2.64　惠斯通电桥。当惠斯通电桥平衡时，$i_g = 0$，$v_{ab} = 0$

在节点 a 处应用 KCL 方程和 $i_g = 0$，可得：

$$i_1 = i_3 \tag{2.85}$$

同样，在节点 b 处有：

$$i_2 = i_4 \tag{2.86}$$

对由电阻 R_1、R_2 和指示器构成的回路列写 KVL 方程，有：

$$R_1 i_1 + v_{ab} = R_2 i_2 \tag{2.87}$$

当电桥平衡时，$v_{ab} = 0$，有：

$$R_1 i_1 = R_2 i_2 \tag{2.88}$$

同理，对于由电阻 R_3、R_4 和指示器组成的回路，有：

$$R_3 i_3 = R_x i_4 \tag{2.89}$$

将式(2.85)和式(2.86)代入式(2.89)得：

$$R_3 i_1 = R_x i_2 \tag{2.90}$$

将式(2.90)除以式(2.88)，有：

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_x}{R_2}$$

最后，求得未知电阻：

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3 \tag{2.91}$$

在商用电桥中，通过一个多位开关来选择测量因子的数量级，通过改变测量因子中的电阻 R_2 来实现。然后，通过标准开关调节 R_3 直到达到电桥平衡。这样，未知值 R_x 就是电阻 R_3 乘以测量因子。

例 2.23 用惠斯通电桥测量电阻。

某商用惠斯通电桥的电阻 R_1 为 1 kΩ，电阻 R_3 的阻值可以 1 为调节单位，从 0 调节到 1100 Ω，电阻 R_2 可以选择为 1 kΩ、10 kΩ、100 kΩ 和 1 MΩ 等数值。(a)假设 R_3 = 732 Ω，R_2 = 10 kΩ 时电桥平衡，求电阻 R_x 的值；(b)电桥平衡时允许 R_x 的最大值是多少？(c)假设 R_2 = 1 MΩ，则 R_x 的增量为多少时电桥恰好平衡？

解：

(1) 根据式(2.91)，有：

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3 = \frac{10\ \text{k}\Omega}{1\ \text{k}\Omega} \times 732\ \Omega = 7320\ \Omega$$

注意，R_2/R_1 是一个测量因子，可以设置为 1、10、100 和 1000，取决于电阻 R_2 的取值。当未知电阻 R_2 等于该测量因子乘以 R_3 时，电桥平衡。

(2) 电桥平衡时 R_x 的最大电阻值取决于电阻 R_2 和 R_3 均取最大值：

$$R_{x\max} = \frac{R_{2\max}}{R_1} R_{3\max} = \frac{1\ \text{M}\Omega}{1\ \text{k}\Omega} \times 1100\ \Omega = 1.1\ \text{M}\Omega$$

(3) R_x 的增量为测量因子乘以电阻 R_3 的增量：

$$R_{x\text{inc}} = \frac{R_2}{R_1} R_{3\text{inc}} = \frac{1\ \text{M}\Omega}{1\ \text{k}\Omega} \times 1\ \Omega = 1\ \text{k}\Omega$$

本章小结

1. 多个串联电阻的总阻值等于单个电阻之和，对于 n 个串联电阻，有：

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

2. 多个并联电阻的总阻值等于各电阻的倒数之和的倒数：

$$R_{\text{eq}} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2 + \cdots + 1/R_n}$$

3. 某些电阻网络可以通过反复合并串并联电阻的方法来求解。求解简化电路之后，再将数据逐个回代至各级简化电路。最后，可解得原电路中的电流和电压。
4. 分压原理适用于由多个电阻串联的电路。总电压中的一部分加在各个电阻上，加在一个已知电阻的这部分电压等于该电阻乘以总电压再与总串联电阻之比。

5. 分流原理适用于电流流过两个并联电阻的情况。总电流中的一部分电流流过其中的一个电阻，流过 R_1 的电流与总电流的比值为 $R_2/(R_1+R_2)$。
6. 节点电压法可用于求解阻性网络中的电压值。此方法的具体解题步骤详见教材中。
7. 写出节点电压方程组的过程详见教材，该方程组中包含电阻和独立电流源。
8. 网孔电流法可用于计算平面电阻性网络的电流值。具体解题步骤详见教材内部。
9. 写出网孔电流方程组的过程详见教材，该方程组中包含电阻和独立电压源。应用此方法时，所有的网孔电流流向均约定为顺时针方向。
10. 一个含多电源与电阻的二端口网络可以变换为由一个电压源与一个电阻串联的戴维南等效电路。戴维南电压与原网络的开路电压相等，戴维南电阻等于原电路的开路电压除以短路电流。有时，戴维南电阻可以通过将原电路中的独立源值置0后，再合并串并联电阻而得到。独立电压源置0时，用短路代替；独立电流源置0时，用断路代替。注意：不能对受控源置0。
11. 一个含多电源与电阻的二端口网络可以变换为由一个电流源和电阻并联的诺顿等效电路。诺顿电流等于原电路的短路电流，诺顿电阻与戴维南电阻相等。详见教材中戴维南和诺顿等效电路的具体分析步骤。
12. 有时，采用电源变换(将戴维南等效电路与诺顿等效电路相互替换)求解电路也很有效。
13. 当一个二端口网络的负载电阻等于戴维南等效电阻时，电路输出最大功率。
14. 叠加原理是指在一个电阻性电路中，总响应等于各个独立源的分响应之和。叠加原理不适合分析含有非线性元件的电路。
15. 惠斯通电桥是用来测量电阻值的电路。电路包括一个电压源、一个指示器和三个精密电阻，其中两个可调，还有一个为待测电阻。调节两个电阻直到电桥平衡，则未知电阻可通过这3个电阻而获得。

习题

2.1 节　电阻的串联和并联

*P2.1　对图 P2.1 中的各电路采用合并串并联电阻的方法进行化简。

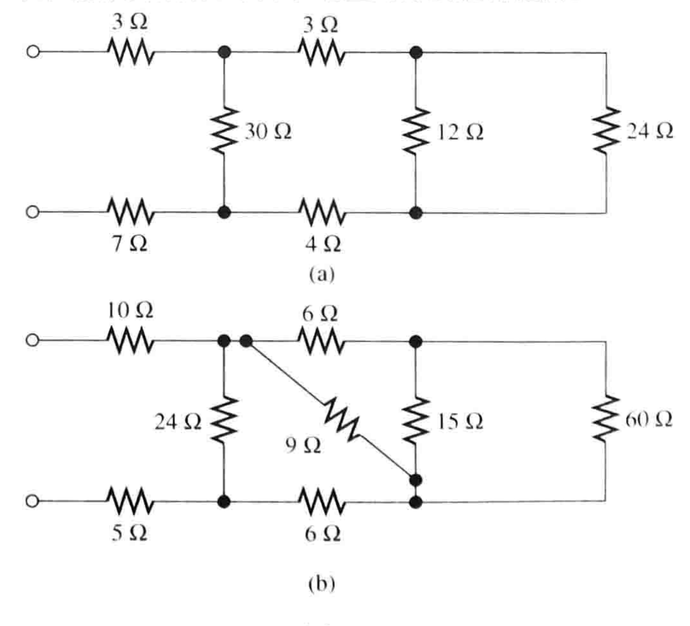


图 P2.1

* P2.2　一个 4 Ω 电阻和电阻 R_x 并联以后再和 4 Ω 电阻串联，其等效电阻为 8 Ω，计算 R_x。

* P2.3　计算图 P2.3 所示电路中 a、b 两端的等效电阻。

* P2.4　假设你需要 1.5 kΩ 的电阻，但只有一组 1 kΩ 的电阻器，试设计相应的等效电路。如果等效电阻为 2.2 kΩ，设计相应的电路。

* P2.5　计算图 P2.5 所示电路中 a、b 两端的等效电阻。

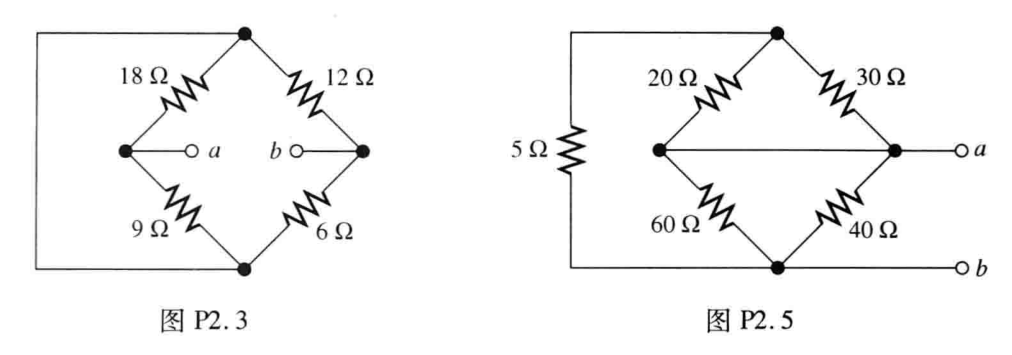
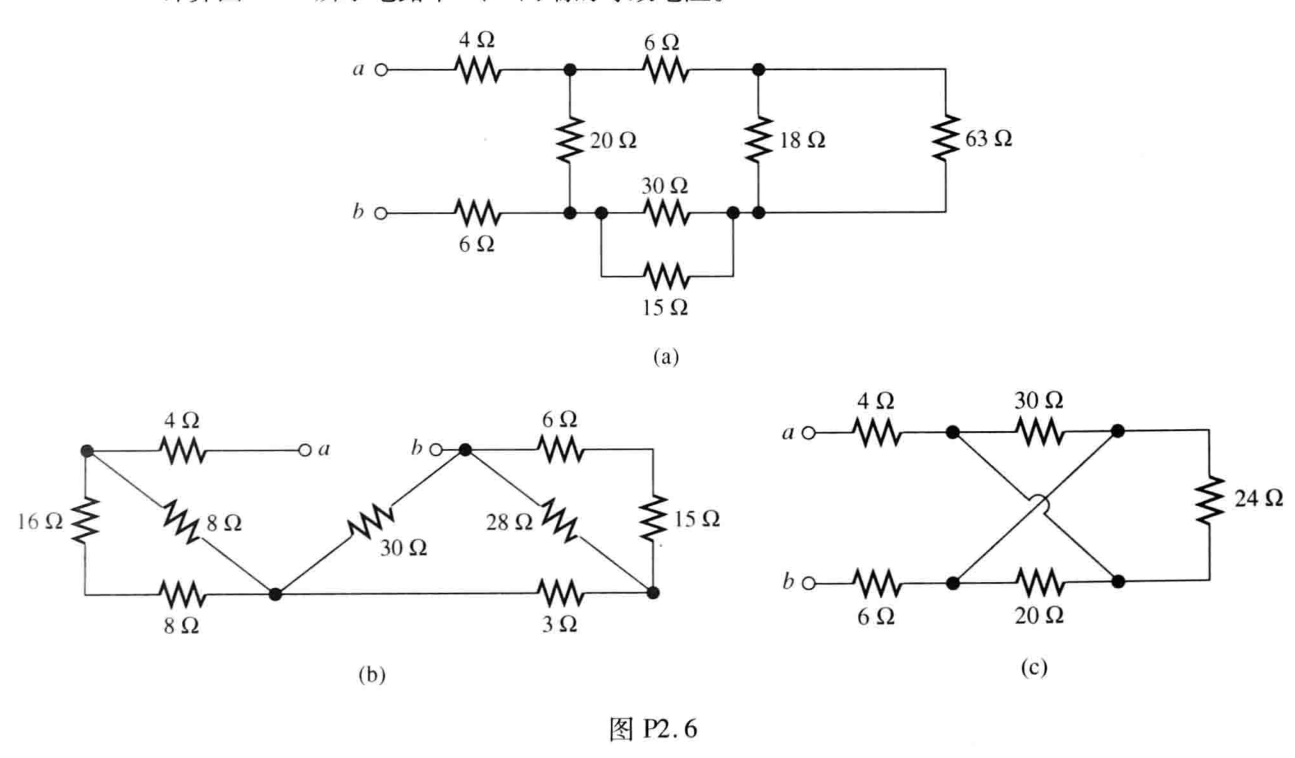


图 P2.3　　　　图 P2.5

P2.6　计算图 P2.6 所示电路中 a、b 两端的等效电阻。



(a)

(b)　　　　(c)

图 P2.6

P2.7　如果等效电阻值为 48 Ω，则 120 Ω 电阻器需要并联阻值多大的电阻器？

P2.8　(1)计算图 P2.8 所示电路中 a、b 两端的等效电阻；(2)将 c 和 d 端短接之后，再计算电路 a、b 两端的等效电阻。

P2.9　现有两个阻值为 R 和 $2R$ 的电阻器并联。如果电阻 R 和并联等效电阻均为整数，请问 R 可能为哪些值？

P2.10　一个端点为 a、b 的二端网络是由两个并联电路串联而成的。第一个并联电路是两个阻值为 16 Ω 和 48 Ω 的电阻器并联，第二个并联电路是两个阻值为 12 Ω 和 24 Ω 的电阻器并联。画出对应电路图再计算电路 a、b 两端的等效电阻。

图 P2.8

P2.11　现有 R_1 和 R_2 两个电阻器并联。已知 $R_1 = 90$ Ω，流过 R_2 的电流是流过 R_1 的电流的 3 倍。计算 R_2 的电阻值。

P2.12　计算图 P2.12(a)中无限网络的等效电阻。该电路称为半无限阶梯电路(提示：如果将图 P2.12(b)所

示电路连接至半无限阶梯电路，其等效电阻不变。那么，对图 P2.12(b)所示电路列写由 R_{eq} 表示 R_{eq} 的表达式，就可以求解 R_{eq} 值)。

P2.13 如果 n 个 1000 Ω 的电阻器并联，其等效电阻的电阻值为多少？

P2.14 一个电炉的加热元件是两个电阻器，$R_1=57.6\ \Omega$，$R_2=115.2\ \Omega$，两个电阻器可以在 120 V 或 240 V 电压下单独、并联或者串联工作。当两个电阻器并联连接，而且电压为 120 V 时，电炉的功率最低。如果要获得最高电压，两个电阻元件应该如何连接？工作电压为多少？最大功率为多少？画出 3 种以上的工作模式并计算对应的功率。

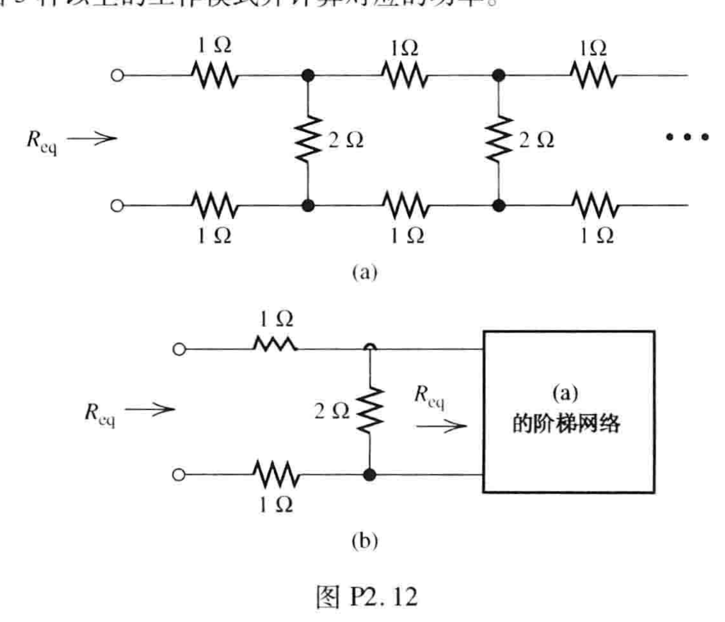


图 P2.12

P2.15 一空气加热器的工作电压为 120 V，加热元件是两个电阻器 R_1 和 R_2，两个电阻器可以单独、并联或者串联连接工作。电路的最大功率为 1280 W，最小功率为 240 W。求 R_1 和 R_2 的电阻值。电路还有可能输出哪些介于最大与最小功率之间的中间功率？

P2.16 对不能应用电阻串并联简化求解等效电阻的电路，有时可以应用对称结构方法来求解其电阻。图 P2.16 所示电路就是一个经典示例，12 个 1 Ω 的电阻位于立方体的每条边上，两端点 a、b 与立方体斜对角端连接。问题就是求两端点之间的电阻值。可以这样来求解：假设两端点 a、b 流过的电流为 1 A，则两端点 a、b 之间的电压就等于待求的电阻值。对称结构的电路，每个电阻的电流值可求，然后应用 KVL 就可以求出 a、b 之间的电压。

P2.17 图 P2.17 所示电路，已知 a、b 两端的等效电阻 $R_{ab}=23\ \Omega$，求电阻 R 的值。

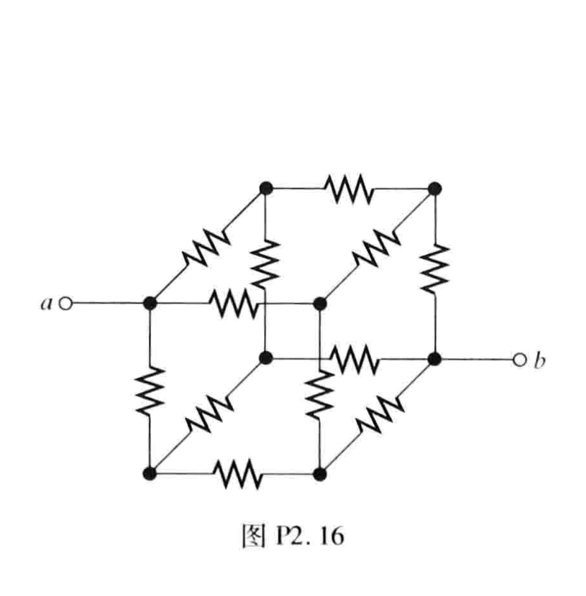


图 P2.16

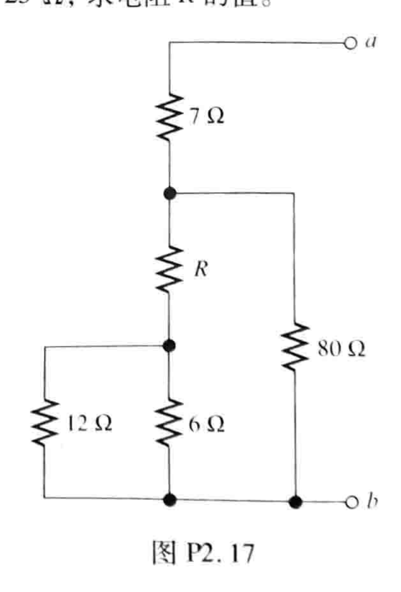


图 P2.17

P2.18 (1)3 个电导 G_1、G_2、G_3串联，写出等效电导 $G_{eq}=1/R_{eq}$和电导 G_1、G_2、G_3的关系式。(2)假设3个电导 G_1、G_2、G_3并联，重复(1)的问题。

P2.19 绝大多数电源表现为理想电压源的特性。这时，如果有多个负载需要独立工作，我们可以把这些负载并联连接，并且每个负载串联一个开关，从而可以实现对每个负载开关进行独立断开或闭合，而不会影响其他负载的工作。

如果电源表现为理想电流源，要实现多个负载独立工作，负载和开关应该如何连接呢？画出电流源和 3 个带通-断开关负载的电路图。如果要断开一个负载，对应开关是断开还是闭合呢？请解释。

P2.20 见图 P2.20 所示电路，当 c 端断开时 a、b 两端的等效电阻 $R_{ab}=50\ \Omega$，当 a 端断开时 b、c 两端的等效电阻 $R_{bc}=100\ \Omega$，当 b 端断开时 c、a 两端的等效电阻 $R_{ca}=70\ \Omega$。如果 b、c 两端点短路，计算 a 端与 b、c 两端点之间的电阻值。

P2.21 图 P2.21 所示三相电路(5.7 节中介绍)三角形连接的负载，如果只能接触到 3 个端点，可以通过下列方法得到 3 个电阻值：把任意两端点短路连接，测量另外一个端点与这两端点之间的电阻值，依次短接另两个端点，重复 3 次测量电阻就可以得出 3 个电阻值。如果 $R_{as}=50\ \Omega$，$R_{bs}=100\ \Omega$，$R_{cs}=70\ \Omega$，其中 R_{as}表示当 a 端与短接 b、c 两端之间的等效电阻，计算 R_a、R_b、R_c的电阻值。(提示：也许你会发现应用电导比电阻更容易求解方程，一旦求出电导，其倒数就是电阻。)

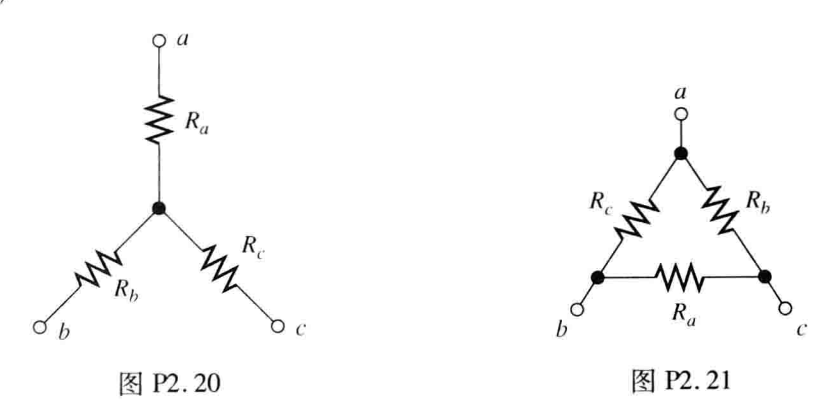


图 P2.20　　图 P2.21

2.2 节 用串/并联的等效变换进行网络分析

P2.22 采用电阻的串并联简化电路的方法有哪些步骤？这种方法适用于所有的电路吗？请解释。

*P2.23 分析图 P2.23，求解电流 i_1和 i_2。

*P2.24 分析图 P2.24，采用电阻的串并联等效求解电压 v_1和 v_2。

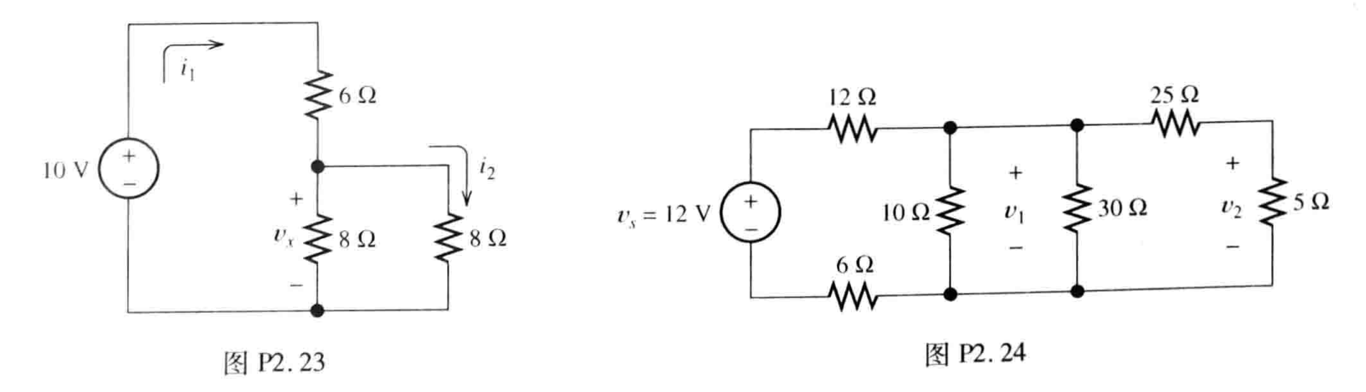


图 P2.23　　图 P2.24

*P2.25 分析图 P2.25，求解电压 v 和电流 i。

P2.26 如图 P2.24 所示电路，假设电源电压 v_s一直变化，直到电压 $v_2=5\ \text{V}$，计算此时电压 v_s的值。(提示：电路自右至左计算电流电压值，直至计算到电源电压。)

P2.27 分析图 P2.27，求解电压 v 和电流 i_1和 i_2。

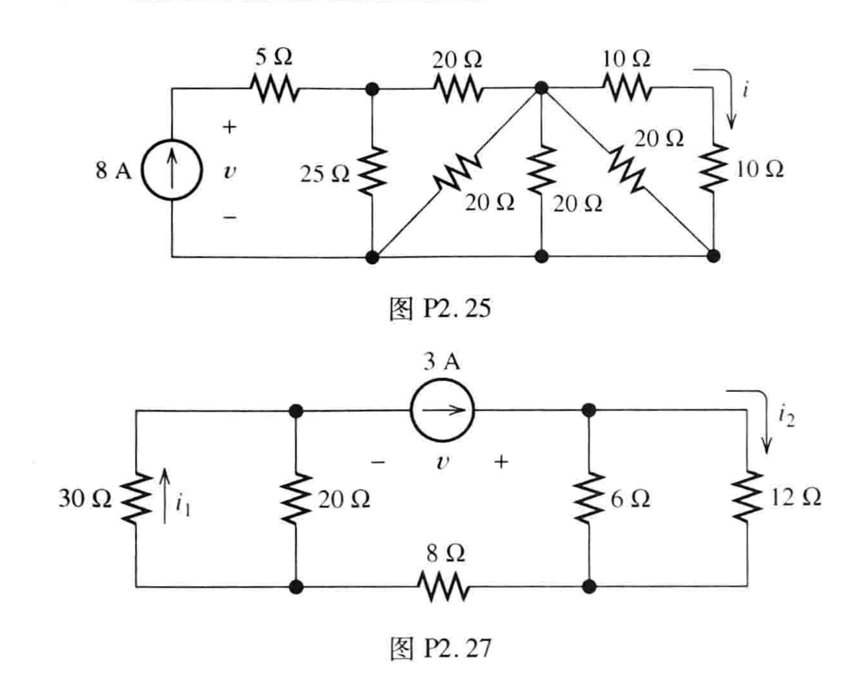


图 P2.25

图 P2.27

P2.28　分析图 P2.28，求解电压 v_s、v_1 和电流 i_2。

P2.29　分析图 P2.29，求解电流 i_1 和 i_2。

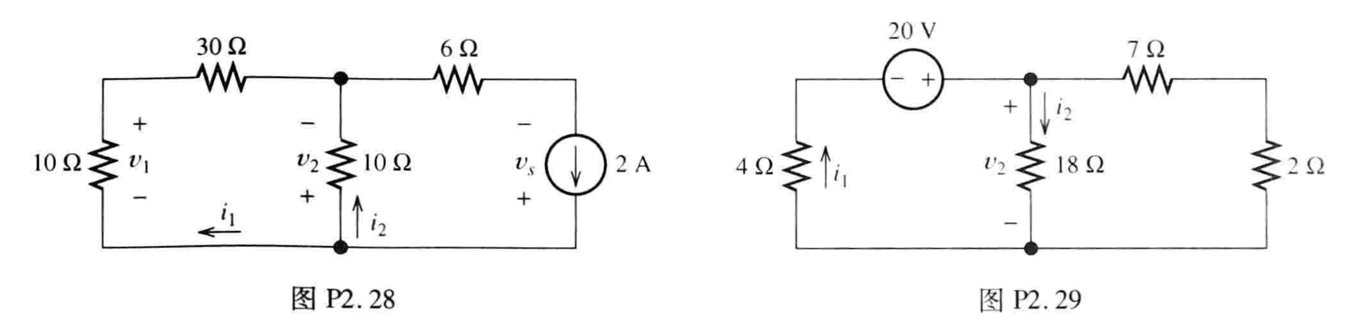


图 P2.28

图 P2.29

P2.30　分析图 P2.30，求解电压 v_1、v_2 和 v_{ab}。

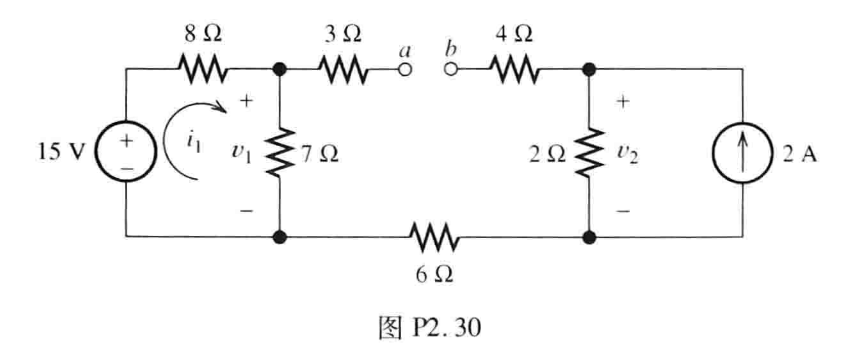


图 P2.30

P2.31　分析图 P2.31，求解电流 i_1 和 i_2，以及电源的功率。问：电流源是吸收能量还是提供能量？电压源是吸收能量还是提供能量？

P2.32　图 P2.32 所示电路中，12 V 电源发出 36 mW 功率，4 个电阻器的电阻值相同，为 R，求解 R。

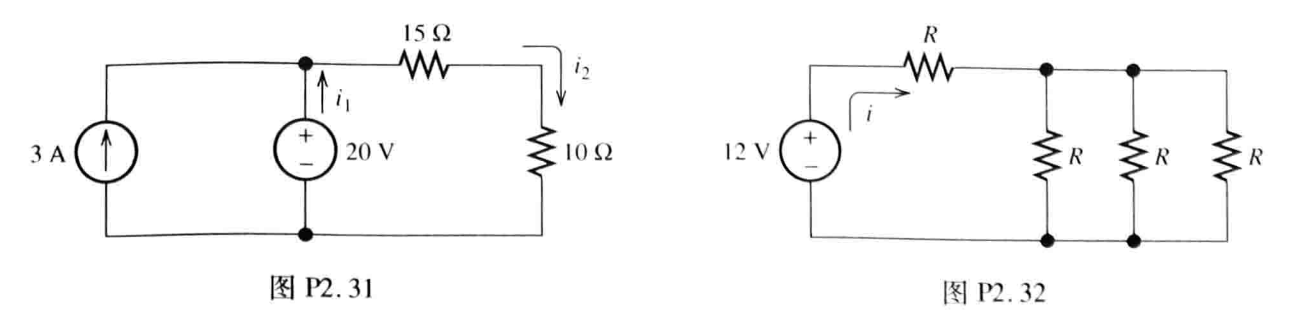


图 P2.31

图 P2.32

P2.33 如图 P2.33 所示电路，当开关断开时电压 $v_2=8$ V，当开关闭合时电压 $v_2=6$ V，求解 R_2 和 R_L。

*P2.34 分析图 P2.34，求解电流 i_1 和 i_2，计算电路每个元件的功率，并说明是吸收能量还是提供能量。验证吸收总功率和发出总功率相等。

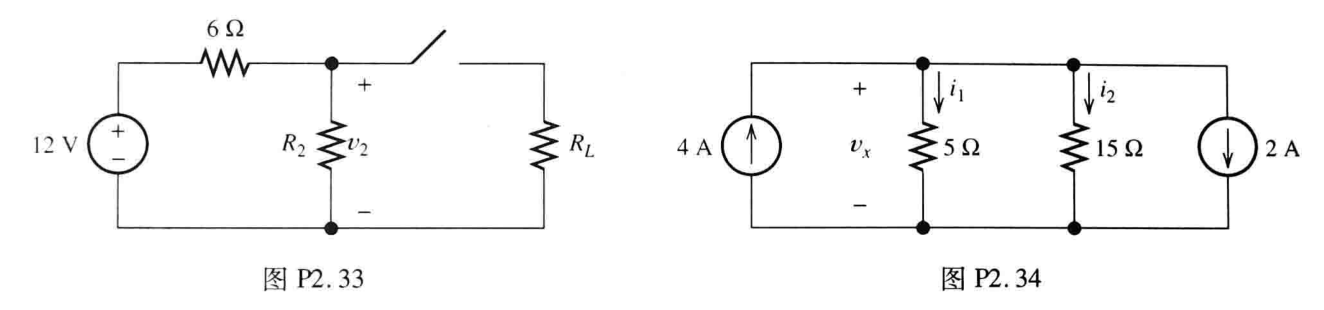


图 P2.33　　图 P2.34

*P2.35 分析图 P2.35，求解电流 i_1 和 i_2。

2.3 节 分压和分流电路

*P2.36 如图 P2.36 所示，应用分压原理求解电压 v_1、v_2 和 v_3。

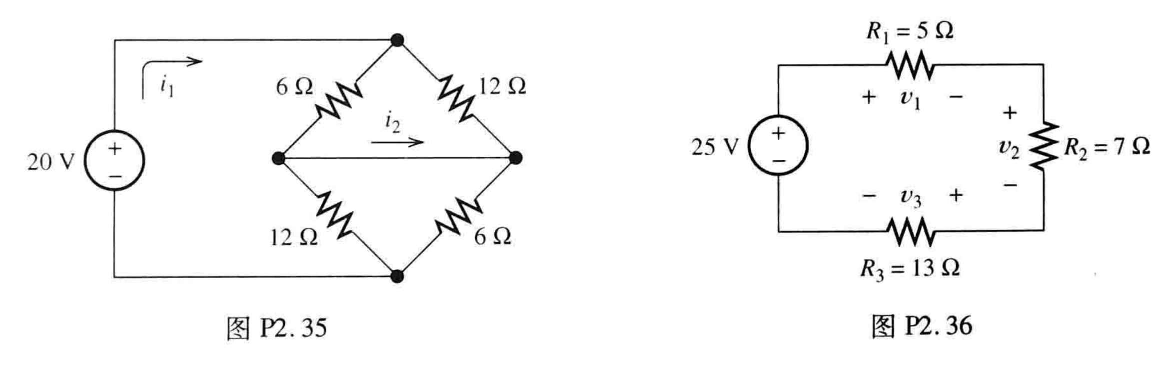


图 P2.35　　图 P2.36

*P2.37 如图 P2.37 所示，应用分流原理求解电流 i_1 和 i_2。

*P2.38 如图 P2.38 所示，应用分压原理求解电压 v。

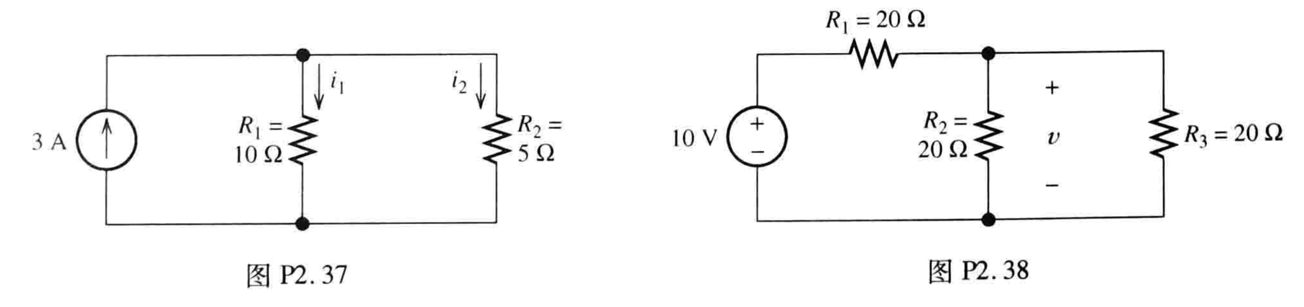


图 P2.37　　图 P2.38

P2.39 如图 P2.39 所示，应用分流原理求解电流 i_3。

P2.40 如图 P2.40 所示分压电路中，15 V 电源流过的电流为 200 mA，输出电压 $v_o=5$ V。(1)求解 R_1 和 R_2。(2)如果输出端连接 200 Ω 的负载电阻，求解 v_o。

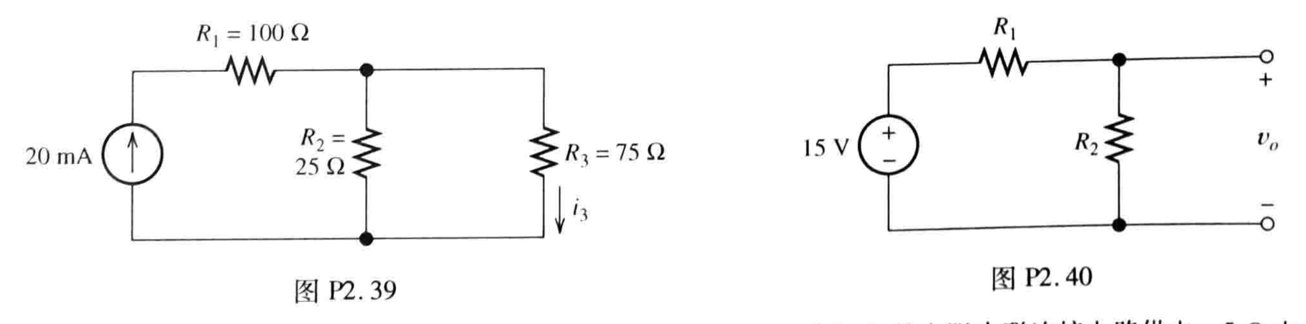


图 P2.39　　图 P2.40

P2.41 现有一电压为 120 V 的电源对一个 10 Ω、一个 5 Ω 和未知 R_x 的电阻串联连接电路供电。5 Ω 电阻的端电压为 20 V，求解 R_x。

P2.42 现有一 15 mA 电流源与一个 60 Ω、一个 20 Ω 和未知 R_x 的电阻并联。流过未知电阻的电流为 15 mA，求解 R_x。

*P2.43 一个工人站在潮湿的混凝土地面上，手里拿着一把有金属机柜的电锯。金属机柜通过三端电源插座实现电力系统接地。电线电阻为 R_g，工人身体电阻 $R_w = 500\ \Omega$。由于绝缘故障，2 A 电流流过金属机柜，电路如图 P2.43 所示。要使流过工人身体的电流不超过 0.1 mA，求解 R_g 的最大值。

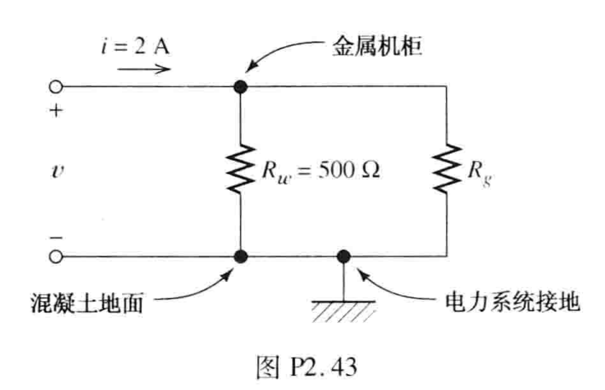


图 P2.43

P2.44 如果一负载吸收功率，工作电流介于 0 ~ 50 mA 之间，负载电压介于 4.7 ~ 5 V 之间。现有一个 15 V 的电压源可用。设计一个电路分压网络对该负载供电。你可以使用任意值的电阻，并给出每个电阻的最小功率等级。

P2.45 一电阻为 50 Ω 的负载希望承受电压为 5 V。现有一个 12.6 V 的电压源和任意值的电阻可用。设计一个合理的包括负载、电压源和另外一个电阻的电路图。给出另外一个电阻的值。

P2.46 一电阻为 1 kΩ 的负载希望获得的功率为 25 mA。现有一个 20 mA 的电流源和任意值的电阻可用。设计一个合理的包括负载、电流源和另外一个电阻的电路图。给出另外一个电阻的值。

P2.47 如图 P2.47 所示电路类似数模转换电路。假设电路右边无限延伸。求解 i_1、i_2、i_3 和 i_4。i_{n+2} 和 i_n 是如何关联的？i_{18} 为多少？（提示：参见 P2.12。）

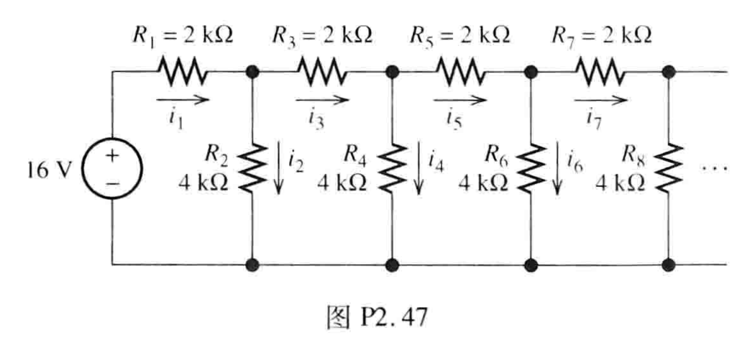


图 P2.47

2.4 节 节点电压分析法

*P2.48 写出如图 P2.48 所示电路求解节点电压的方程式，求 i_1 的值。

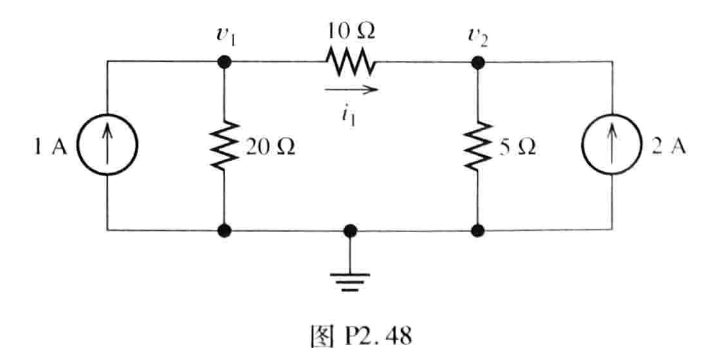


图 P2.48

* P2.49　求解如图 P2.49 所示电路的节点电压和 i_s。

P2.50　求解如图 P2.50 所示电路的节点电压和 i_s。当电流源方向反向改变后节点电压新的值为多少？前后值之间有什么关系？

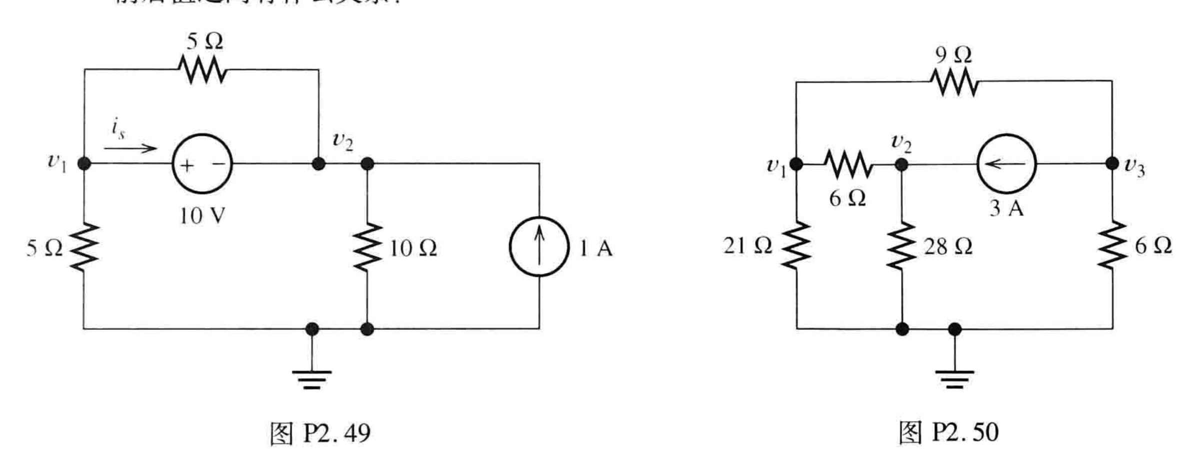


图 P2.49　　　　图 P2.50

P2.51　如图 P2.51 所示电路，$R_1=4\ \Omega$，$R_2=5\ \Omega$，$R_3=8\ \Omega$，$R_4=10\ \Omega$，$R_5=2\ \Omega$，$I_s=2$ A，求节点电压。

P2.52　如图 P2.52 所示电路，应用节点电压法求解电路，计算 i_1。选择参考节点使未知节点电压数量最少，20 Ω 的电阻对答案有何影响？请解释。

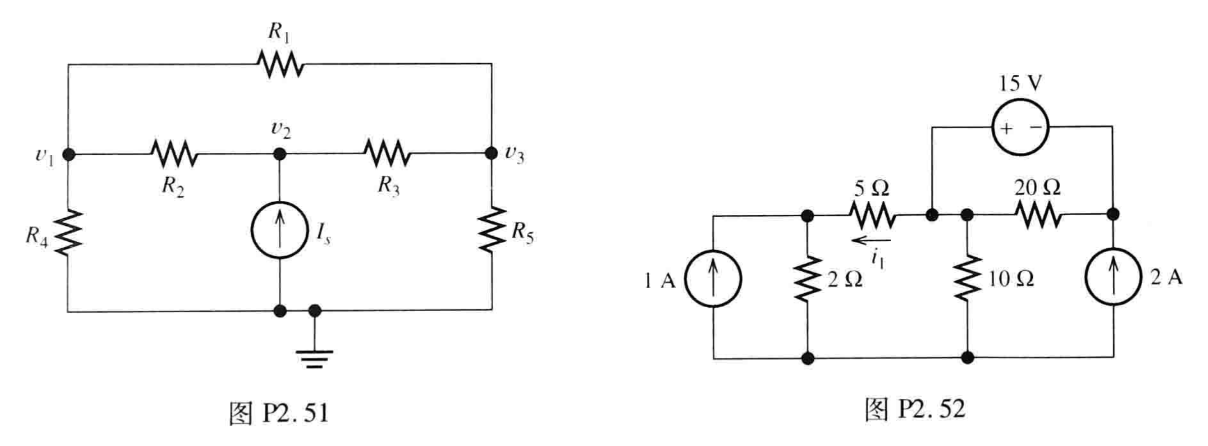


图 P2.51　　　　图 P2.52

P2.53　如图 P2.53 所示电路，$R_1=15\ \Omega$，$R_2=5\ \Omega$，$R_3=20\ \Omega$，$R_4=10\ \Omega$，$R_5=8\ \Omega$，$R_6=4\ \Omega$，$I_s=5$ A，求节点电压。

P2.54　在电路分析列写 KCL 方程式时必须遵守什么原则？为什么？

P2.55　如图 P2.55 所示电路，应用 MATLAB 的符号运算功能求出等效电阻的表达式。（提示：首先在 a、b 两端连接一个 1 A 电流源，然后应用节点电压法求电流源两端的电压，该电压就等于等效电阻值。）最后，假设 $R_1=15\ \Omega$，$R_2=5\ \Omega$，$R_3=20\ \Omega$，$R_4=10\ \Omega$，$R_5=8\ \Omega$，运行指令验证计算结果。

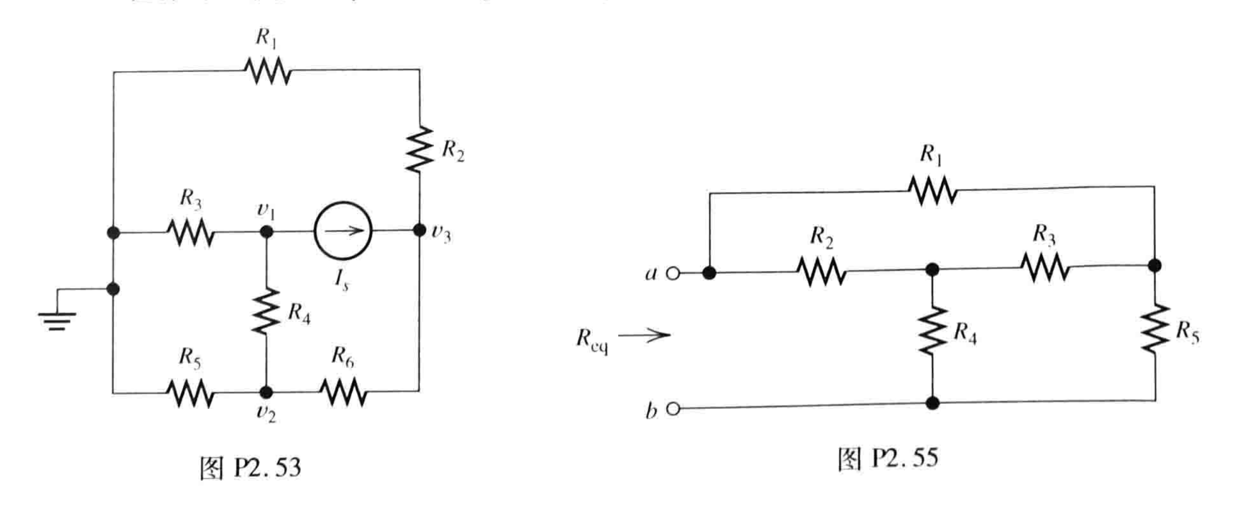


图 P2.53　　　　图 P2.55

*P2.56 求如图 P2.56 所示电路的节点电压和 i_x。

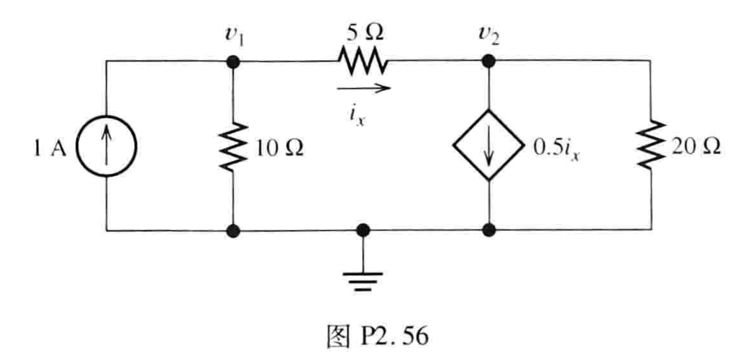


图 P2.56

*P2.57 求如图 P2.57 所示电路的节点电压。

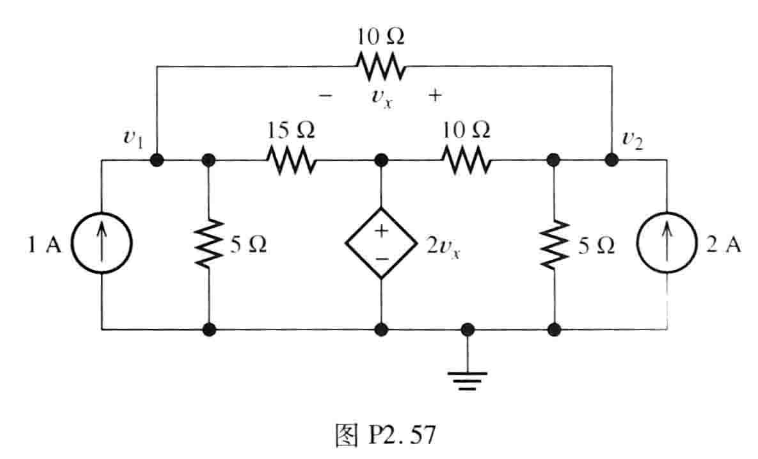


图 P2.57

P2.58 求如图 P2.58 所示电路的节点电压以及 16 Ω 电阻的功率。

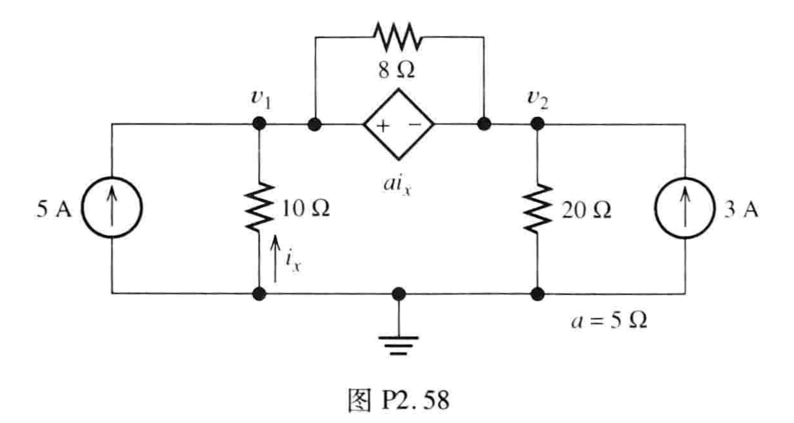


图 P2.58

P2.59 求如图 P2.59 所示电路的节点电压。

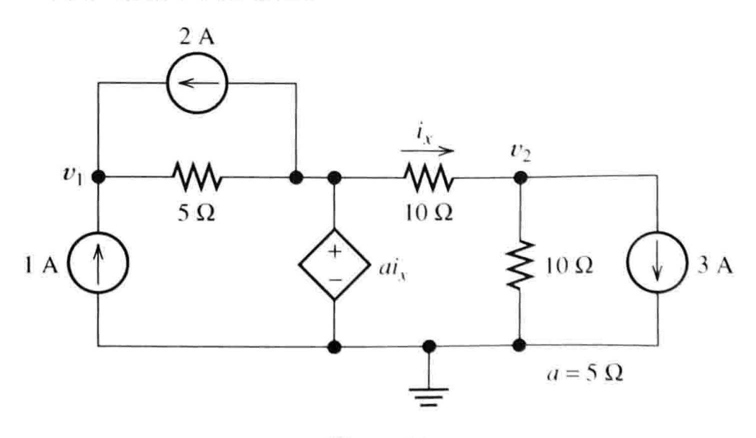


图 P2.59

P2.60 如图 P2.60 所示电路，求 a、b 两端的等效电阻。（提示：首先在 a、b 两端连接一个 1 A 的电流源，然后应用节点电压法求电流源两端的电压，该电压就等于等效电阻值。）

P2.61 如图 P2.61 所示电路，求 a、b 两端的等效电阻。（提示：首先在 a、b 两端连接一个 1 A 电流源，然后应用节点电压法求电流源两端的电压，该电压就等于等效电阻值。）

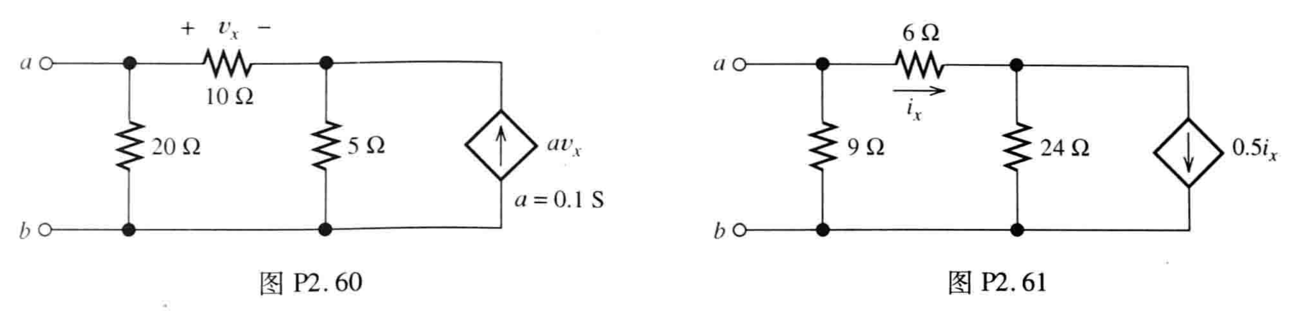


图 P2.60　　图 P2.61

P2.62 如图 P2.62 所示电路是一种特殊的分压器电路。应用节点电压法和 MATLAB 的符号运算功能求电压分配比例 V_{out}/V_{in}。注意节点电压变量是 V_1、V_2 和 V_{out}。

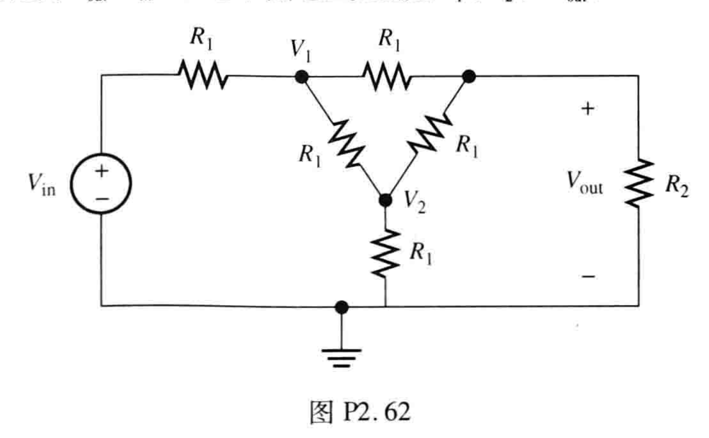


图 P2.62

P2.63 求如图 P2.63 所示电路的节点电压。用节点电压法时忽略网孔电流 i_1、i_2、i_3 和 i_4。

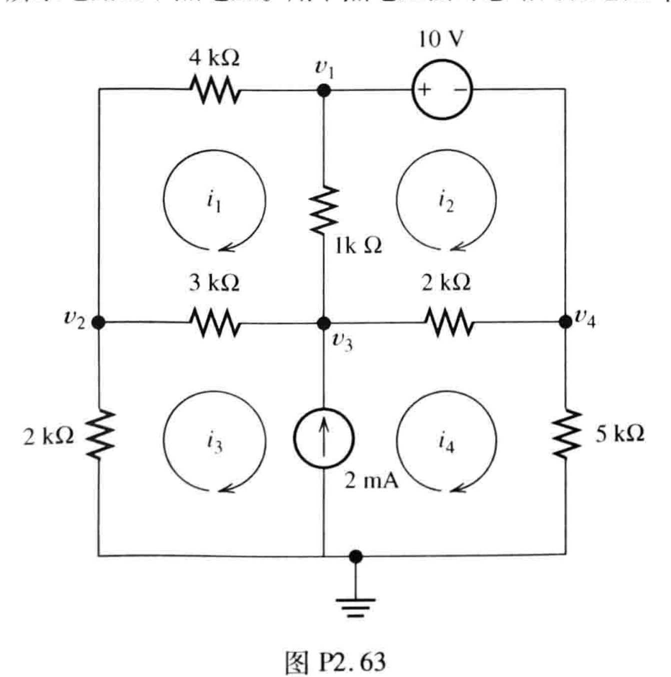


图 P2.63

P2.64 如图 P2.64 所示 1 Ω 电阻的立方体电路，节点 1、2、7 和参考节点是立方体前侧面，节点 3、4、5 和 6 是立方体后侧面。（作为一种选择，我们可以把该电路看成平面电路）为了求相邻节点之间的等效电阻，例如节点 1 和参考节点之间，我们在两节点之间连接一个 1 A 的电流源，然后应用节点电压法求 v_1，该电压就等于两节点之间的等效电阻。(a)应用 MATLAB 求解矩阵方程

GV = I得到节点电压和等效电阻值。(b)改变电路连接方式求对角线节点之间(如节点 2 和参考节点之间)的等效电阻。(c)最后求立方体前后侧面斜对角节点之间的等效电阻。[注：第(3)问可用 P2.16 中求解电阻的对称法来求解。第(1)、(2)问可根据对称法和电压相同节点之间可以短路的原理来求解。电压相同节点之间短路以后，可通过电阻串并联方法得到计算结果。当然，如果电阻是任意值，就不能用对称法求解，但是 MATLAB 求解方法仍然适用。]

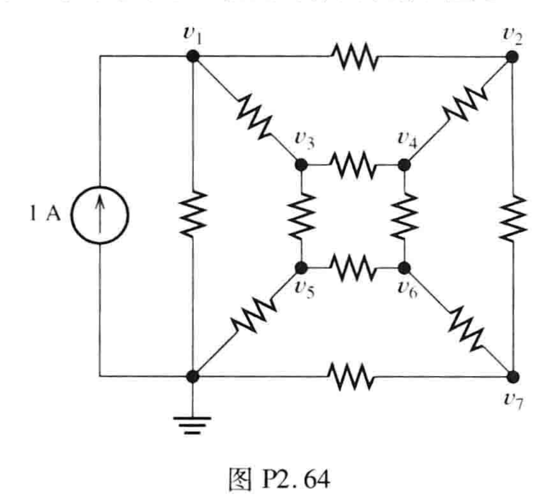


图 P2.64

2.5 节　网孔电流分析法

*P2.65　求如图 P2.65 所示电路的网孔电流以及 15 Ω 电阻的功率。

*P2.66　应用网孔电流分析法求图 P2.24 所示电路的电压 v_2 以及电源输出的功率。

*P2.67　应用网孔电流分析法求图 P2.48 所示电路的电流 i_1。

P2.68　如图 P2.68 所示电路，应用网孔电流分析法求电压源输出的功率。

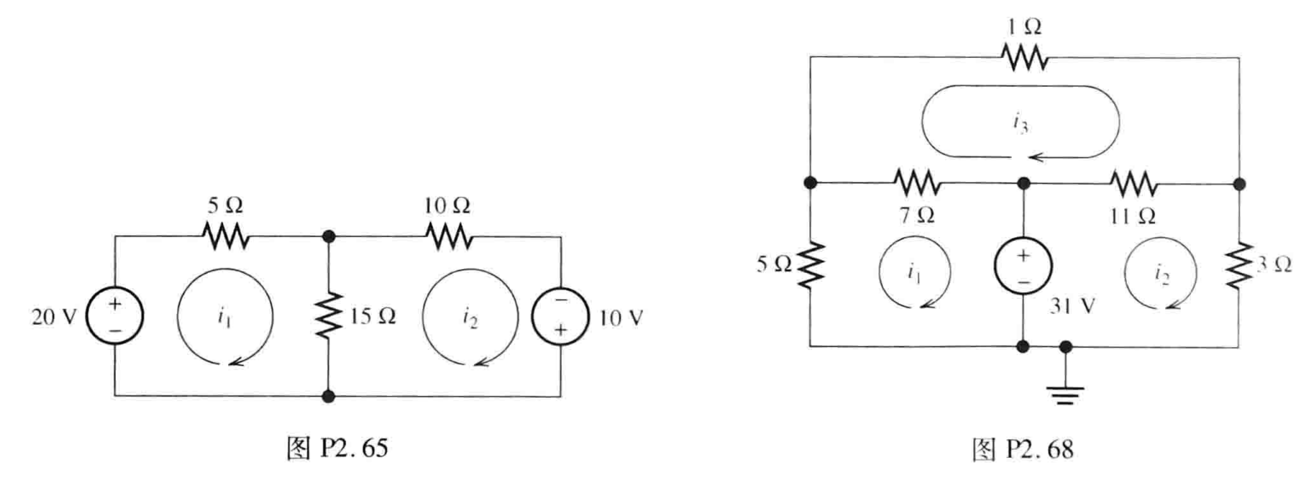


图 P2.65　　图 P2.68

P2.69　应用网孔电流分析法求图 P2.38 所示电路的电压 v。

P2.70　应用网孔电流分析法求图 P2.39 所示电路的电流 i_3。

P2.71　如图 P2.27 所示电路，i_1 是左边网孔顺时针方向的电流，i_2 是右边网孔顺时针方向的电流，i_3 是中间网孔顺时针方向的电流，应用网孔电流分析法求 i_1、i_2、i_3。

P2.72　如图 P2.23 所示电路，应用网孔电流分析法求电源输出功率以及电流 i_1、i_2。

P2.73　如图 P2.29 所示电路，应用网孔电流分析法求电流 i_1、i_2。首先设置 i_A 为电路左边网孔顺时针方向的电流，i_B 为电路右边网孔顺时针方向的电流，求出网孔电流 i_A、i_B 后再计算 i_1、i_2。

P2.74　如图 P2.28 所示电路，应用网孔电流分析法求电流 i_1、i_2。首先设置 i_A 为电路左边网孔顺时针方向的电流，i_B 为电路右边网孔顺时针方向的电流，求出网孔电流 i_A、i_B 后再计算 i_1、i_2。

P2.75　如图 P2.75 所示电路是一个简单的住宅配电电路。电阻 R_1、R_2 代表各种并联的负载如电灯或者额定工作电压为 120 V 的电气设备，电阻 R_3 是额定工作电压为 240 V 的电气设备，电阻 R_w 是电

线内阻，电阻 R_n是中线电阻。(a)应用网孔电流分析法求每个负载的电压以及中线电流。(b)如果电路故障导致中线断开，再求每个负载的电压，如果敏感设备如计算机或者等离子电视是 15 Ω电阻负载的一部分，分析它们会出现什么状况。

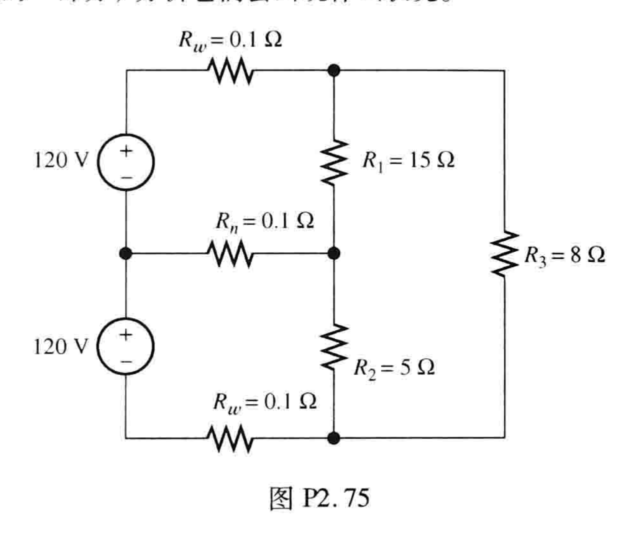


图 P2.75

P2.76 如图 P2.51 所示电路，$R_1 = 4\ \Omega$，$R_2 = 5\ \Omega$，$R_3 = 8\ \Omega$，$R_4 = 10\ \Omega$，$R_5 = 2\ \Omega$，$I_s = 2$ A，应用 MATLAB 和网孔电流分析法计算 v_3。

P2.77 如图 P2.55 所示电路，$R_1 = 6\ \Omega$，$R_2 = 5\ \Omega$，$R_3 = 4\ \Omega$，$R_4 = 8\ \Omega$，$R_5 = 2\ \Omega$，在 a、b 两端连接一个 1 V 电压源，然后用网孔电流法求电压源的电流，电源电压除以电压源的电流就等于 a、b 两端之间的等效电阻值。

P2.78 如图 P2.1(a)所示电路，在电路两端连接一个 1 V 电压源，然后用网孔电流法求电压源的电流，电源电压除以电压源的电流就等于电路两端之间的等效电阻值。用电阻串并联方法验证答案的正确性。

P2.79 如图 P2.63 所示电路，应用 MATLAB 求网孔电流。

2.6 节 戴维南和诺顿等效电路

*P2.80 如图 P2.80 所示的二端口电路，试求解其戴维南等效电路和诺顿等效电路。

*P2.81 将一个电池等效为一个电压源串联一个电阻，其开路电压为 9 V。当外接一个 100 Ω 负载电阻时，端电压下降至 6 V。试计算电池(等效为一个二端口电路)的内阻。

P2.82 如图 P2.82 所示的二端口电路，试求解其戴维南等效电路和诺顿等效电路。

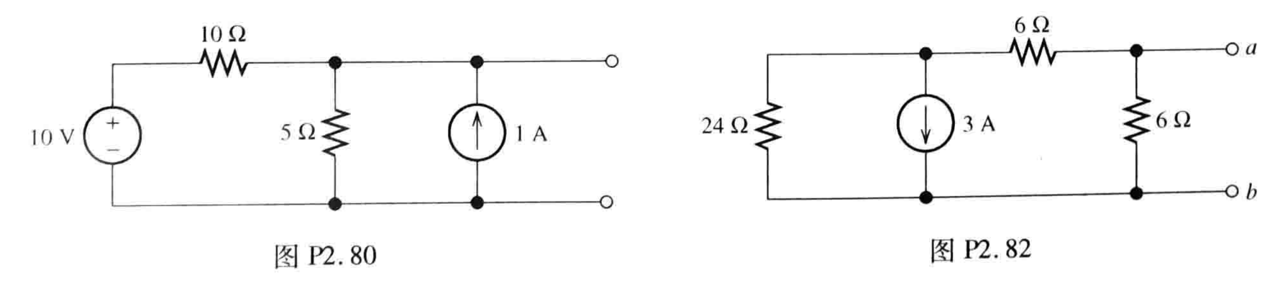


图 P2.80　　图 P2.82

P2.83 如图 P2.83 所示的二端口电路，试求解其戴维南等效电路和诺顿等效电路。

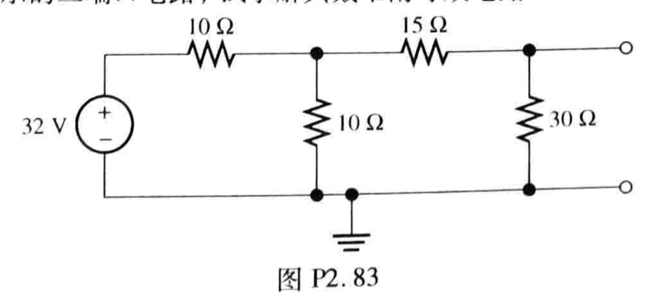


图 P2.83

P2.84　如图 P2.84 所示的二端口电路，试求解其戴维南等效电路和诺顿等效电路。注意观察电压源与电流源相对端点 a 和 b 的方向和极性。问：电路中 7 Ω 电阻的作用如何？请解释原因。

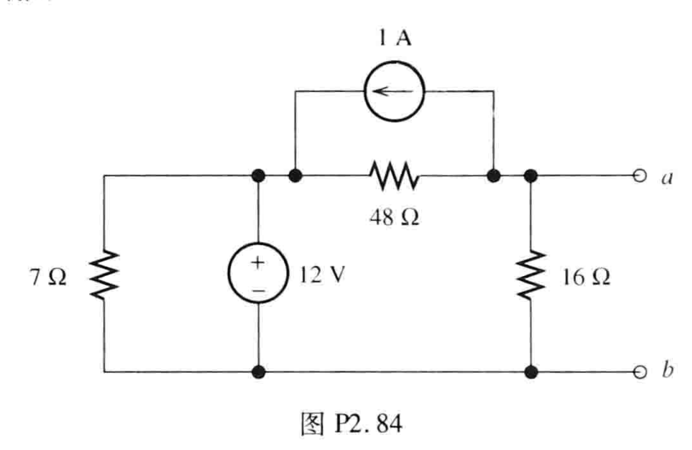


图 P2.84

P2.85　一汽车电池的开路电压为 12.6 V，当外接一个 0.1 Ω 电阻时电流为 100 A。试画出其戴维南等效电路和诺顿等效电路并计算电路的参数值。如果该电池短路，电流为多大？假设当电池开路时其存储能量保持不变，哪一种等效电路更加符合实际？请解释原因。

P2.86　一个二端口电路的开路电压为 15 V，连接一个 2 kΩ 负载电阻时，负载电压为 10 V。计算其戴维南等效电阻。

P2.87　如果对一个二端口电路分两次连接电阻值已知且不同的负载，测量负载电压，就可以确定其戴维南等效电路和诺顿等效电路。二端口电路连接一个 2.2 kΩ 负载电阻时，负载电压为 4.4 V，当负载电阻增加到 10 kΩ 时，负载电压为 5 V。计算其戴维南等效模型的电压和电阻。

P2.88　如图 P2.88 所示的二端口电路，试求解其戴维南等效电路和诺顿等效电路。

P2.89　如图 P2.80 所示的二端口电路，试求解其输出的最大功率。问：负载电阻为何值时电路达到最大功率输出？

P2.90　如图 P2.82 所示的二端口电路，试求解其输出的最大功率。问：负载电阻为何值时电路达到最大功率输出？

*P2.91　如图 P2.91 所示，负载 R_L 连接至戴维南等效电路。问：负载电阻为何值时电路达到最大功率输出？计算此最大功率值(提示：当心！如果不仔细思考，你可能会难以解决此问题)。

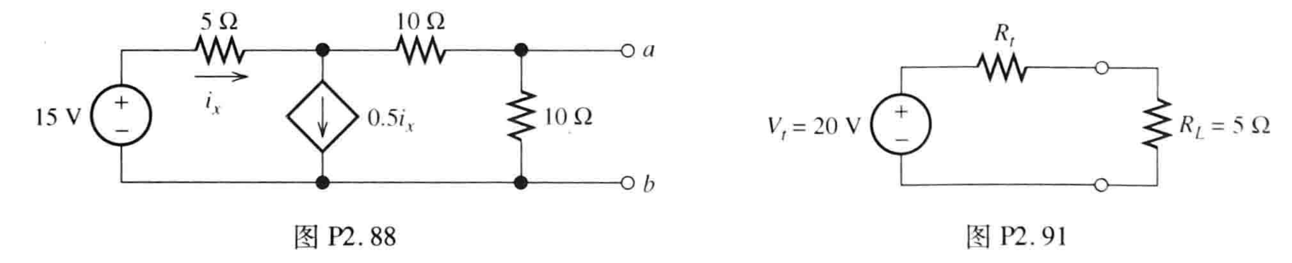


图 P2.88　　　　图 P2.91

P2.92　诺顿等效电路与负载 R_L 连接，试根据 I_n，R_t，R_L 求负载功率的表达式。假设 I_n、R_t 的值确定不变，R_L 的值可变，试证明当 $R_t = R_L$ 时负载功率最大，并计算此最大功率值。

P2.93　把一电池看成电压为 V_t 的电压源和电阻 R_t 串联。假设选择一个合适的负载电阻与电池连接使得输出功率最大。问：负载功率占电压源发出功率的多大比例？$R_L = 9R_t$ 时，负载功率占电压源发出功率的多大比例？通常，我们希望设计的电源系统能够把电池存储的能量尽量都传输给负载，这时我们需要电源输出功率最大吗？

2.7 节　叠加原理

*P2.94　如图 P2.94 所示，应用叠加原理计算电流 i。首先，将电流源置 0，求得电压源单独作用下的电流 i_v 值；再将电压源置 0，求得电流源单独作用下的电流 i_c 值。最后，叠加这些结果，就得到总电流 i。

*P2.95 如图 P2.49 所示，应用叠加原理计算电流 i_s。

P2.96 如图 P2.48 所示，应用叠加原理计算电流 i_1。首先，将1 A 电流源置0，求得2 A 电流源单独作用下的电流 i_1 值；再将2 A 电流源置0，求得1 A 电流源单独作用下的电流 i_1 值。最后，叠加这些结果，就得到总电流 i_1。

P2.97 如图 P2.34 所示，应用叠加原理计算电流 i_1。

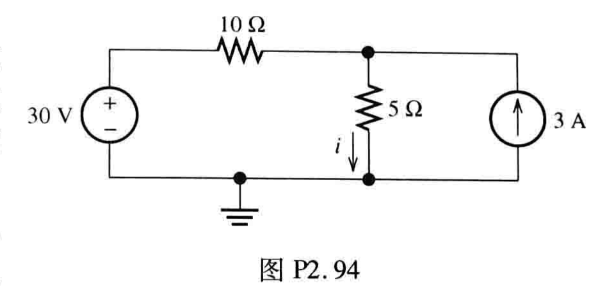


图 P2.94

P2.98 求解图 P2.24 的另一种方法是：假设电压 $v_2=1$ V，由电阻网络反推至电源端，应用欧姆定律、KCL 和 KVL 求解电压 v_s。由于电压 v_s 值是在 $v_2=1$ V 的假设下获得的，当实际电压 $v_s=12$ V 时，电压 v_2 的实际值也就得到了。

P2.99 利用习题 P2.98 中得到的分析方法求解图 P2.23 所示电路，假设电流 $i_2=1$ A。

P2.100 如图 P2.100 所示，计算电流 i_6。首先假设电流 $i_6=1$ A，反推至电流源求解出 I_s 值。然后根据比例关系得到当 $I_s=10$ A 时对应的 i_6 值。

P2.101 如图 P2.101 所示，元件 A 的特性为 $v=3i^2$，$i\geq0$，$v=0$，$i<0$。

(a) 当1 A 电流源置0 时，计算2 A 电流源独立作用下的电压 v；

(b) 当2 A 电流源置0 时，计算1 A 电流源独立作用下的电压 v；

(c) 计算两个电源同时作用下的电压 v。问：为什么不能应用叠加原理进行分析？

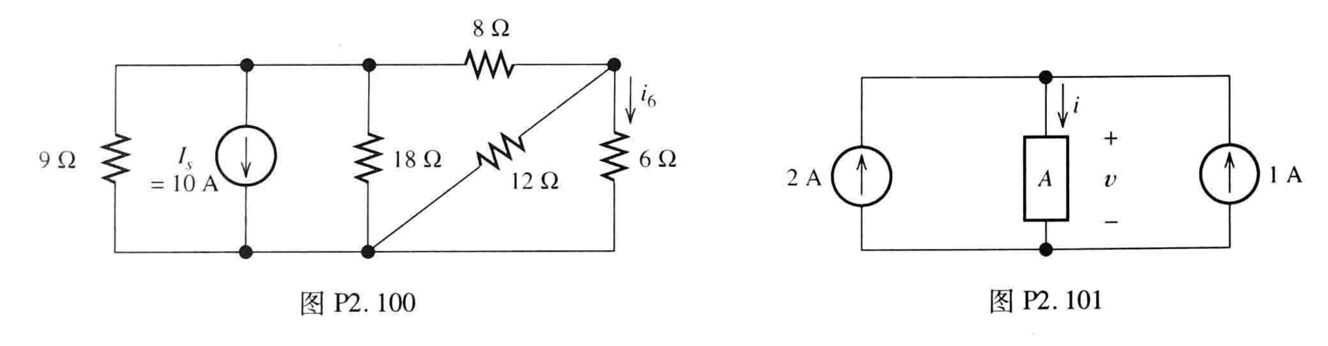


图 P2.100　　图 P2.101

2.8 节 惠斯通电桥

P2.102 (a) 如图 2.64 所示惠斯通电桥，当 $R_1=10$ kΩ，$R_3=3419$ Ω，$R_2=1$ kΩ 时电桥平衡，计算 R_x；

(b) 其他值不变，$R_2=10$ kΩ 时电桥平衡，计算 R_x。

*P2.103 如图 2.64 所示惠斯通电桥，$v_s=10$ V，$R_1=10$ kΩ，$R_2=10$ kΩ，$R_x=5932$ Ω，电流计可以看成 5 Ω 的电阻。(a) R_3 取多大值时电桥平衡？(b) 如果 R_3 值比 (a) 求出的值大 1 Ω，计算电流计流过电流。（提示：先把电流计断开，求出其余电路的戴维南等效电路，最后将戴维南等效电路和电流计连接求出电流。）

P2.104 如图 2.64 所示惠斯通电桥，理论上，R_1 和 R_3 可以为任何值。要使电桥平衡，R_1 和 R_3 的比值很重要。如果 R_1 和 R_3 的比值很小可能会产生什么实际问题？如果 R_1 和 R_3 的比值很大可能会产生什么实际问题？

P2.105 如图 2.64 所示惠斯通电桥，列出从电流计看过去的戴维南等效电压和电阻的表达式（换个说法，先把电流计断开，求出其余电路的戴维南等效电路）。当电桥平衡时，戴维南等效电压为多大？

测试题

下列测试题可以检验你对本章重要概念掌握和理解的程度。答案可以在附录 E 和完整的学生资源文件中找到。学生解答参见附录 F。

T2.1 把表 T2.1(a)和表 T2.1(b)匹配的条目连线(表 T2.1(b)中的条目可以多次使用或者不用)。

表 T2.1

项目(a)	项目(b)
a. 并联电阻的等效电阻……	1. 导体并联
b. 电阻并联连接在一起……	2. 并联
c. 供电负载通常成……	3. 任何电路
d. 串并联求解电路的方法适用于……	4. 电阻或导体并联
e. 分压原理适用于……	5. 所有电阻之和
f. 分流原理适用于……	6. 所有电阻倒数之和的倒数
g. 广义节点原理适用于……	7. 部分电路
h. 节点电压法适用于……	8. 平面电路
i. 本书中网孔电流法适用于……	9. 一个电流源与一个电阻串联
j. 二端口网络的戴维南等效电阻等于……	10. 导体串联
k. 二端口网络的诺顿电流源电流等于……	11. 线性元件组成的电路
l. 一个电压源并联一个电阻等效于……	12. 串联
	13. 电阻或导体并联
	14. 一个电压源
	15. 开路电压除以短路电流
	16. 一个电流源
	17. 短路电流

T2.2 如图 T2.2 所示电路，$v_s=96\ \mathrm{V}$，$R_1=6\ \Omega$，$R_2=48\ \Omega$，$R_3=16\ \Omega$，$R_4=60\Omega$，计算电流 i_s 和 i_4。

T2.3 如图 T2.3 所示电路，用 MATLAB 指令求解节点电压。

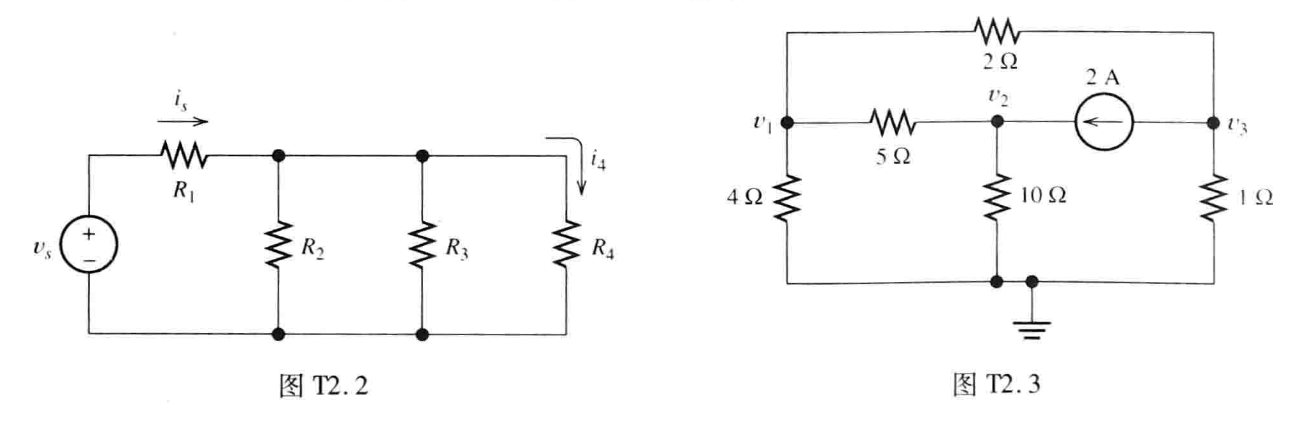


图 T2.2

图 T2.3

T2.4 如图 T2.4 所示电路，写出可以确保用于求解网孔电流的方程组。

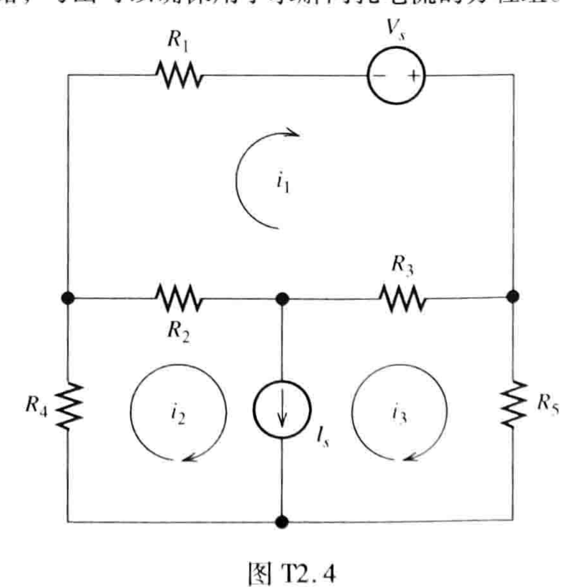


图 T2.4

T2.5　如图 T2.5 所示电路，确定 a、b 两端点之间电路的戴维南和诺顿等效模型。

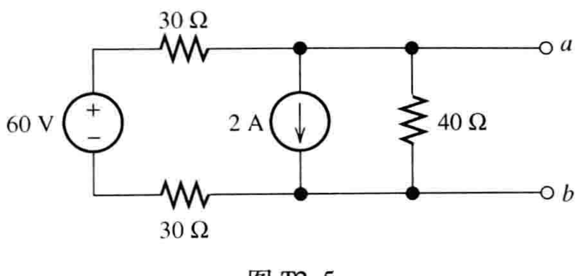


图 T2.5

T2.6　如图 T2.6 所示电路，根据等效原理，5 Ω 电阻流过的电流占总电流的多大百分比？5 Ω 电阻消耗的功率中有多少百分比是由 5 V 电源提供的？

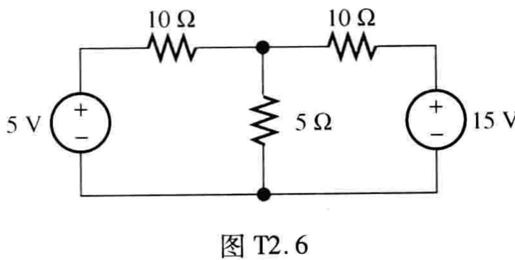


图 T2.6

第3章　电感与电容

本章学习目标

- 由电感或电容给定电压(电流)的时域表达式计算电流(电压)
- 计算平行板电容器的电容
- 计算电感或电容中储存的能量
- 能够描述电容和电感元件的典型物理结构，并能识别寄生效应
- 由耦合电感的电流计算电压
- 应用 MATLAB 中的符号工具箱分析电容和电感的伏安关系

本章介绍

前面我们已经学习了仅由电阻和电源构成的电路，本章将讨论另外两种电路元件：电感与电容。电阻元件可以将电能转换为热能，然而电感和电容都为储能元件，能够储存能量，也可以将能量释放到电路中。电容与电感都不会产生能量，只有储存在这些元件中的能量才会被提取出来。因此，它们与电阻一样都是无源元件。

电磁场理论是研究电荷效应的基本方法。然而，作为场论的精简内容，用电路理论研究电荷效应显得更加容易。电容具有储存电场能量的电路性质，而电感具有储存磁场能量的电路性质。

我们将了解到理想电感元件两端的电压正比于其电流的时域微分。另一方面，理想电容元件两端的电压却与其电流的时域积分成正比。

我们还将学习互感，它是一种通过磁场使得几个电感相互联系的电路特性。在第15章将发现互感是变压器的基本组成部分，在长距离电能输送中，变压器将起到关键的作用。

我们还将讨论以电感和电容为基础的几种传感器。例如，一个话筒主要由电容元件构成，其电容量随着声压的变化而变化。而互感的一种应用就是作为线性可变差分变压器，其铁心的位置变化可以转换为电压。

有时，表示位移等物理变量的电信号会受到噪声的干扰。例如，在一个汽车的主动悬架(受电子控制)中，位置传感器将会受到路面高低不平和车辆载重量的影响。为了精确获得表示每个车轮位置的电信号，有必要消除由路面高低不平引起的信号波动。自本章以后，我们将逐渐知道由电感和电容构成的滤波器可以实现这种功能。

完成本章的学习之后，我们将把第2章介绍的电路分析基本方法应用到含有电感和电容的电路中。

3.1　电容

电容器(简称电容)通常由一层较厚的绝缘层分离开的两层导体构成。图3.1所示为一个平行板电容器，其导体为两层平行的金属材料薄片。在两层平行板中的绝缘层称为电介质，可以为空气、聚酯薄膜、聚酯材料、聚丙烯、云母或其他各种绝缘材料。

首先来分析当电流流过一个电容器时会发生什么情况。在图3.2(a)中，假设电流是从

上向下流动。在大多数金属中，电流是由电子的运动形成的，按规定如果电流方向是向下的，那么电子的实际运动方向是向上的。随着电子的向上运动，堆积在电容器下层极板上，同时下层极板积累的负电荷在电介质中形成了电场。这个电场迫使电子以与积累在下层极板的相同速度离开上层极板。因此随之形成了流过电容器的电流。随着电荷的不断累积，电容器的两端也呈现出一定的电压。

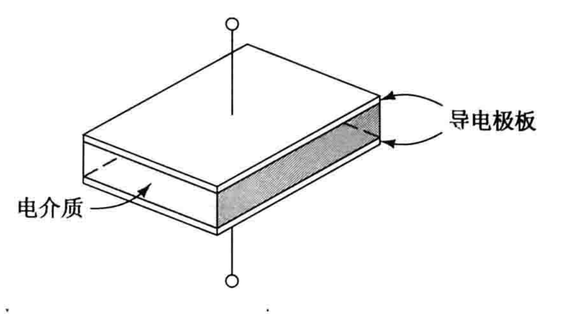


图3.1　由绝缘层分离开的两层导体构成的平行板电容器

累积在每个极板上的电荷即为储存在电容器中的电荷。然而，在两层极板上储存的总电荷始终为零，这是因为一个极板上的正电荷与另外一个极板上负电荷的数量相同。

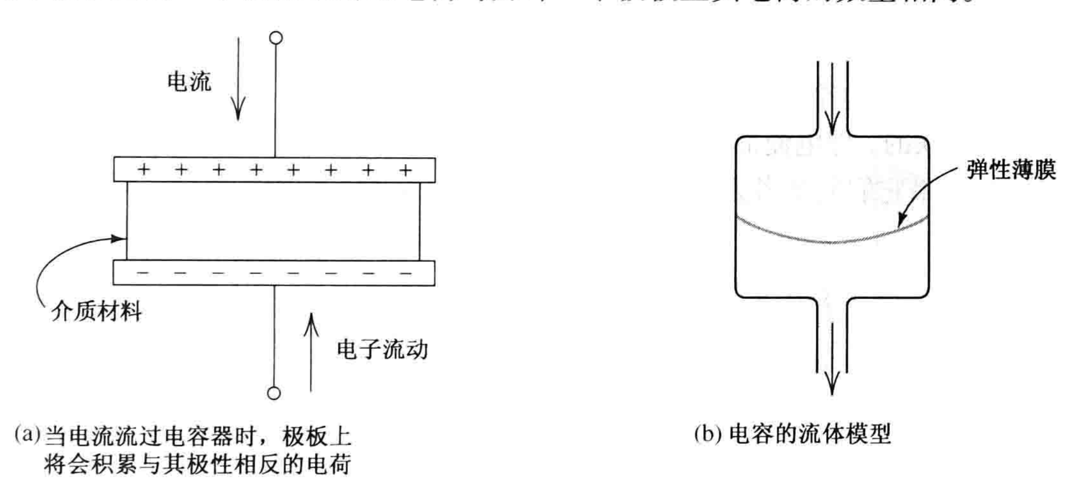


图3.2　电容器及其流体模型

3.1.1　流体模型

图3.2(b)所示为电容器的流体模型，相当于一个由弹性薄膜将入口和出口隔离开的蓄水池。当液体从入口流入时，薄膜受到延伸产生一个反作用力(相当于电容电压)以阻止更多液体流入。从薄膜的初始状态到受到延伸后增加的液体流量就相当于储存在电容器每个极板上的电荷量。

3.1.2　根据电压计算储存的电荷

在一个理想电容器中，储存的电荷 q 与两极板间的电压成正比，即：

$$q = Cv \tag{3.1}$$

这个比例常数即电容量 C，其单位是法拉(F)。法拉等于库仑每伏特。

更准确地说，电荷 q 实际上为电压 v 参考极性为正的极板上的总电荷。因此，如果电压 v 为正，那么正电荷位于电压 v 参考极性为正的极板上；另一方面，如果电压 v 为负，那么负电荷位于电压 v 参考极性为正的极板上。

1 F 的电容是非常大的。在绝大多数情形中，我们所用的电容都在几 pF 与 00.1 F 之间，其中 1 pF $=10^{-12}$ F。计算机芯片的性能也与 fF(1 fF $=10^{-15}$F)级的电容量有密切的关系。

3.1.3 电容的电压与电流关系

我们知道电流即为单位时间内流过的电荷。对式(3.1)进行时间微分，可得:

$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Cv) \tag{3.2}$$

通常电容 C 不是时间的函数(前面所提到的电容式麦克风除外)。因此，电容的电压电流关系为:

$$i=C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{3.3}$$

式(3.1)和式(3.3)表明随着电压的增加，电流将会流过电容，同时电荷也会累积在每个极板上面。如果电压保持常数不变，则电荷也保持不变，并且电流为零。因此，在直流电压的稳定作用下，电容器相当于开路。

图3.3所示为电容的符号以及电压电流的参考方向，其中，参考方向是关联的，即电流的参考方向是从电压的参考极性的正端流入。如果它们的参考方向为非关联，那么式(3.3)将多一个负号:

$$i=-C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{3.4}$$

有时，需要强调电压与电流都是时间的函数，则记为 $v(t)$ 和 $i(t)$。

图3.3 电容的符号以及电压 $v(t)$ 和电流 $i(t)$ 的参考方向

例3.1 由给定电压计算电容电流。

图3.4(b)为施加在1 μF 电容两端的电压波形 $v(t)$，试绘制电容中储存的电荷与电流随时间变化的波形。

解: 储存在电容器极板面的电荷可由式(3.1)确定。[我们知道 $q(t)$ 表示上面极板的电荷，是因为这个极板对应于 $v(t)$ 参考极性的正端。]因此:

$$q(t)=Cv(t)=10^{-6}v(t)$$

其波形如图3.4(c)所示。

由式(3.3)可得流过电容器的电流为

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=10^{-6}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$$

显然，电压的微分即为电压随时间变化波形的斜率。

因此，当 $0<t<2$ μs 时，有:

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{10\text{ V}}{2\times10^{-6}\text{ s}}=5\times10^{6}\text{ V/s}$$

且

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=10^{-6}\times5\times10^{6}=5\text{ A}$$

当 2 μs $<t<$ 4 μs 时，电压为常数($\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=0$)，电流为0。最后，当 4μs $<t<$ 5μs 时，有:

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{-10\text{ V}}{10^{-6}\text{ s}}=-10^{7}\text{ V/s}$$

且

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = 10^{-6} \times (-10^7) = -10\ \mathrm{A}$$

图 3.4(d)所示为电流 $i(t)$ 的波形。

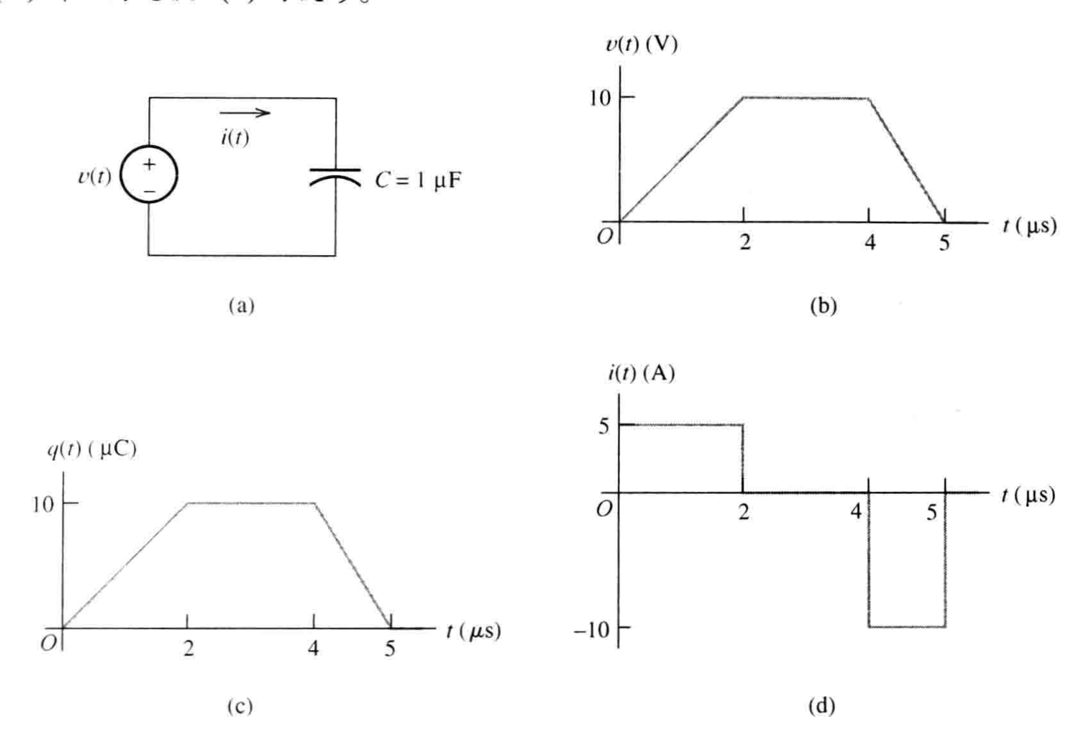


图 3.4　例 3.1 的电路和波形

通过本例可以看出，当电压增加时，电流流过电容器，电荷将累积在极板上。当电压为常数时，电流为零，电荷也为常数。当电压减小时，电流以相反的方向流过电容器，储存的电荷也将从电容器释放出来。

练习 3.1　一个 2 μF 电容上的电荷为

$$q(t) = 10^{-6}\sin(10^5 t)\ \mathrm{C}$$

试求电压与电流的表达式。

答案： $v(t) = 0.5\sin(10^5 t)\mathrm{V}$，$i(t) = 0.1\cos(10^5 t)\mathrm{A}$。

3.1.4　由电流计算电容电压

假如我们已知流过电容 C 的电流 $i(t)$，需要计算电荷与电压。由于电流是单位时间流过的电荷，只要对电流积分则可计算出电荷。通常在电路分析的问题中，在给定的初始时刻 t_0，电荷的初始值 $q(t_0)$ 是已知的。因此，可得电荷随时间变化的表达式为

$$q(t) = \int_{t_0}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t + q(t_0) \tag{3.5}$$

将式(3.1)代入式(3.5)，可解得电压 $v(t)$ 为

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t + \frac{q(t_0)}{C} \tag{3.6}$$

电容两端电压的初始值为

$$v(t_0) = \frac{q(t_0)}{C} \tag{3.7}$$

将上式代入式(3.6),可得:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t + v(t_0) \tag{3.8}$$

通常取初始时刻 $t_0 = 0$。

例 3.2 由给定电流计算电容电压。

在 $t_0 = 0$ 之后,流过 0.1 μF 电容的电流为:

$$i(t) = 0.5\sin(10^4 t)$$

(其中正弦函数的相角单位为弧度。)电容器电荷的初始值为 $q(0) = 0$。试绘制出 $i(t)$、$q(t)$ 和 $v(t)$ 随时间变化的波形。

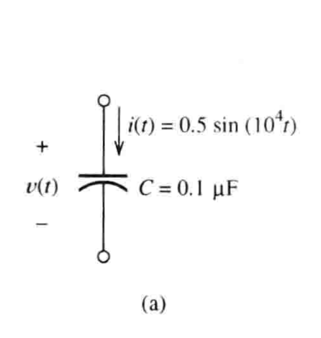
解: 首先,根据式(3.5)可得电荷的表达式为

$$\begin{aligned} q(t) &= \int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t + q(0) \\ &= \int_0^t 0.5\sin(10^4 t)\,\mathrm{d}t \\ &= -0.5\times10^{-4}\cos(10^4 t)\Big|_0^t \\ &= 0.5\times10^{-4}[1-\cos(10^4 t)] \end{aligned}$$

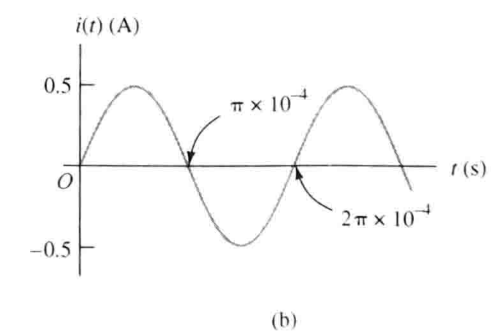
由式(3.1)可得电压的表达式为

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{q(t)}{C} = \frac{q(t)}{10^{-7}} \\ &= 500[1-\cos(10^4 t)] \end{aligned}$$

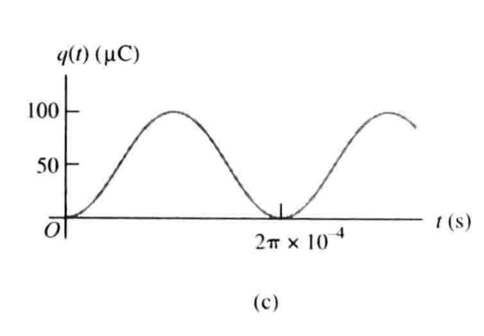
图 3.5 所示为 $i(t)$、$q(t)$ 和 $v(t)$ 的波形。可以看出,在 $t = 0$ 之后的瞬间,电流为正,电荷 $q(t)$ 增加。当经过半个周期之后,电流为负,电荷 $q(t)$ 减小。当一个周期刚结束时,电荷与电压又回到了零。



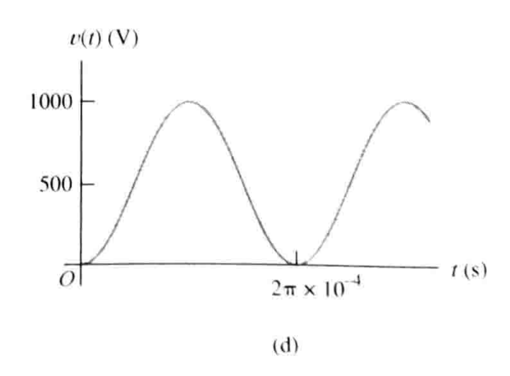
(a)



(b)



(c)



(d)

图 3.5 例 3.2 的波形

3.1.5 储存的能量

一个电路元件的功率为电流与电压的乘积(假设其参考方向是关联的)：

$$p(t)=v(t)i(t) \tag{3.9}$$

将式(3.3)的电流代入上式，有：

$$p(t)=Cv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{3.10}$$

假设一个电容电压的初始值为 $v(t_0)=0$，那么电容储存的初始能量为零，我们说电容未被充电。进一步分析，假设从时间 t_0 到时间 t 这段期间，电容电压从0变为 $v(t)$。随着电压幅值的增加，能量就以电场的形式储存在两极板之间。

如果对功率从 t_0 到 t 这段期间进行积分，可得能量为：

$$w(t)=\int_{t_0}^{t}p(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.11}$$

将式(3.10)代入上式，有：

$$w(t)=\int_{t_0}^{t}Cv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \tag{3.12}$$

消去积分时间变量，将积分限用相应的电压替代，有：

$$w(t)=\int_{0}^{v(t)}Cv\,\mathrm{d}v \tag{3.13}$$

进行积分计算后，得：

$$w(t)=\frac{1}{2}Cv^2(t) \tag{3.14}$$

上式表明了储存在电容中的能量可以返给电路。

由式(3.1)解得 $v(t)$，代入式(3.14)，可得电容中储存能量的另外两个表达式：

$$w(t)=\frac{1}{2}v(t)q(t) \tag{3.15}$$

$$w(t)=\frac{q^2(t)}{2C} \tag{3.16}$$

例3.3 计算电容的电流、功率和能量。

图3.6(a)为施加在10 μF电容两端的电压波形 $v(t)$。试求出电流、功率和能量，并绘制出它们在0～5 s之间的波形。

解：首先，写出电压随时间变化的表达式：

$$v(t)=\begin{cases}1000t\ \mathrm{V}, & 0<t<1\\ 1000\ \mathrm{V}, & 1<t<3\\ 500(5-t)\ \mathrm{V}, & 3<t<5\end{cases}$$

根据式(3.3)，求得电流的表达式：

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$i(t) = \begin{cases} 10 \times 10^{-3}\ \mathrm{A}, & 0 < t < 1 \\ 0\ \mathrm{A}, & 1 < t < 3 \\ -5 \times 10^{-3}\ \mathrm{A}, & 3 < t < 5 \end{cases}$$

电流 $i(t)$ 的波形如图 3.6(b) 所示。

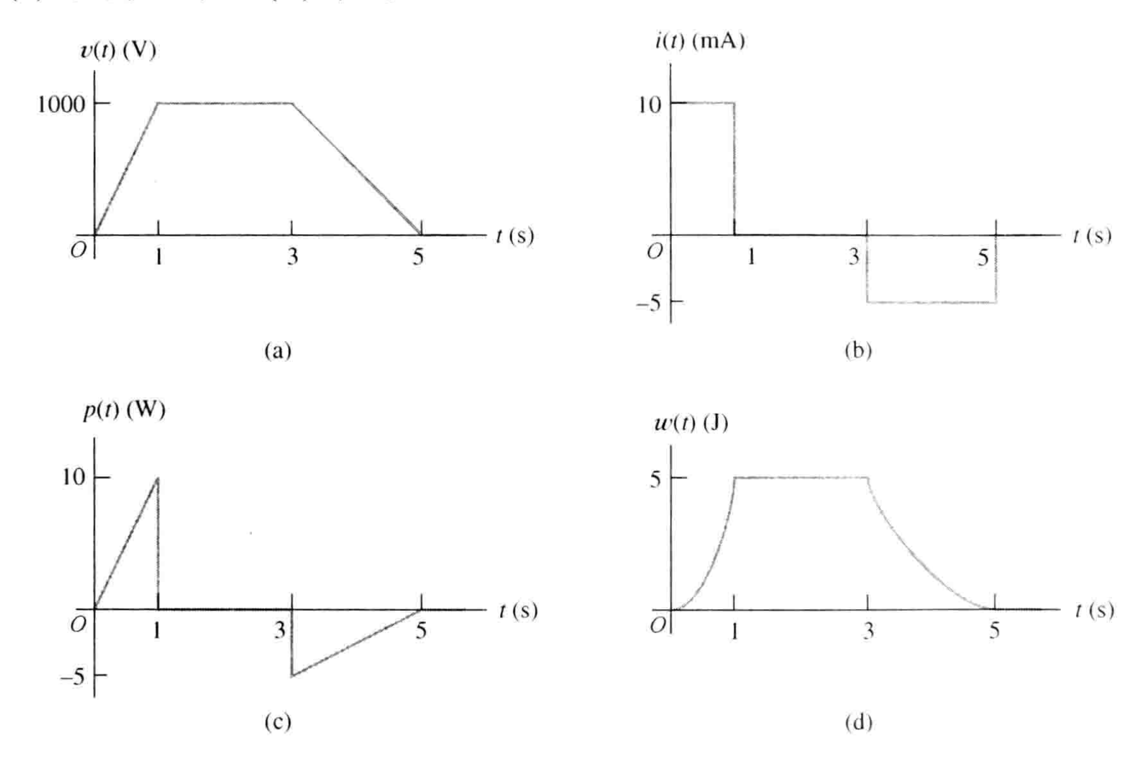


图 3.6 例 3.3 的波形

其次，将电压与电流相乘可得功率的表达式：

$$p(t) = v(t)i(t)$$

$$p(t) = \begin{cases} 10t\ \mathrm{W}, & 0 < t < 1 \\ 0\ \mathrm{W}, & 1 < t < 3 \\ 2.5(t-5)\ \mathrm{W}, & 3 < t < 5 \end{cases}$$

功率 $p(t)$ 的波形如图 3.6(c) 所示。注意到在 $t=0$ 与 $t=1$ 期间，功率为正，表明对电容进行充电。在 $t=3$ 与 $t=5$ 期间，功率为负，能量从电容释放到外电路。

最后，根据式(3.14)得到电容中储存能量的表达式：

$$w(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)$$

$$w(t) = \begin{cases} 5t^2\ \mathrm{J}, & 0 < t < 1 \\ 5\ \mathrm{J}, & 1 < t < 3 \\ 1.25(5-t)^2\ \mathrm{J}, & 3 < t < 5 \end{cases}$$

能量 $w(t)$ 的波形如图 3.6(d)。

练习 3.2 图 3.7 所示为流过 0.1 μF 电容的电流波形。当 $t_0 = 0$ 时，电容两端的电压为零。试求出电荷、电压、功率和能量随时间变化的表达式，并绘制出它们的波形。

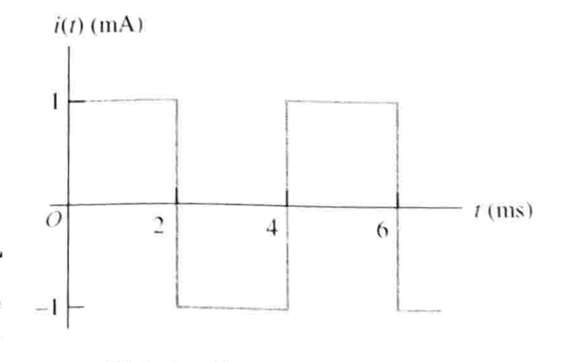
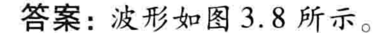


图 3.7 练习 3.2 的方波电流



答案：波形如图 3.8 所示。

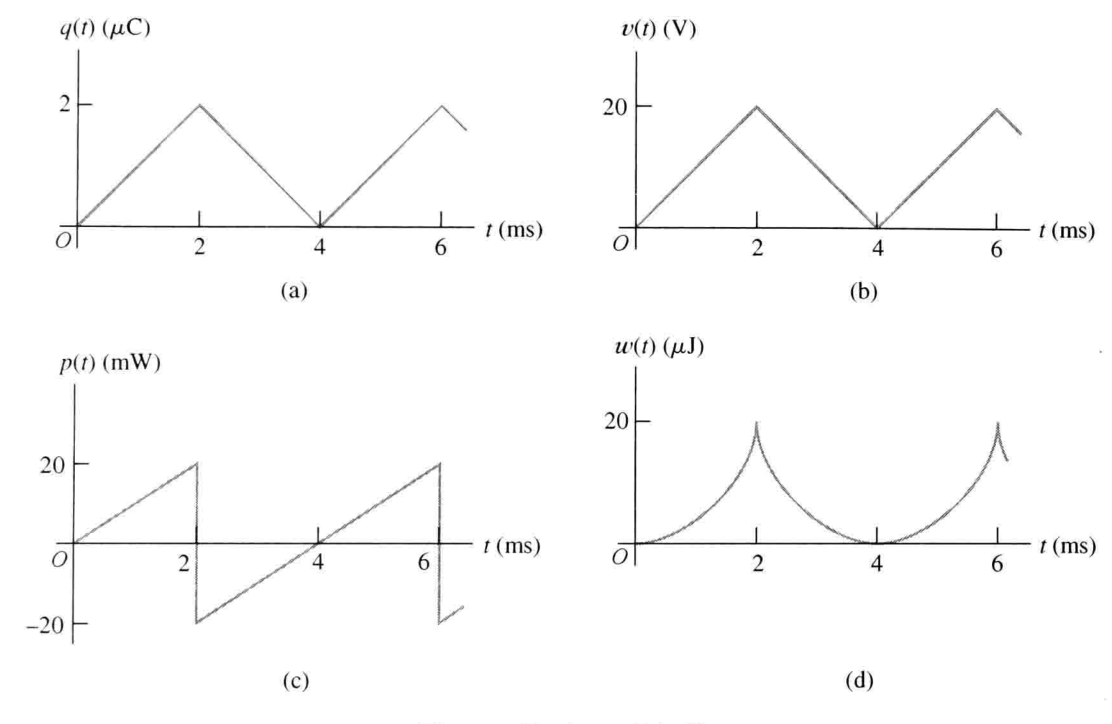


图 3.8　练习 3.2 的解答

3.2　电容的串联与并联

3.2.1　电容的并联

图 3.9 所示为 3 个电容的并联。当然，在一个并联电路中，每个元件两端的电压是相同的。由式(3.3)可以根据电压求出电流。因此，可以写成：

$$i_1 = C_1 \frac{dv}{dt} \tag{3.17}$$

$$i_2 = C_2 \frac{dv}{dt} \tag{3.18}$$

$$i_3 = C_3 \frac{dv}{dt} \tag{3.19}$$

根据 KCL，可得：

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \tag{3.20}$$

将式(3.17)、式(3.18)和式(3.19)代入式(3.20)，可得：

$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + C_3 \frac{dv}{dt} \tag{3.21}$$

上式可写成：

$$i = (C_1 + C_2 + C_3) \frac{dv}{dt} \tag{3.22}$$

$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$

图 3.9　3 个电容的并联

因此，可以定义多个电容并联的等效电容为各个电容之和：

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 \tag{3.23}$$

根据式(3.23)的定义，得：

$$i = C_{eq}\frac{dv}{dt} \tag{3.24}$$

可见，流过等效电容的电流与流过并联电容的总电流是一致的。

将并联电容相加可得其等效电容，它类似于电阻串联的情况。

3.2.2 电容的串联

按照与并联电容类似的分析方法，3 个电容串联的等效电容为

$$C_{eq} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3} \tag{3.25}$$

可以看出，电容的串联类似于电阻的并联。

为了从低电压的电源获得较高的电压，可以将 n 个电容并联，再与电源并联进行充电，然后，通过开关切换电路，将每个电容与电源串联起来，即可获得较高的电压。比如，在一些心脏起搏器中，仅有 1 节 2.5 V 的电池，但是对心肌刚开始的起搏需要 5 V 的电压。这里，可以通过 2.5 V 的电池对两个并联电容充电，然后通过开关切换电路，将这两个电容串联，能够为心脏提供一个 5 V 的脉冲电压。

练习 3.3 根据图 3.10 所示的 3 个电容推导式(3.25)。

练习 3.4 (a)两个串联的电容分别为 2 μF 和 1 μF，试求其等效电容。(b)如果这两个电容并联，再求其等效电容。

答案：(a)2/3 μF。(b)3 μF。

图 3.10 3 个电容的串联

3.3 电容器的物理特征

3.3.1 平行板电容器的电容

图 3.11 所示为一个平行板电容器及其外形尺寸。每个极板的面积为 A(实际上 A 为每个单极板的面积)。如果矩形极板的宽度为 W，长度为 L，则其面积为 $A = W \times L$。该电容器的极板是平行的，其间距为 d。

如果两极板的间距 d 远小于它们的宽度和长度，则该电容器的电容近似为

$$C = \frac{\epsilon A}{d} \tag{3.26}$$

其中，ϵ 为两极板间材料的介电常数。对于真空介质，其介电常数为

$$\epsilon = \epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m}$$

对于其他物质，介电常数为

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \tag{3.27}$$

其中，ϵ_r为相对介电常数。表 3.1 给出了几种物质的相对介电常数。

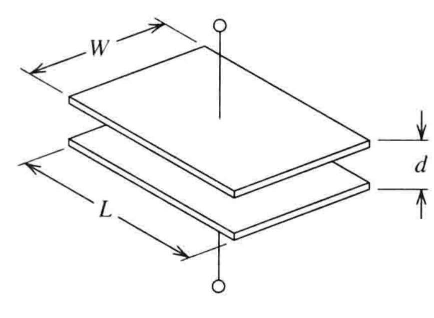


图 3.11　一个平行板电容器及其外形尺寸

表 3.1　几种物质的相对介电常数

物质	相对介电常数
空气	1.0
钻石	5.5
云母	7.0
聚酯薄膜	3.4
石英	4.3
二氧化硅	3.9
水	78.5

例 3.4　计算给定物理尺寸的电容器的电容。

计算一个平行板电容器的电容量，矩形极板的尺寸为 10 cm×20 cm，其间距为 0.1 mm。电介质为空气。如果电介质为云母，再计算其电容量。

解：首先得到极板的面积：

$$A = L \times W = (10 \times 10^{-2}) \times (20 \times 10^{-2}) = 0.02 \text{ m}^2$$

由表 3.1 可知，空气的相对介电常数为 1。因此空气的介电常数为

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = 1.00 \times 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

那么，其电容量为

$$C = \frac{\epsilon A}{d} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 0.02}{10^{-4}} = 1770 \times 10^{-12} \text{ F}$$

云母电介质的相对介电常数为 7.0。因此，其电容量应该为电介质为空气或真空时的 7 倍：

$$C = 12\,390 \times 10^{-12} \text{ F}$$

练习 3.5　为了设计一个 1 μF 的电容器，选择长方形极板的宽度为 2 cm，电介质为聚酯薄膜，其厚度为 15 μm，试求长方形极板的长度。

答案：$L = 24.93$ m。

3.3.2　实际电容器

对于便携式计算机和移动电话等小型电子电路而言，为了使电容值只有 1 μF 左右，平行板电容器的尺寸显得就太大了。通常情况下，为了使电容器的尺寸变得更小，采用由两层绝缘层分隔开的卷筒结构。为了在卷极板之前将它们分隔开，必须从卷筒的末端将每个极板接上连接线。这类电容器的结构如图 3.12 所示。

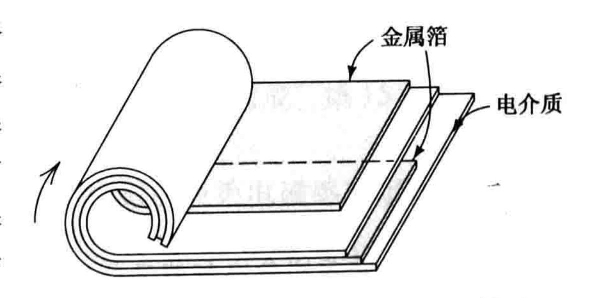


图 3.12　实际电容器的极板是卷成筒状的，由两层绝缘层分隔开。为了将极板分隔开，在卷筒的两端需要对每个极板接上连接线

为了使电容器的电容量很小，则需要的绝缘层应该很薄，其介电常数要求很高。然而，当电场强度（伏特每米）太高时，绝缘材料将会被击穿而变为电导体。因此，实际的电容应有额定电压值。对于给定的电压，绝缘层越薄，则电场强度越高。显然，在工程设计中要综合考虑尺寸和额定电压这两个因素。

3.3.3 电解电容器

在电解电容中，一个极板是金属铝或金属钽，金属表面的氧化层为绝缘层，电解液则为另外“一块”极板。含氧化物的金属极板浸入在电解液中。

这种结构将会使得单位体积的电容量更高。然而，电压只能按照固定极性施加到电解电容上。如果施加电压的极性反向，绝缘层将产生化学反应，在两个极板之间将形成导电通路(施加电压的正端通常标注在电容器的外壳上)。另一方面，电容器上施加电压的负端通常都是聚乙烯、聚脂薄膜等材料。如果需要的电容量较大，且施加电压的极性不会改变，设计者都会选用电解电容。

3.3.4 寄生效应

实际电容器的电路模型不仅仅是一个简单的电容。图3.13为一个电容器复杂的电路模型。除了电容 C 以外，由于极板本身存在电阻，因此用串联电阻 R_s 表示。由于电流流过电容器时会产生磁场，因此存在一个串联的电感 L_s(本章后面将讨论电感)。最后，实际的材料中没有理想的绝缘体，因此并联电阻 R_p 表明了绝缘层的导电能力。

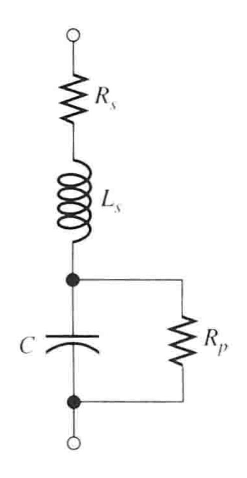


图3.13 实际电容器的电路模型，包含了寄生元件 R_s、L_s 和 R_p

我们将 R_s、L_s 和 R_p 称为寄生元件。当设计电容器时，在兼顾外形尺寸和额定电压的同时，要尽量使寄生电路元件的影响最小化。然而，寄生效应在一定范围内始终存在。在设计电路时，一定要仔细选用电路元件以避免寄生效应影响电路的正常工作。

例3.5 什么导致能量缺少了?

如图3.14所示电路。在 $t=0$ 时刻之前，电容 C_1 所充的电压为 $v_1=100$ V，另一个电容没有被充电(即 $v_2=0$)。在 $t=0$ 时刻开关闭合。试求开关闭合前后两个电容中储存的总能量。

解: 每个电容储存的初始能量为

$$w_1=\frac{1}{2}C_1v_1^2=\frac{1}{2}(10^{-6})(100)^2=5\ \text{mJ}$$

$$w_2=0$$

总的能量为

$$w_{\text{total}}=w_1+w_2=5\ \text{mJ}$$

为了计算出开关闭合以后的电压和储存的能量，可以利用当开关闭合以后上方极板总电荷守恒的规律，因为没有通路让电荷离开该电路。

$t=0$ 时刻之前，C_1 上方极板储存的电荷为

$$q_1=C_1v_1=1\times10^{-6}\times100=100\ \mu\text{C}$$

此外，C_2 的初始电荷为零：

$$q_2=0$$

因此，当开关闭合后，等效电容的电荷为

$$q_{eq} = q_1 + q_2 = 100\ \mu\text{C}$$

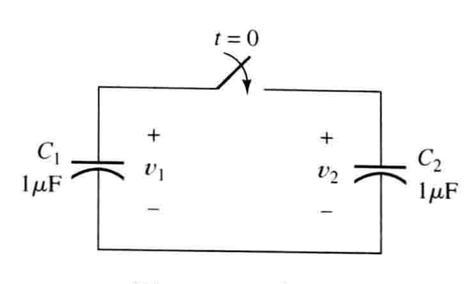


图 3.14　见例 3.5

注意：当开关闭合后，电容器为并联结构，其等效电容为

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 2\ \mu\text{F}$$

等效电容两端的电压为

$$v_{eq} = \frac{q_{eq}}{C_{eq}} = \frac{100\ \mu\text{C}}{2\ \mu\text{F}} = 50\ \text{V}$$

显然，当开关闭合后，$v_1 = v_2 = v_{eq}$。

此时，当开关闭合后每个电容储存的能量为

$$w_1 = \frac{1}{2}C_1 v_{eq}^2 = \frac{1}{2}(10^{-6})(50)^2 = 1.25\ \text{mJ}$$
$$w_2 = \frac{1}{2}C_2 v_{eq}^2 = \frac{1}{2}(10^{-6})(50)^2 = 1.25\ \text{mJ}$$

开关闭合总的能量为

$$w_{total} = w_1 + w_2 = 2.5\ \text{mJ}$$

可见，开关闭合后的总能量仅有开关闭合前的一半。那是什么导致能量缺少了？

通常认为是由于寄生电阻的存在而吸收了部分能量。一个电容器没有一些寄生效应是不可能的。即使将导线和极板都采用超导材料，仍然会存在寄生电感。如果在电路模型中包括了寄生电感，那么总的能量应该保持不变。（第 4 章将分析具有时变电压和电流的 LC 电路。）

换句话说，找不到一个与图 3.14 所示模型相对应的实际电路。因此，适当用非理想模型表示实际电路时，才能找到所有的能量。

3.4　电感

电感的结构是将一段导线缠绕在某些材料上。图 3.15 为几种实际电感的结构图。电流通过绕组时会产生一个与绕组相交链的磁场或磁通。通常绕组缠绕在如金属铁或铁氧体等磁性材料上，以在电流一定情形下增大磁通量（铁心通常由称为叠片的薄片构成。第 15 章将讨论为什么要采用这种结构）。

当电感电流的大小发生变化时，将使磁通发生变化。根据法拉第电磁感应定律，与绕组相交链的磁通发生变化时，会在绕组中产生感应电压。对于理想电感，感应电压与电流随时间的变化率成正比，而且感应电压的极性始终阻碍电流的变化。这个比例常数称为电感，通常用字母 L 表示。

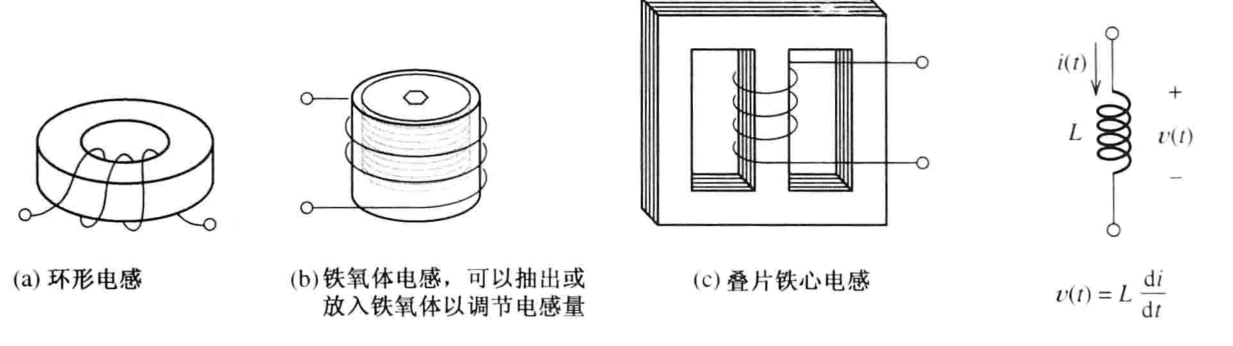
电感的电路符号如图 3.16 所示，其电压与电流满足如下关系式：

$$v(t) = L\frac{di}{dt} \tag{3.28}$$

通常都假设电压电流的参考方向是关联的。如果二者的参考方向不关联，则式（3.28）为

$$v(t) = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{3.29}$$

电感的单位是亨利(H)，等于伏特·秒每安培。通常电感值都在几微亨(μH)到几十亨(H)范围内。



(a) 环形电感 (b)铁氧体电感，可以抽出或放入铁氧体以调节电感量 (c)叠片铁心电感

图3.15 将导线缠绕在某些材料上的电感结构

图3.16 电感的符号及v-i关系式

3.4.1 流体模型

如果用流体来表示电感，相当于液体流过直径为常数的无阻碍管子时的惯量。管子两端的压力差相当于电压，液体的流速相当于电流。因此，液体的加速度就相当于电流的变化率。仅当液体加速或减速流动时，管子的两端才会有压力差。

在液体流动过程中，当一个阀门(通常是受螺线管控制)突然关闭阻止液体流动时，才会使液体产生惯性。比如在一个洗衣机中，液体流速的突然变化会导致高的压力，将会在桶壁中出现碰撞或振动。这就类似于当电感中的电流突然中断时所产生的电磁效应，汽油内燃机点火系统的工作原理就是突然中断电感元件中的电流而产生高电压。

3.4.2 根据电压计算电流

假如已知电感电流的初始值$i(t_0)$以及两端的电压$v(t)$，为了计算$t > t_0$以后的电感电流，式(3.28)可以写为

$$\mathrm{d}i = \frac{1}{L}v(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.30}$$

对上式两端同时积分可得

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} \mathrm{d}i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.31}$$

注意：式(3.31)右边的积分与时间有关，并且积分限是初始时间t_0与时间变量t。等式左边的积分为电流，与等式右边的积分上下限时间相对应。对式(3.31)经过积分整理可得

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t + i(t_0) \tag{3.32}$$

从上式可知，只要$v(t)$有限，随着时间的增加，$i(t)$的变化量也是有限的。因此，$i(t)$在数值上肯定是连续的，不会发生突变。(后面我们将遇到理想化的电路，其中，可能会短暂地出现无穷大的电压，那么将导致电感中的电流发生突变。)

3.4.3 储存的能量

假设一个电路元件电压电流的参考方向是关联的，那么其功率应为电流与电压的乘积：

$$p(t) = v(t)i(t) \tag{3.33}$$

将式(3.28)的电压代入上式，有

$$p(t) = Li(t)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{3.34}$$

假设一个电感电流的初始值为 $i(t_0)=0$。那么电感储存的初始能量为零。进一步分析，假设从时间 t_0 到时间 t 这段期间，电感电流从 0 变为 $i(t)$。随着电流幅值的增加，能量就以磁场的形式储存在电感中。

如果对功率从 t_0 到 t 这段期间进行积分，可得能量为

$$w(t) = \int_{t_0}^{t} p(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.35}$$

将式(3.34)代入上式，可得

$$w(t) = \int_{t_0}^{t} Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \tag{3.36}$$

消去积分时间变量，将积分限用相应的电流替代，有

$$w(t) = \int_{0}^{i(t)} Li\,\mathrm{d}i \tag{3.37}$$

进行积分计算可得

$$w(t) = \frac{1}{2}Li^2(t) \tag{3.38}$$

上式表明了如果电感电流减小到零，则储存在电感中的能量会返给电路。

例 3.6　计算电感的电压、功率和能量。

图 3.17(a)为流过一个 5 H 电感的电流波形。试求出电压、功率和能量，并绘制出它们在 0 ~ 5 s 之间的波形。

解：首先，根据式(3.28)计算电压：

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

电流对时间的微分即为电流随时间变化曲线的斜率。在 $0 < t < 2$ s 期间，有 $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = 1.5$ A/s 及 $v = 7.5$ V。当 $2\text{ s} < t < 4$ s 时，有 $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = 0$，因此 $v = 0$。最后，当 $4\text{ s} < t < 5$ s 时，有 $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = -3$ A/s 及 $v = -15$ V。图 3.17(b)为该电感电压随时间变化的波形。

其次，将电压电流逐点相乘可获得电感的功率，其波形如图 3.17(c)所示。

最后，根据式(3.38)可得电感中储存的能量的时域表达式：

$$w(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

电感中能量的波形如图 3.17(d)所示。

从图 3.17 可见，随着电流幅值增大，功率为正，储存的能量也在增大。当电流不变时，电压和功率都为零，储存的能量也保持不变。当电流幅值逐渐减小到零时，功率为负，表明储存的能量也返回给电路的其余部分。

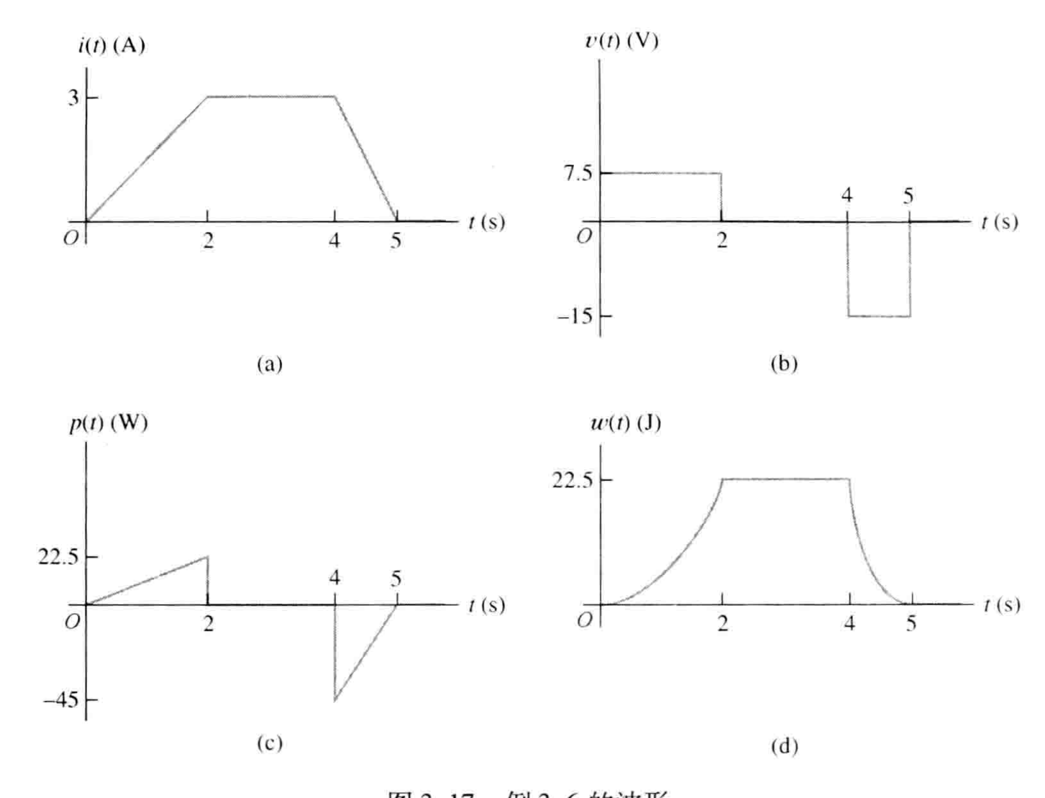


图 3.17 例 3.6 的波形

例 3.7 电感电流与常数电压的关系。

如图 3.18(a)所示的电路，当 $t=0$ 时开关闭合，使 10 V 的电源接入到 2 H 的电感。试求电流随时间变化的关系式。

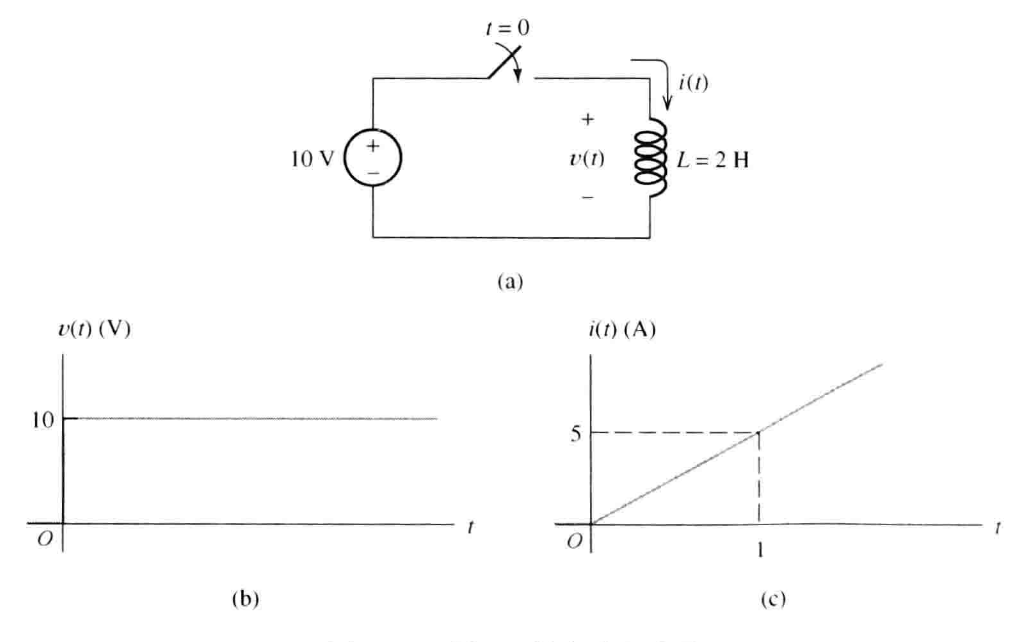


图 3.18 例 3.7 的电路和波形

解： 由于施加于电感两端的电压是有限值，因此电流必定是连续的。在时间 $t=0$ 以前，电流为零(是因为电流不能流过一个断开的开关)。因此，在 $t=0$ 开关闭合后的一瞬间，电流也必为零。

电感两端的电压波形如图 3.18(b)所示。根据式(3.32)可得电流：

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}v(t)\,\mathrm{d}t+i(t_0)$$

取 $t_0=0$，且 $i(t_0)=i(0)=0$。将有关参数代入上式可得

$$i(t)=\frac{1}{2}\int_{0}^{t}10\,\mathrm{d}t$$

其中，假定积分限 t 是大于零的。经过积分计算，可得电流为

$$i(t)=5t\ \mathrm{A},\qquad t>0$$

电感电流的波形如图3.18(c)所示。

可见，当开关闭合以后，电感电流在逐渐增大。这是因为在时间 $t=0$ 以后，当电压为常数时，电感电流以由式(3.28)确定的固定速度增加。这里有必要将式(3.28)重新书写如下：

$$v(t)=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

如果 $v(t)$ 是常数，那么电流的变化率 $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ 也是常数。

在图3.18所示的电路中，假设在 $t=1$ s 时断开开关。在理想情况下，电流不会流过断开的开关。因此，在 $t=1$ s 时电流会突然下降到零。然而电感两端的电压正比于电流随时间的变化率。当电流突然变化时，将会在电感两端产生无限大的电压，并且这个无限大的电压只持续到电流下降到零为止。在本书后面将介绍脉冲函数的概念来描述这种情况(以及类似的情况)。目前，我们已经知道了在含有电感的开关电路中会出现非常大的电压。

如果构建一个图3.18(a)所示的实际电路，并且在 $t=1$ s 时断开开关，会发现高电压将在开关的触点上产生电弧，电弧持续直到电感的能量释放完毕。如果这种现象频繁发生，不久就会导致开关损坏。

练习3.6　流过一个1 mH电感的电流为 $i(t)=0.1\cos(10^4t)$ A。试求电压和储存的能量随时间变化的表达式。假设 $v(t)$ 和 $i(t)$ 的参考方向是关联的。

答案：$v(t)=-10\sin(10^4t)$ V，$w(t)=50\cos^2(10^4t)$ μJ。

练习3.7　一个150 μH电感两端的电压波形如图3.19(a)所示。电流的初始值为 $i(0)=0$，试求电流 $i(t)$ 并绘制出其波形。假设 $v(t)$ 和 $i(t)$ 的参考方向是关联的。

答案：电流波形如图3.19(b)所示。

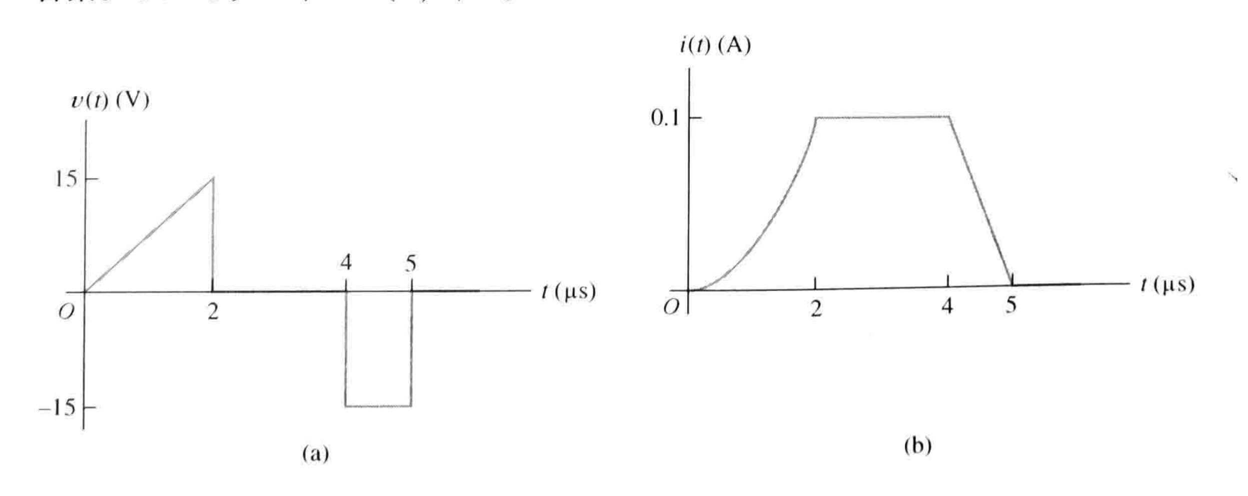


图3.19　练习3.7的电压和电流波形

3.5 电感的串/并联

串联电路的等效电感等于所有电感之和。如果是电感并联，则其等效电感等于每个电感倒数和的倒数。图 3.20 所示为电感的串/并联等效变换。注意：电感的串/并联等效形式与电阻是完全相同的，可以根据本章前面分析电容串/并联等效的方法来证明关于电感串/并联等效的结论。

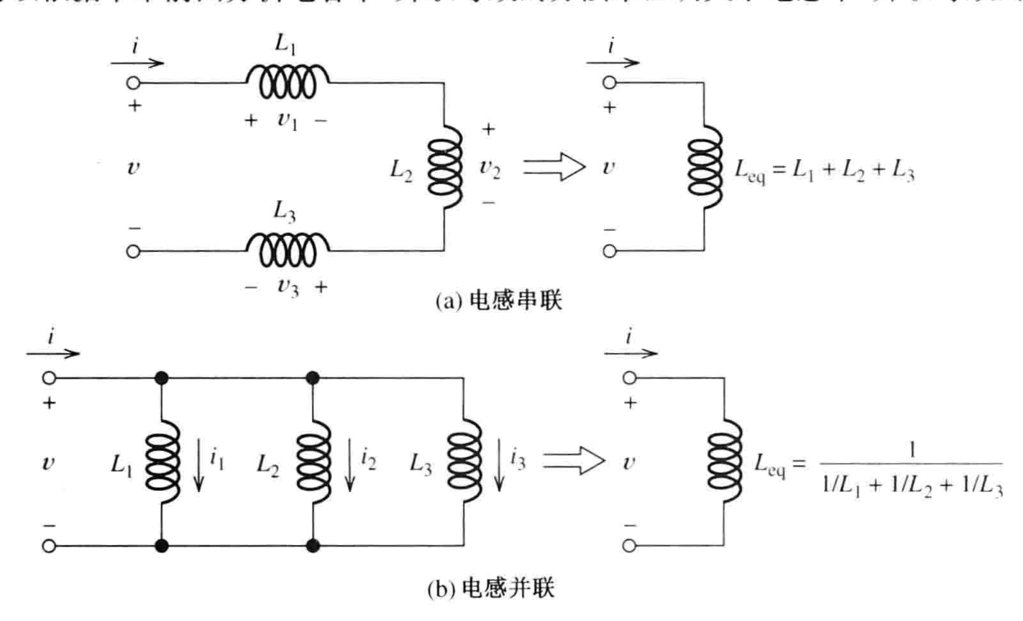


图 3.20 电感的串/并联等效与电阻完全相同

练习 3.9 证明图 3.20(b) 中并联等效电感的计算式。

练习 3.10 试求图 3.21 电路的等效电感。

答案： (a) 3.5 H。(b) 8.54 H。

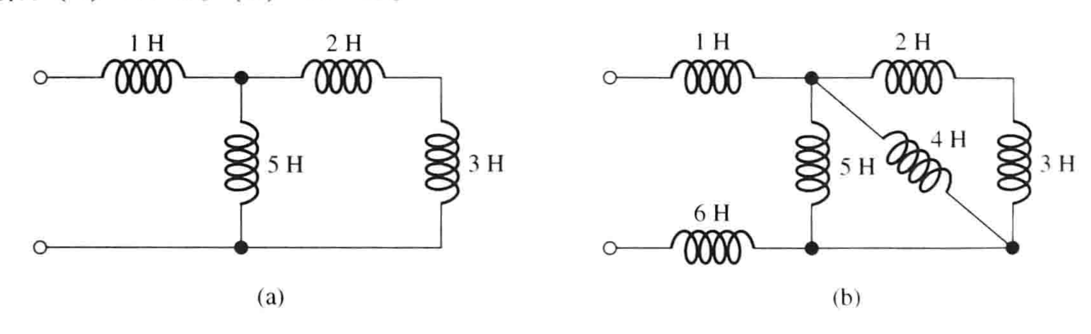


图 3.21 练习 3.10 的图

3.6 实际电感元件

实际电感元件有各种各样的外形，这主要取决于其电感量和应用。(本章前面的图 3.15 为部分实际的电感元件)。比如，一个 1 μH 的电感由缠绕在外径为 0.5 cm 的铁氧体螺旋(环形)铁心上的 25 匝细线(28 号线)构成。另一方面，通常一个 5 H 电感由几百匝 18 号线绕制而成，其铁心重达 1 kg。

电感中的铁金属通常称为铁心，由称为叠片的薄片构成。[此类电感如图 3.15(c)所示]。由于变化的磁场将在铁心中产生感应电压，因此采用这种结构是很有必要的。铁心中的感应电

压会产生涡流而导致能量损耗。生产无损耗铁心通常是不现实的。采用相互绝缘的叠片有助于减少涡流损耗。在安装时，叠片的方向是与电流方向垂直的。

减小涡流的另一种方法就是采用铁氧体铁心，它是铁的氧化物，是一种电绝缘材料。其他的方法就是用绝缘性的黏合剂将铁粉结合在一起构成铁心。

3.6.1 寄生效应

实际电感元件在理想电感之外还存在寄生元件。图3.22为一个实际电感的电路模型。串联电阻 R_s 相当于金属导线本身的电阻(可以采用零电阻的超导材料制作导线而消除这种寄生效应)。并联电容大小与绕组之间电解质(绝缘材料)中的电场有关，这个电容称为绕组间电容。并联电阻 R_p 代表了铁心损耗，主要是铁心中的涡流损耗。

实际上，图3.22所示的实际电感元件的电路模型只是一个近似模型。串联电阻与绕组导线的长度有关，也与绕组间的电容有关。实际电感元件更精确的电路模型应该是由很多小段(分成小段的数目可能会高达无穷大)的寄生效应模型连接起来的。最终，将直接采用场理论进行分析，而放弃对电路模型进行分析。

将电路模型精确到这种程度几乎没有什么必要。一个实际电感元件的模型通常是一个电感外加少数寄生元件就已经足够了。当然，与传统的数学分析相比较，计算机辅助电路分析可以建立更加复杂的模型，以获得更加准确的分析结果。

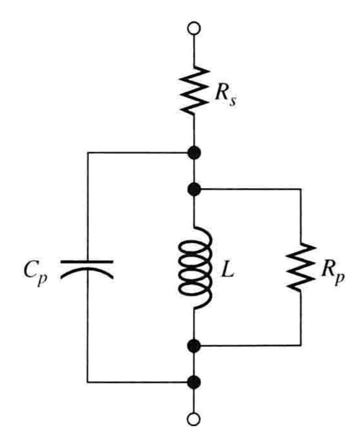
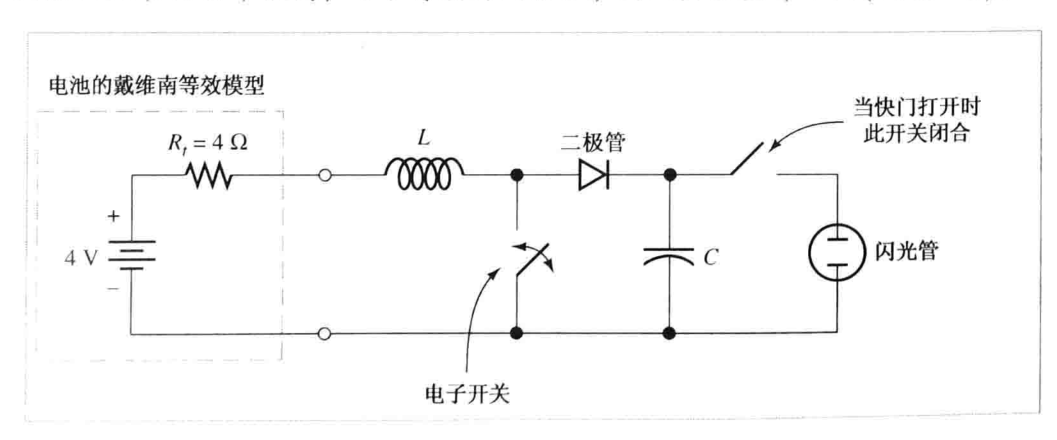


图3.22　包含了寄生元件的实际电感元件模型

应用实例3.1　电子闪光灯

图PA3.1所示为相机中电子闪光灯的电路。该电路的目的是在相机快门打开的时候，由闪光管中流过的大电流使其产生高亮度的闪光。当闪光管闪光时，其功率高达100 W，但是持续时间不到1 μs。虽然闪光管的功率很高，由于持续时间很短，因此其能量并不大(约为1 J)。



图PA3.1

直接由电池对闪光管提供这样的功率是不可能的，主要有以下几个原因：首先，实际电池最多只能提供几十伏的电压，但是要使闪光管闪光需要几百伏电压。其次，根据最大功率传输原理，由于电池具有戴维南内阻(参加式(2.67)及相关分析)，它能够提供的最大功率仅有1 W，因此不能满足闪光管的要求。为了解决该问题，可将电池在几秒内提供的能量储存在电容器中。由于电容器的串联寄生电阻很小，因此储存在电容器中的能量会快速释放出来。

电子开关在 1 s 内会交替开关约 10 000 次(在某些相机中，你可能会听到尖锐的哨声，这是因为少量能量很容易转换为声能)。当电子开关闭合时，电池将通过电感产生电流。接着当电子开关断开时，电感迫使电流流过二极管对电容进行充电(回顾一下电感电流不能发生突变)。电流只能按照箭头的方向流过二极管。因此，二极管的作用在于当电子开关断开时让电荷流入电容器，而电子开关闭合时可以阻止电荷流出电容器。因此，每当电子开关断开时，电容器中存储的电荷将不断增加。最终将使电容器的电压达到几百伏。当相机快门打开时，另外一个开关将闭合，使电容器对闪光管进行放电。

作者的一个朋友在苏必利尔湖的北岸有套小屋，其中的供水系统(如图 PA3.2 所示)很特别，它与闪光灯电路的原理差不多。河水可以流入浸入在河中的水管。在这个水管的底端有个阀门可以定期突然关闭使水管中的河水停止流动。当阀门关闭时，由于流水存在惯性从而将产生一个高压脉冲。这种高压迫使河水通过单向阀门进入储水箱。储水箱中的压缩空气将会使河水流入需要的小屋中。

你能否找到图 PA3.2 中的各个部分与图 PA3.1 中的哪些元件具有类似的功能?

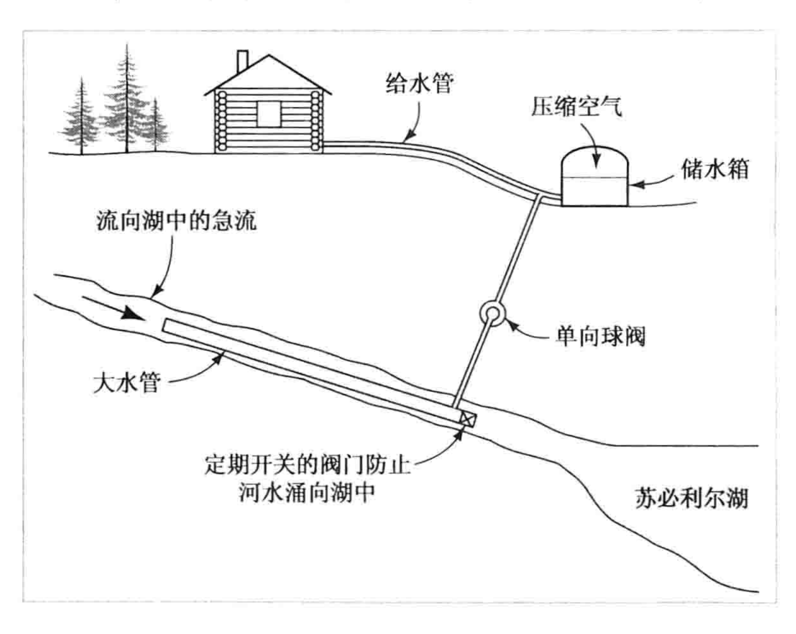


图 PA3.2

3.7 互感

几个绕组绕制成相同的形状使得由一个绕组产生的磁通也会与其他绕组相链接。那么，在一个绕组中流过时变电流，则在其他绕组将产生感应电压。图 3.23 为两个相互耦合电感的电路符号，其中，L_1 和 L_2 分别为两个绕组的自感。M 为它们的互感，其单位也为亨利。注意：图 3.23 所示两个绕组的电压和电流都是关联参考方向的。

图 3.23 给出了电压与电流的关系式。由于绕组之间存在相互耦合而产生了互感电压 $M\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t$ 和 $M\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t$。另外，自感电压 $L_1\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t$ 和 $L_2\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t$ 是由每个绕组自身的电流产生的感应电压。

一个绕组产生的磁通可能会增强或削弱另一个绕组产生的磁通。绕组两端的圆点表明了两个磁场方向是相同或相反的。如果一个电流是流入标有圆点的端子，而另一个是流出，这表明两个磁场方向是相反的。例如，假设图 3.23(b)中电流 i_1 和 i_2 都为正，则它们产生的磁场方向是相反的。如果两个电流都从标有圆点的端子流入(或都流出)，则它们产生的磁场方向相同。因此在图 3.23(a)中，如果电流 i_1 和 i_2 都为正，则产生的磁场方向相同。

在电压与电流的关系式中，互感电压的符号由标有圆点端子的电流方向决定。如果两个电流的参考方向都是流入(或流出)标有圆点的端子，如图 3.23(a)所示，则互感电压的符号为正。如果一个电流的参考方向是流入标有圆点的端子，而另一个电流是流出，如图 3.23(b)所示，则互感电压的符号为负。

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

(a)

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

(b)

图 3.23 互感的符号及 $v-i$ 关系式

3.7.1 线性差动变压器

图 3.24 为由互感构成的线性可变差动变压器(LVDT)，可以作为位置传感器。中间的绕组接入一个交流电源，产生的磁场与二次绕组的上下两部分都相链接。当铁心位于绕组的正中位置时，在二次绕组的上下两部分产生的感应电压相互抵消从而使 $v_o(t)=0$(这是由于二次绕组上下两部分的缠绕方向是相反的)。当铁心上下移动时，一次绕组和二次绕组之间的耦合程度会改变，其中一半绕组的感应电压会减小，另一半绕组的感应电压将会增大。在理想情况下输出电压为

$$v_O(t) = Kx\cos(\omega t)$$

其中，x 为铁心的位置坐标。可见，LVDT 可用于自动化制造过程的位置检测中。

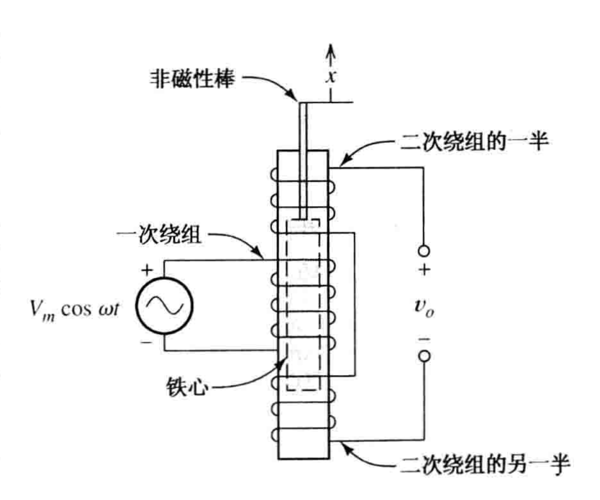


图 3.24 可用作位置传感器的线性差动变压器

3.8 用 MATLAB 进行符号积分与微分运算

本节提供了几个应用 MATLAB 符号计算功能分析电感电容伏安关系的例题，以及对运算结果的图形化表示。

提醒：我们在前面章节的某些例题、练习和习题中采用了 MATLAB R2008a 版，其使用了来自 Maplesoft 软件的 Maple 内核的符号运算功能。自 R2008b 版开始，MATLAB 将 MuPad 系统整合进了符号工具箱。截至 2009 年年中，并不是本书中所有的例题和习题都可以用当前新版本的 MATLAB 计算成功。MATLAB 的东家 Mathworks 意识到了这些问题并力图修复它们。请记住，如果你用的 MATLAB 版本低于 R2008a，则可能无法复制我们的结果。在消耗大量时间计算这些例题之前，请试运行一下相关的 m 文件。但愿你的老师能够指导你怎样选择 MATLAB 的版本。

接下来，我们认为你已对 MATLAB 有了一定的了解。更多的在线交互式教程可以从网上获取：http://www.mathworks.com/academia/student_center/tutorials/register.html。总而言之，学习了本章例题的代码后，你会发觉本章的练习和习题编写命令是相当容易的。

例 3.8 用 MATLAB 的符号运算工具箱进行微积分运算。

用 MATLAB 求出图 3.25 所示电路中 3 个电压的表达式，其中 $v_C(0) = 0$，以及

$$i_x(t) = kt^2 \exp(-at)\sin(\omega t), \quad t \geqslant 0$$
$$= 0, \quad t < 0 \tag{3.39}$$

同时，绘制出当 $k = 3$、$a = 2$、$\omega = 1$、$L = 0.5$ H、$C = 1$ F 时电流电压在 $t \geqslant 0$ 时的曲线(选用这些参数的主要目的在于便于用 MATLAB 验证)。其中电流单位为安培，电压单位为伏特，ωt 的单位为弧度，以及时间 t 的单位为秒。提示：我们已经用 R2008a、R2008b 和 R2009a 版本的 MATLAB 成功运行了该例题。

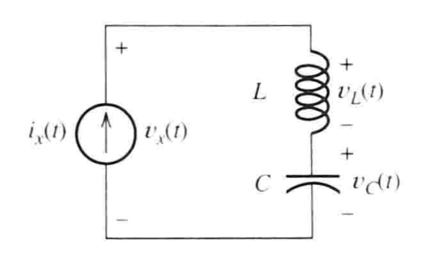


图 3.25 例 3.8 的电路

解 首先用符号表示各个参数(k、a、ω、L 和 C)，将电流和各部分电压分别记为 ix、vx、vL 和 vC。然后将数值代入到这些符号中，并将结果表示为 ixn、vxn、vLn 和 vCn(字母“n”说明表达式中的符号变量已给定了数值)。

我们用粗体字体表示命令，常规字体表示批注，用彩色字体[①]表示 MATLAB 的运算结果。在 MATLAB 中批注(以%为首的内容)可有可无。我们展示的结果好像在 MATLAB 的命令窗口中一次执行了所有的命令和批注，然而将命令窗口中的这些内容放在一个 m 文件并运行 m 文件将会更加方便。

当开始执行符号运算时，我们在 MATLAB 中定义每个符号为符号对象，电流用 ix 表示，每个符号代入了数值后的运算结果表示为 ixn。

```
>> clear % Clear work area of previous work.
>> syms vx ix vC vL vxn ixn vCn vLn k a w t L C
>> % Names for symbolic objects must start with a letter and
>> % contain only alpha-numeric characters.
>> % Next, we define ix.
>> ix=k*t^2*exp(-a*t)*sin(w*t)
     ix =
     k*t^2*exp(-a*t)*sin(w*t)
>> % Next, we substitute k=3, a=2, and w=1
>> % into ix and denote the result as ixn.
>> ixn = subs(ix,[k a w],[3 2 1])
     ixn =
     3*t^2*exp(-2*t)*sin(t)
```

接下来，为了绘制电流随时间变化的曲线，需要确定时间 t 的范围。根据给定的参数，需要绘制图形的电流表达式为

$$i_x(t) = 3t^2 \exp(-2t)\sin(t), \quad t \geqslant 0$$
$$= 0, \quad t < 0$$

对该表达式经过仔细分析(可能要用计算器进行简单运算)后可知，在 $t = 0$ 时刻电流为零，由于 t^2 项的作用，在 $t = 0$ 时刻后电流迅速上升；又因为指数项的作用，在 $t = 10$ s 左右电流又衰减到非常小的数值。因此我们选择时间范围为 0～10 s 用来绘制电流曲线。继续在 MATLAB 窗口中执行以下命令：

① 在此黑白印制中为浅灰色。——编者注

```
>> % Next, we plot ixn for t ranging from 0 to 10s.
>> ezplot(ixn,[0,10])
```

这样将打开一个如图 3.26 所示的新窗口并显示出电流随时间变化的曲线。不出所料，电流在 $t=0$ 时刻后迅速上升，当在 10 s 时又衰减到接近为零(我们已用了 Edit 菜单中的一些命令对本书中的结果曲线进行处理)。

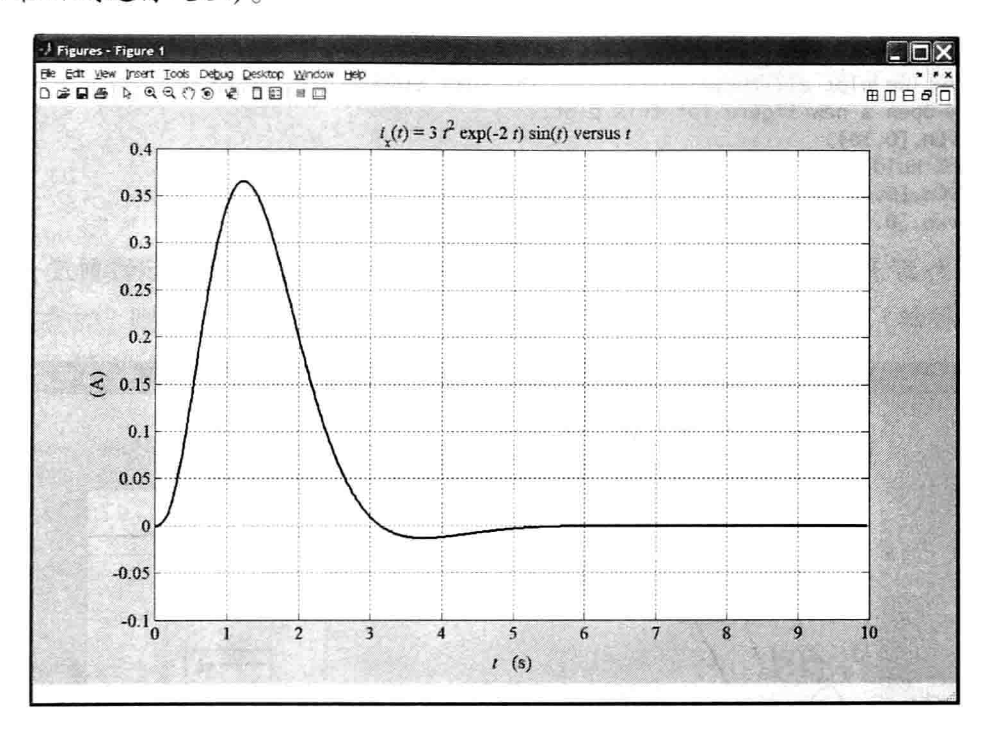


图 3.26　在 MATLAB 中产生的 $i_x(t)$ 曲线

然后，根据如下的微分式计算电感电压：

$$v_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_x(t)}{\mathrm{d}t}$$

其中参数 a、k 和 ω 作为常量。计算电感电压的相关 MATLAB 命令和结果为

```
>> vL=L*diff(ix,t) % L times the derivative of ix with respect to t.
   vL =
   L*(2*k*t*exp(-a*t)*sin(w*t)-k*t^2*a*exp(-a*t)*sin(w*t)
   +k*t^2*exp(-a*t)*cos(w*t)*w)
>> % A nicer display for vL is produced with the commands:
>> vL = simple(vL);
>> pretty(vL)
   (2sin(w t) - t a sin(w t) + t cos(w t) w) L k t exp(-a t)
```

将电感电压的表达式写成标准形式为

$$v_L(t)=Lkt\exp(-at)[2\sin(\omega t)-at\sin(\omega t)+\omega t\cos(\omega t)]$$

我们可以通过对式(3.39)的右边微分并乘以 L 以验证上式的正确性。接下来根据如下的积分式计算电容电压：

$$v_C(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i_x(t)\mathrm{d}t+v_C(0),\qquad t\geqslant 0$$

将电流的表达式及电压初值代入上式可得

$$v_C(t)=\frac{1}{C}\int_0^t kt^2\exp(-at)\sin(\omega t)\mathrm{d}t,\qquad t\geqslant 0$$

这个积分式用手工运算比较困难，但是用如下的 MATLAB 命令就会很容易完成：

```
>> % Integrate ix with respect to t with limits from 0 to t.
>> vC=(1/C)*int(ix,t,0,t);
>> % We included the semicolon to suppress the output, which is
>> % much too complex for easy interpretation.
>> % Next, we find the total voltage vx.
>> vx = vC + vL;
>> % Now we substitute numerical values for the parameters.
>> vLn=subs(vL,[k a w L C],[3 2 1 0.5 1]);
>> vCn=subs(vC,[k a w L C],[3 2 1 0.5 1]);
>> vxn=subs(vx,[k a w L C],[3 2 1 0.5 1]);
>> % Finally, we plot all three voltages in the same window.
>> figure % Open a new figure for this plot.
>> ezplot(vLn,[0,10])
>> hold on % Hold so the following two plots are on the same axes.
>> ezplot(vCn,[0,10])
>> ezplot(vxn,[0,10])
```

运算结果如图3.27所示(这里我们又用了Edit菜单中的命令调整了纵坐标的刻度，并对本书中的曲线进行了标注)。

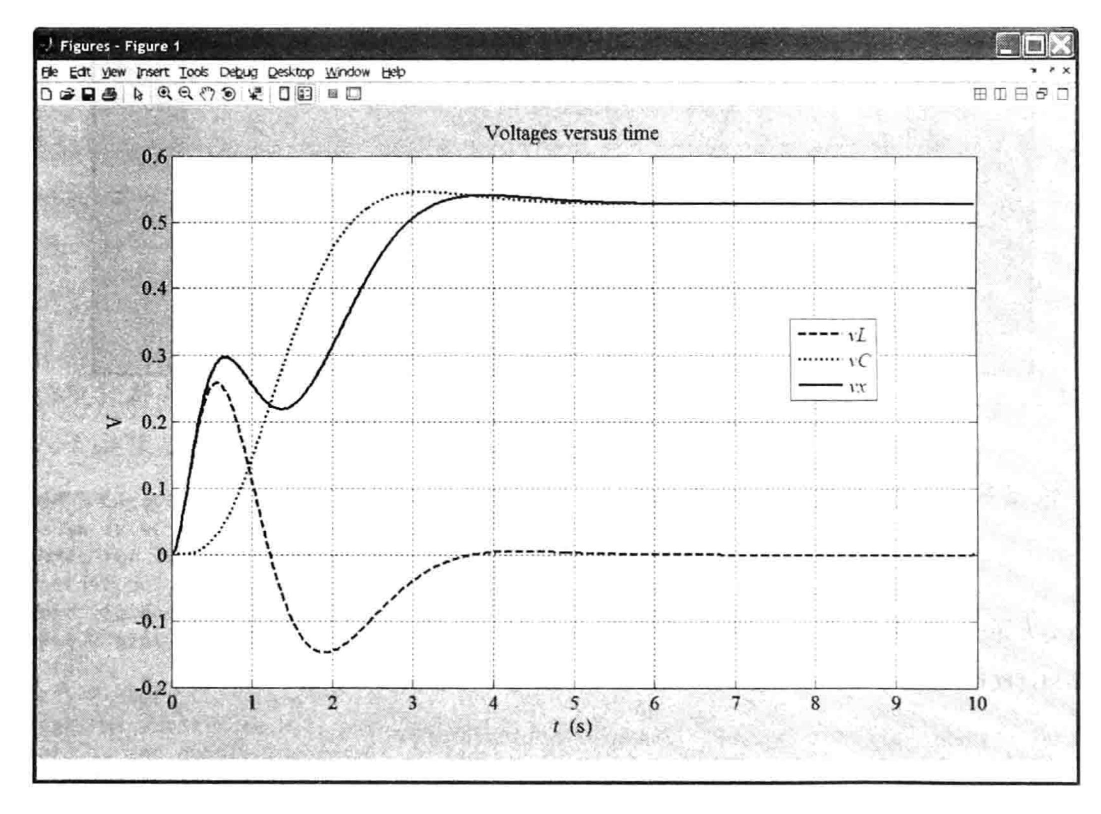


图3.27 例3.8的各电压曲线

本例题的所有MATLAB命令已包含在名为Example_3_8的m文件中(这些MATLAB文件的信息请参阅本书的附录F)。如果你将这个文件复制到计算机上MATLAB运行路径所在的文件夹中，则可以试运行该文件。比如，当执行该文件后，在窗口输入命令:

```
>> simple(vC)
```

将会显示出一串相当复杂的电容电压表达式。

3.8.1 MATLAB中的折线函数

本章前面涉及的电压和电流通常是用折线形式表示的，即在不同时间段的数学表达式不相同。例3.6是一个典型的例题。我们将发现MATLAB语言可以如下的阶跃函数表示折线函数:

$$u(t)=0 \quad t<0$$
$$=1 \quad t>0 \tag{3.40}$$

单位阶跃函数的曲线如图 3.28 所示。在数学领域及 MATLAB 中，$u(t)$ 被称为 Heaviside 阶跃函数，该函数是由早期的电气工程师奥利弗·赫维赛德(Oliver Heaviside)提出的，他致力于电路的分析并总结归纳出了我们目前所用到的电感、电导和阻抗之间内在的规律。[对于 $t=0$，$u(t)$ 由于没有物理意义而未被给定数值。]

假如我们选定两个时刻 t_a 和 t_b，其中 $t_a < t_b$，也就是说，时刻 t_a 先于时刻 t_b。接着，由图 3.29可知：

$$u(t-t_a)-u(t-t_b)=1, \qquad t_a<t<t_b$$
$$=0, \qquad 其他$$

如果我们将任一函数乘以 $[u(t-t_a)-u(t-t_b)]$，那么该函数只剩下 t_a 到 t_b 之间的那部分。将多项这类函数叠加，则可以对任意折线形式的函数用一个方程表示。同时也可以用 MATLAB 中的符号运算工具箱对这些方程进行微积分等运算。下面将举例说明。

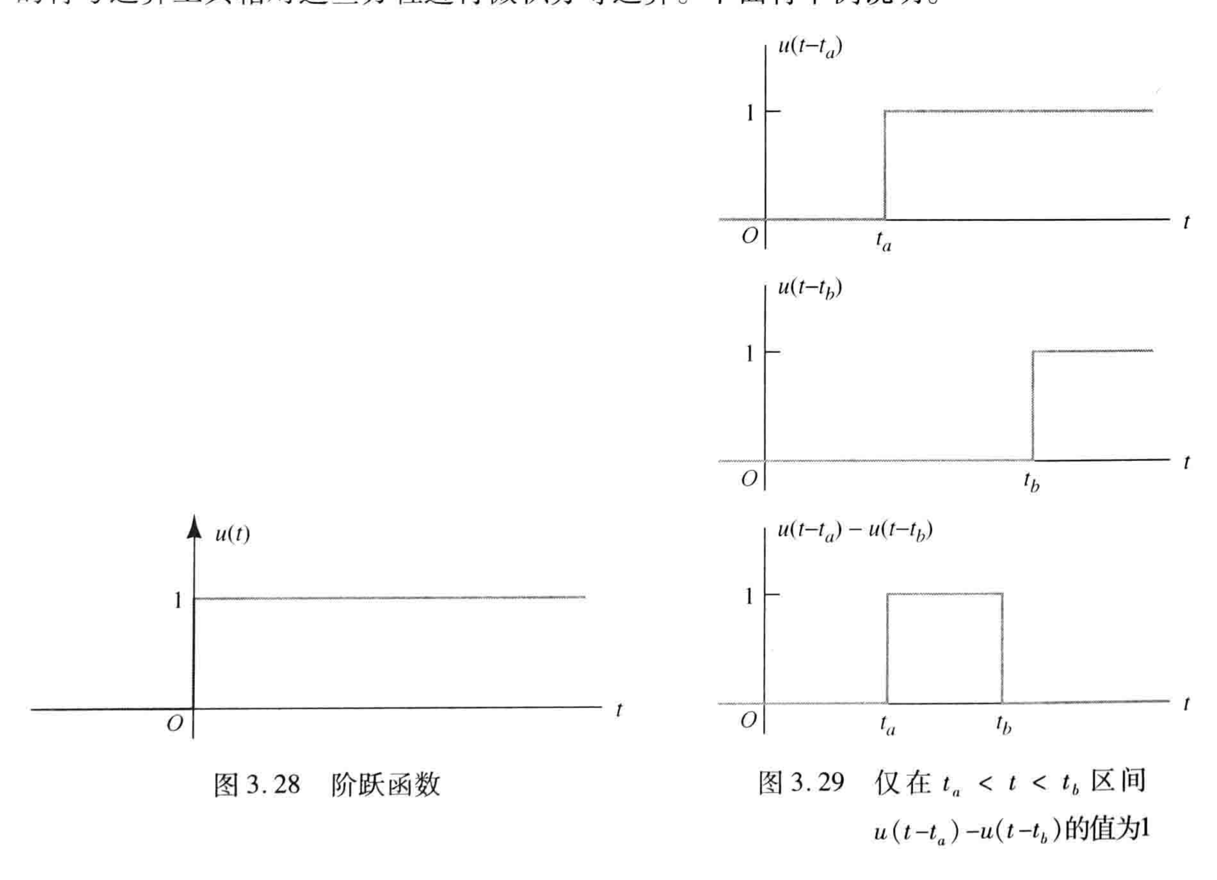


图 3.28　阶跃函数

图 3.29　仅在 $t_a < t < t_b$ 区间 $u(t-t_a)-u(t-t_b)$的值为1

例 3.9　连续折线函数的微积分。

流过 0.5 μF 电容的电流为如下所示的折线函数：

$$i_C(t)=2.5t \qquad 0<t<2\text{ ms}$$
$$=5\times10^{-3} \qquad 2\text{ ms}<t<4\text{ ms}$$
$$=-10\times10^{-3}\sin(500\pi t) \qquad 4\text{ ms}<t<6\text{ ms}$$
$$=0 \qquad 其他$$

试用包含单位阶跃函数的一个方程式表示 $i_C(t)$。然后用 MATLAB 绘制 $-2\text{ ms} < t < 8\text{ ms}$ 区间内的电流曲线，同时求出电容两端电压随时间变化的函数关系式并绘制出电压曲线。假设电容的电压和电流参考方向是关联的(即电流参考方向从电压参考极性的正极流入)。(提

示：我们已经用 R2008a 版本的 MATLAB 成功运行了该例题，但是未用更新版本的 MATLAB 来运算。)

解：该电流在 3 个时间区间的大小为非零值，可以用一对阶跃函数表示每个区间的电流。因此可得电流的方程式为

$$\begin{aligned} i_C(t) = {} & 2.5t\left[u(t) - u\left(t - 2\times10^{-3}\right)\right] \\ & + 5\times10^{-3}\left[u\left(t - 2\times10^{-3}\right) - u\left(t - 4\times10^{-3}\right)\right] \\ & - 10\times10^{-3}\sin(500\pi t)\left[u\left(t - 4\times10^{-3}\right) - u\left(t - 6\times10^{-3}\right)\right] \end{aligned}$$

注意到 $[u(t) - u(t-2\times10^{-3})]$ 的值仅在 0～2 ms 之间为 1、$[u(t-2\times10^{-3}) - u(t-4\times10^{-3})]$ 的值仅在 2～4 ms 之间为 1，以此类推。因此，每个阶跃函数的取值表示了折线函数的每一段。

在 MATLAB 中除了将 $u(t)$ 用 Heaviside(t) 表示以外，其余部分基本保持一致。定义和绘制电流的 MATLAB 命令为

```
>> clear
>> syms t iC vC % Define t, iC and vC as symbolic objects.
>> iC = 2.5*t*(heaviside(t) - heaviside(t-2e-3)) + ...
   5e-3*(heaviside(t-2e-3) - heaviside(t-4e-3)) + ...
   ((-10e-3)*sin(500*pi*t))*(heaviside(t-4e-3) - heaviside(t-6e-3));
>> ezplot(iC, [-2e-3 8e-3])
```

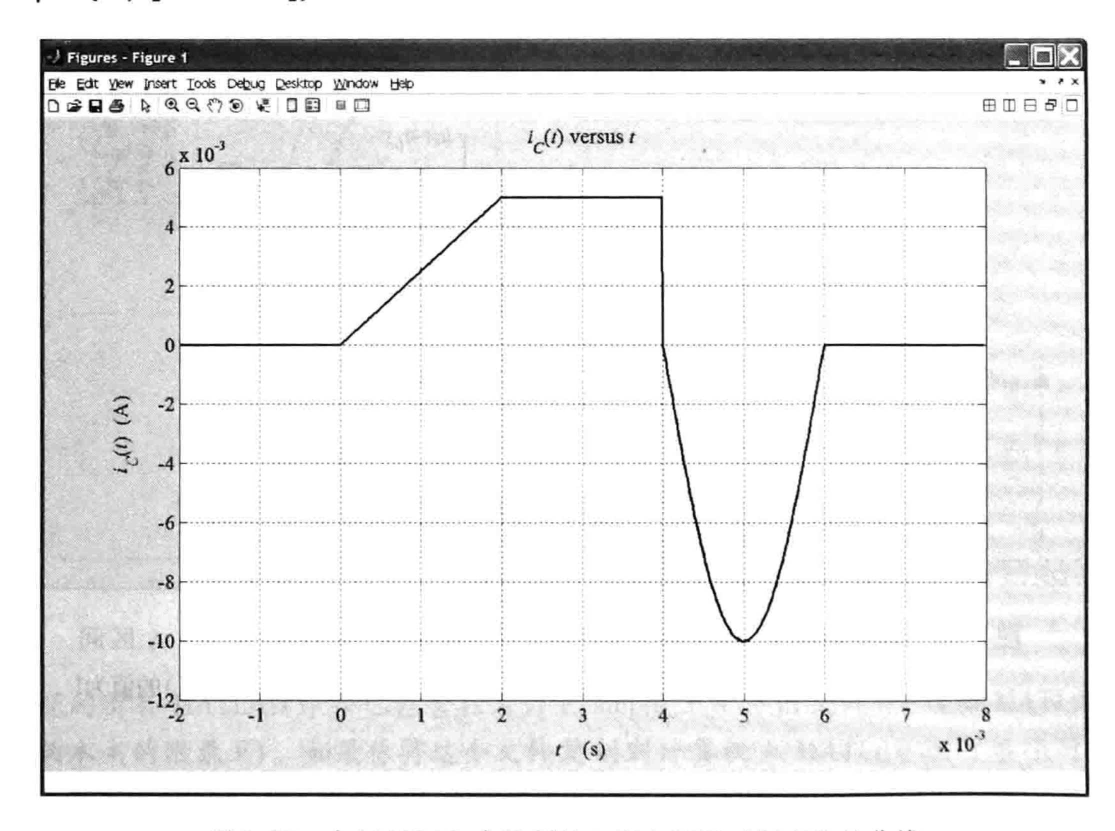


图 3.30 在 MATLAB 中绘制的电容电流随时间变化的曲线

电流曲线如图 3.30 所示。计算电容电压的积分式为

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)\mathrm{d}t + v_C(0)$$

执行以下的 MATLAB 命令：

```
>> figure % Plot the voltage in a new window.
>> vC=2e6*int(iC,t,0,t); % vC equals 1/C times the integral of iC.
>> ezplot(vC, [-2e-3 8e-3])
```

可得电容的电压曲线如图3.31所示。文件名为Example_3_9的m文件包含了本例题的所有MATLAB命令(同理，这些m文件的信息请参阅本书的附录F)。

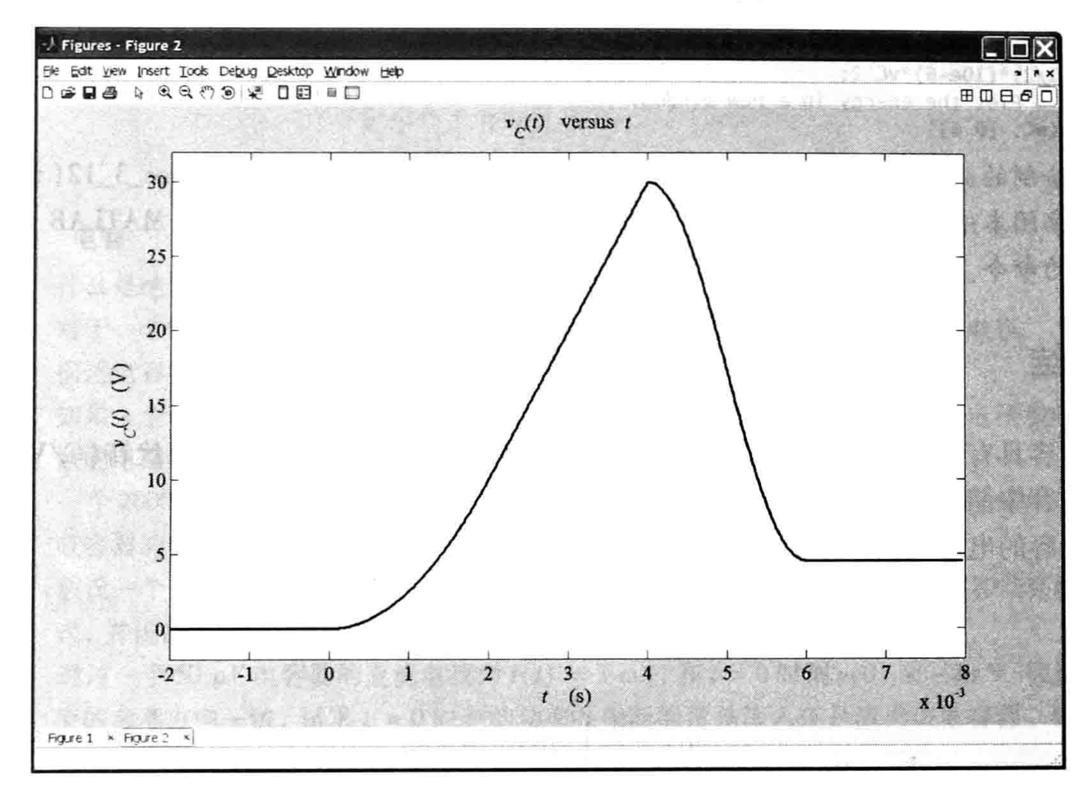


图3.31 在MATLAB中绘制的电容电压随时间变化的曲线

练习3.11 试将图3.5表示的例3.2的运算结果用MATLAB绘制出来。

答案：包含了一些批注的MATLAB命令为：

```
clear % Clear the work area.
% We avoid using i alone as a symbol for current because
% we reserve i for the square root of -1 in MATLAB. Thus, we
% will use iC for the capacitor current.
syms t iC qC vC % Define t, iC, qC and vC as symbolic objects.
iC = 0.5*sin((1e4)*t);
ezplot(iC, [0 3*pi*1e-4])
qC=int(iC,t,0,t); % qC equals the integral of iC.
figure % Plot the charge in a new window.
ezplot(qC, [0 3*pi*1e-4])
vC = 1e7*qC;
figure % Plot the voltage in a new window.
ezplot(vC, [0 3*pi*1e-4])
```

MATLAB绘制的曲线与图3.5的结果非常类似。该练习的m文件名为Exercise_3_11。

练习3.12 试将图3.6表示的例3.3的运算结果用MATLAB绘制出来，并将电压$v(t)$用单位阶跃函数表示。

答案：包含了一些批注的MATLAB命令为：

```
clear % Clear the work area.
% We avoid using i by itself as a symbol for current because
% we reserve i for the square root of -1 in MATLAB. Thus, we
% will use iC for the capacitor current.
syms t vC iC pC wC % Define t, vC, iC, pC and wC as symbolic objects.
vC = 1000*t*(heaviside(t) - heaviside(t-1)) + ...
     1000*(heaviside(t-1) - heaviside(t-3)) + ...
     500*(5-t)*(heaviside(t-3) - heaviside(t-5));
ezplot(vC, [0 6])
iC = (10e-6)*diff(vC, 't'); % iC equals C times the derivative of vC.
```

```
figure % Plot the current in a new window.
ezplot(iC, [0 6])
pC = vC*iC;
figure % Plot the power in a new window.
ezplot(pC, [0 6])
wC = (1/2)*(10e-6)*vC^2;
figure % Plot the energy in a new window.
ezplot(wC, [0 6])
```

MATLAB 绘制的曲线与图 3.6 的结果非常类似。该练习的 m 文件名为 Exercise_3_12(该 m 文件的信息请参阅本书的附录 F)。我们已用 R2008a、R2008b 和 R2009a 版本的 MATLAB 成功运行了该练习的命令。

本章小结

1. 电容具有电场效应的电路特性。电容的单位是法拉(F),等于库仑每伏特(C/V)。
2. 电容中储存的电荷为 $q = Cv$。
3. 电容的电压电流关系式为

$$i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

和

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t + v(t_0)$$

4. 电容中储存的能量为

$$w(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)$$

5. 电容的串联等效与电阻并联等效分析方法相同。
6. 电容的并联等效与电阻串联等效分析方法相同。
7. 平行板电容器的电容为

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

如果是真空,介电常数为 $\epsilon = \epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12}$ F/m。对于其他物质,介电常数为 $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$,其中 ϵ_r 为相对介电常数。
8. 实际电容器含有几种寄生元件。
9. 电感具有磁场效应的电路特性。电感的单位是亨利(H)。
10. 电感的电压和电流关系式为

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

和

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t + i(t_0)$$

11. 电感中储存的能量为

$$w(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

12. 电感的串/并联等效与电阻串/并联等效分析方法相同。
13. 实际电感元件含有几种寄生元件。

14. 互感表明了绕组之间磁场相互耦合的性质。
15. MATLAB 语言是一种可以进行符号微积分运算和图形绘制的相当有用的工具。赫维赛德阶跃函数(也称为单位阶跃函数)可以用来表示折线形式的函数。

习题

3.1 节　电容

P3.1　什么是绝缘材料?请举两个例子。

P3.2　对于一个结构为金属层被非导体隔离开的电容,请简要说明电流怎么流过该电容。

P3.3　描述电容器的内部结构。

P3.4　如果一个理想电容器两端的电压为常数,那么流过该电容的电流为多少?在电压和电流都为常数的电路中,理想电容器应等效为什么电路元件?

*P3.5　一个 2000 μF 电容器的电压初始值为 100 V,其放电电流为常数 100 μA。试问需用多长时间使电容器的电压放到 0 V?

*P3.6　假设一个 10 μF 电容器两端的电压为 $v(t) = 100\sin(1000t)$。试求电流、功率和储存能量的表达式,并画出它们随时间变化的波形。

*P3.7　通过一个 50 μF 电容器的直流电流为 $i(t) = 3$ mA,在 $t = 0$ 时刻 $v(0) = -20$ V。假设电压和电流的参考方向一致,试求 $t = 0$ 时刻的功率并判断能量是流入还是流出该电容器。试重复计算当 $t = 1$ s 时的上述内容。

*P3.8　我们打算用一个已储存了足够能量、参数为 0.01 F 的电容器持续 1 小时输出 5 马力的功率。试问电容器的电压应充到多高?(提示:1 马力等于 745.7 W)。储存这么大的能量是否现实?你认为通过电容器储存的能量为电动汽车供电是否切实可行?

P3.9　假设一个 1 μF 电容器两端的电压为 200 V。试计算每个极板上储存的净电荷的最大值,以及两个极板上储存的总电荷的最大值。

P3.10　假设一个 10 μF 电容器两端的电压为 $v_C(t) = 10e^{-500t}$。试求电流、功率和储存能量的表达式,并画出它们随时间变化的波形。

P3.11　假设一个 15 μF 电容器两端被充的电压为 500 V,试求储存的初始电荷和能量。如果该电容电压经过 4 μs 放电到 0 V,试求在放电期间内电容器输出的平均功率。

P3.12　从 $t = 0$ 时刻开始,一个 100 μF 电容器的电压在 5 ms 内线性增加到 200 V。然后,电容电压保持 200 V 不变化,试求电压、电流、功率和储存能量随时间变化的表达式。

P3.13　图 P3.13 为通过一个 2 μF 电容器电流的波形。在 $t = 0$ 时刻,其电压为零。试绘制电压、功率和储存的能量随时间变化的波形。

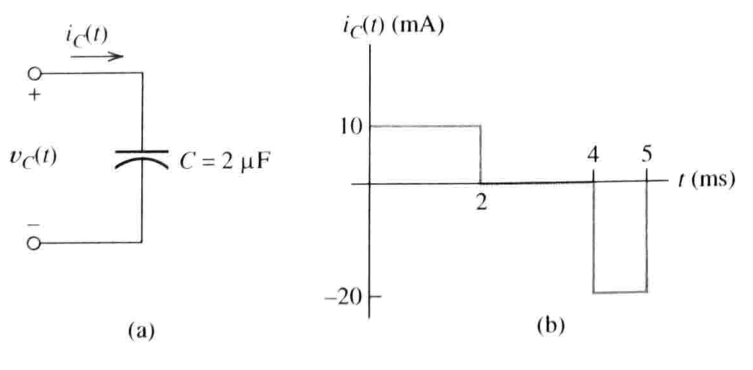


图 P3.13

P3.14　试计算图 P3.14 所示电路中电容在 $t = 20$ ms 时刻电压、功率和储存能量的大小。

P3.15 通过一个电容器的电流为 $i(t) = I_m\cos(\omega t)$，$t = 0$ 时刻的电压为零。假设角频率 ω 接近于无限大，试问在该电流作用下，电容近似为开路还是短路？试说明理由。

P3.16 图 P3.16 为通过一个 5 μF 电容器电流的波形。在 $t=0$ 时刻，其电压 $v_C(0) = 0$ V。试绘制电压、功率和储存的能量随时间变化的波形。

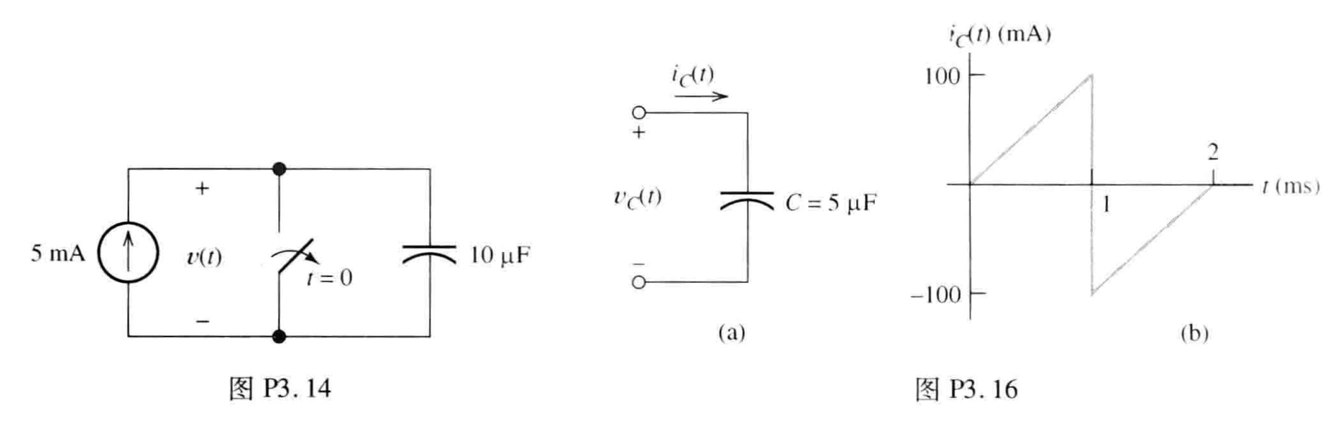


图 P3.14　　　　图 P3.16

P3.17 一个 40 μF 电容器储存的能量为 80 J，在 $t=3$ s 时刻能量以 200 J/s 的速度开始衰减。试求 $t=3$ s 时电压和电流的大小。试问该时刻电流是从电容电压的正极流入还是流出？

P3.18 平行板电容器的其中一个极板可以旋转，两个极板的重叠部分面积成为时间变化的函数，使得其电容值为

$$C = 200 + 50\sin(5000t)\ \text{pF}$$

其中三角函数中角度的单位为弧度。假设该电容两端施加 50 V 的直流电压，试计算电容电流随时间变化的函数表达式。

P3.19 假设一个非常大(理想情况下为无限大)的电容被充电到 10 V，试问哪一个电路元件与该电容具有相同的伏安关系？说明原因。

P3.20 在 $t = t_0$ 时刻电容 C 两端的电压为零，在 $t_0 \sim t_0 + \Delta t$ 期间，有脉冲电流通过该电容，使其电压增加到 V_f。在该脉冲电流作用下，试求电流的幅值 I_m 和该区域的面积(相当于电流随时间变化的函数)。请问该区域面积的单位和物理意义各是什么？在 V_f 保持不变的情况下，如果时间间隔 Δt 趋于零，那么关于电流的幅值和面积会出现什么情况？

P3.21 对于一个电阻，在什么情况下相当于短路？对于一个未充电的电容，当电容值取多大时相当于短路？说明理由。如果等效为开路，再重复上述过程。

P3.22 一个 20 μF 电容器两端的电压为 $v(t) = 10 - 10\exp(-2000t)$ V，试求 $t=0$ 时刻的功率，此时电容器是吸收还是释放能量。当 $t = 0.5$ ms 时，再重复计算功率。

3.2 节 电容的串联与并联

P3.23 请描述电容的串/并联是怎样等效的，并与电阻进行比较。

*P3.24 试求图 P3.24 所示每个电路的等效电容。

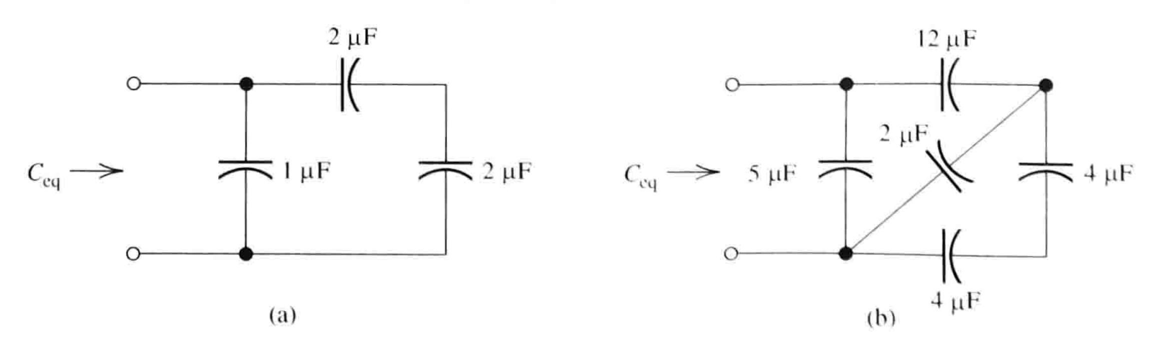


图 P3.24

*P3.25　假设我们需要设计一个心脏起搏器电路，要求该电路能为心脏提供1 ms的脉冲，其中心脏的电路模型相当于500 Ω的电阻，脉冲的幅值为5 V。由于电池电压只有2.5 V，因此我们决定将两个等值电容并联充电到2.5 V，然后通过开关切换将它们串联从而为心脏提供1 ms的脉冲。要求输出脉冲电压的幅值保持在4.9 V到5 V之间，问电容的最小取值应为多少？如果每秒产生一次脉冲，请问电池提供的电流平均值为多少？采用近似处理的方法，假设在脉冲提供过程中电流保持为常数，计算该电池的容量(安培小时)使其可以持续使用5年。

P3.26　试求图P3.26所示每个电路x、y两端之间的等效电容。

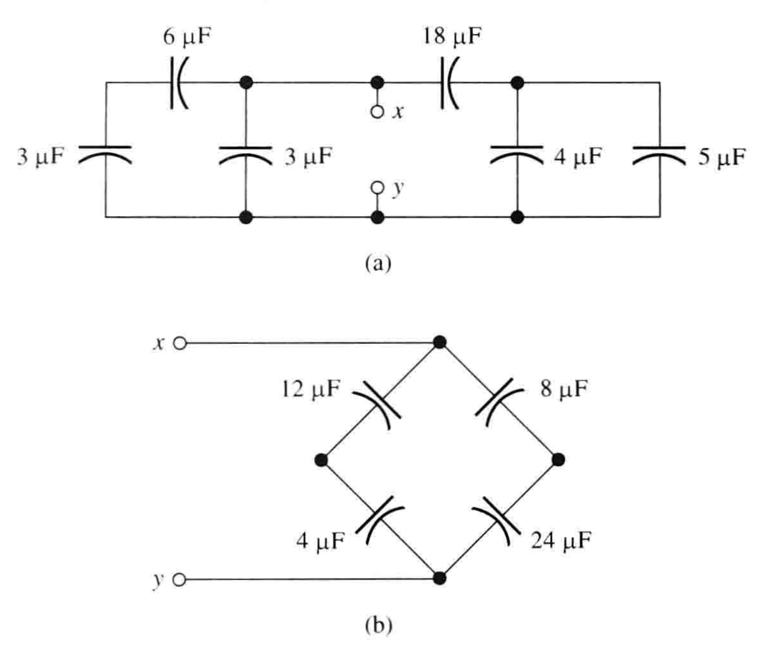


图 P3.26

P3.27　我们将两个未充电的电容C_1 = 5 μF和C_2 = 20 μF串联连接，然后两端接入20 V的电源，电路如图P3.27所示。试求电源接入后的电容电压v_1和v_2。(提示：由于两个电容器的电流相同，它们储存的电荷应该相同。)

P3.28　电容C_1 = 200 μF被充电到50 V，电容C_2 = 200 μF被充电到100 V，如果将其按电压的正极连接的方式进行串联，试求等效电容和总电压。然后计算储存在两个电容中能量的总和以及等效电容中储存的能量。为什么等效电容中的能量会少于每个电容储存的能量之和？

P3.29　一个6 μF的电容和一个3 μF的电容串联后再与1 μF的电容并联，画出电路图并求出串/并联组合的等效电容。

P3.30　试求出将三个1 μF的电容通过串/并联方式所得等效电容的最小值和最大值，其中每种情况下电容是怎样连接的？

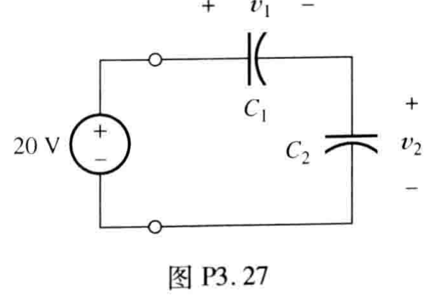


图 P3.27

3.3节　电容器的物理特征

*P3.31　试求平行板电容器的电容值，其中极板尺寸为10 cm×30 cm，介质的厚度为0.01 mm，相对介电常数ϵ_r = 15。

*P3.32　假设一个以空气为介质1000 pF的平行板电容器被充电到1000 V，电容的两端为开路，试求储存的能量。如果电容极板快速分离，使极板间距离加倍，试求电容器新的电压和储存的能量。请问额外的能量从何而来？

P3.33　一个200 pF的平行板电容器，极板的宽度为W，长度为L，极板间的距离为d，介质为空气。假设L和W都远大于d，试求以下各种情况下的电容值：(a)L和W都减半，其余参数不改变；

(b)极板间距减半，其余参数都为初始值保持不变；(c)空气介质替换为油介质，其相对介电常数为35，其余参数都为初始值保持不变。

P3.34 考虑一个平行板电容器，极板的宽度为 W，长度为 L，极板间的距离为 d，假设 L 和 W 都远大于 d。该电容可施加的电压最大值为 $V_{max} = Kd$，其中 K 为介质的击穿强度。试推导出电容器储存能量的最大值与参数 K 和介质体积之间的函数关系式。如果我们期望单位体积储存的能量最大，试问如何选择参数 W、L 和 d？哪些参数比较重要？

P3.35 话筒的结构也是一个平行板电容器，当有声音施加到话筒上时，由于声波压力的作用使得两极板的距离发生变化。假设一个话筒的极板面积为 10 cm^2，介质为空气，两极板的距离随时间变化的关系式为

$$d(t) = 100 + 0.5\cos(5000t)\,\mu\text{m}$$

当200 V 的直流电压加在极板两端时，利用近似公式 $1/(1+x) \approx 1 - x(x \ll 1)$ 试计算通过电容的电流随时间变化的函数关系式。(其中三角函数中角度的单位为弧度。)

P3.36 图 P3.36 为一个液位传感器，由浸入在绝缘液体中的两个导电极板构成。当水箱空的时候(即 $x=0$)，两个极板形成的电容为100 pF，液体的相对介电常数为25。试求电容量 C 与液位高度 x 的函数关系式。

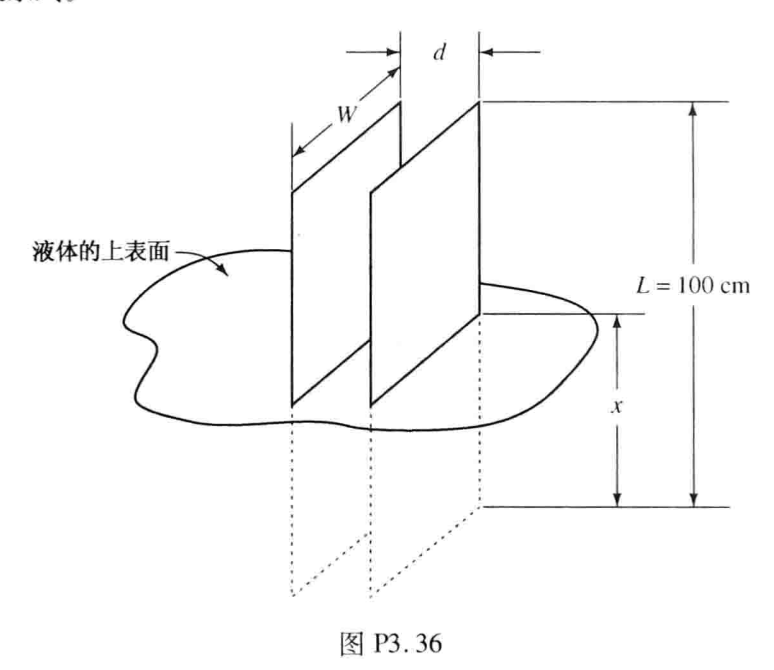


图 P3.36

P3.37 对于图 P3.36 所示的平行板电容器，当水箱盛满液体时，其电容量为2500 pF，此时两个极板完全浸入在绝缘液体中。(此时液体的介电常数和极板尺寸不同于习题 P3.36 中的参数)。当水箱空的时候，两个极板间的介质为空气，其电容值为100 pF。假设在水箱盛满液体时，电容被充电到1000 V，然后排空水箱。由于电容是开路的，因此极板上的电荷不会改变。试计算水箱排空后电容电压以及水箱排空前后电容中储存的能量。由于极板是开路的，则没有电源提供额外的能量，那么能量的变化从何而来？

P3.38 图 P3.38 所示的电容器为 1 μF，其串联寄生电阻为 2 Ω。假设电容两端的电压为 $v_C(t) = 10\cos(100t)$，试求电阻两端的电压。在这种情况下，试计算总电压 $v(t) = v_r(t) + v_C(t)$，其精度要求不超过1%，请问是否有必要将寄生电阻考虑进去？如果 $v_C(t) = 0.1\cos(10^7 t)$，再重复上述计算。

P3.39 假设一个平行板电容器的电场强度超过 K V/m 时其介质将被击穿。因此，该电容器额定电压的最大值应为 $V_{max} = Kd$，其中 d 为介质厚度。在分析习题 P3.33 时，我们已计算出在电容被击穿之前可储存能量的最大值为 $w_{max} = 1/2\epsilon_r\epsilon_0 K^2(\text{Vol})$，其中 Vol 为绝缘介质的体积。对于空气可

近似取 $K = 32 \times 10^5$ V/m，$\epsilon_r = 1$。如果要储存与 1 加仑汽油相当的能量（约为 132 MJ），试计算需要的最小空气体积为多少？如果当储存的能量为最大时需要提供 10 kV 的输出电压，试问空气介质的厚度为多少？

P3.40　如图 P3.40 所示的电路，在开关闭合之前两个 10 μF 的电容电压的初始值都为 50 V。试求开关闭合之前储存的总能量，并计算开关闭合后每个电容的电压以及储存的总能量。此时总的能量会出现什么情况？

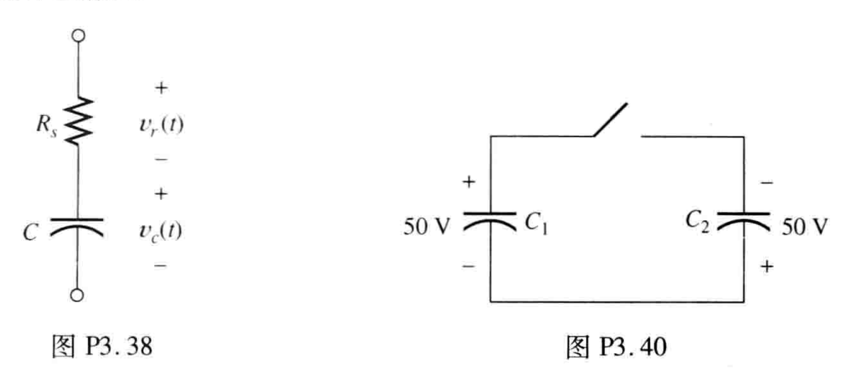


图 P3.38　　　　图 P3.40

3.4 节　电感

P3.41　简要说明电感元件是怎样构成的。

P3.42　简要说明电感元件的流体模型。

*P3.43　图 P3.43 为流过一个 2 H 电感的电流波形，试绘制电压、功率和储存的能量随时间变化的波形。

*P3.44　一个 50 μH 的电感两端所加的直流电压为 10 V，其电路如图 P3.44 所示。电感电流在 $t = 0$ 时刻的大小为 −100 mA，试求将在什么时刻电流将达到 +100 A？

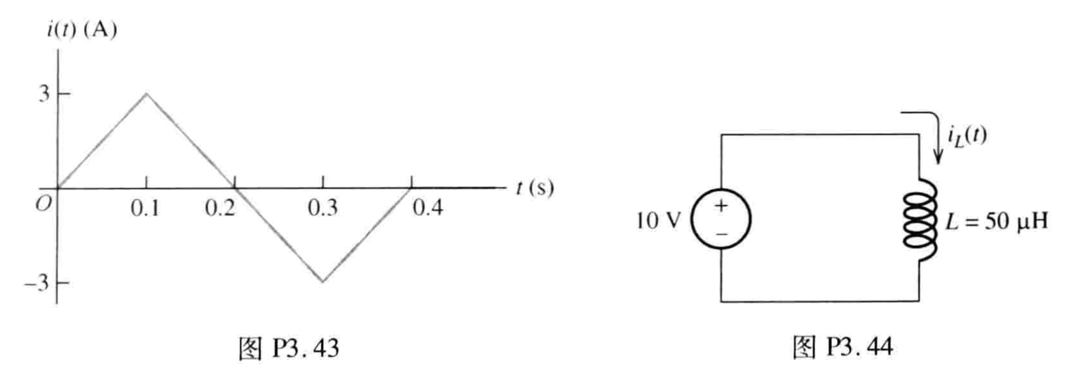


图 P3.43　　　　图 P3.44

*P3.45　在 $t = 0$ 时刻流过 0.5 H 电感的电流为 4 A，要使在 $t = 0.2$ s 时电感电流减小到 0，那么电感两端应施加多大的直流电压？

P3.46　在 $t = 0$ 时刻 12 V 的直流电压源加在 2 H 的电感两端，假设其电流初始值为 0，试求在 $t_1 = 1$ s 时电感的电流、功率和储存的能量。

P3.47　如果理想电感的电流为常数，则其电压为多少？当理想电感的电流和电压都为常数时，应等效为哪种电路元件？

P3.48　如果通过一个电感电流的绝对值在增大，试问能量是流入还是流出该电感？

P3.49　通过 200 mH 电感元件的电流为 $2\cos(2000\pi t)$ A，其中角度的单位为弧度。试求其电压、功率和储存能量的表达式，并绘制出它们在 0 ~ 2 ms 期间内随时间变化的波形。

P3.50　通过 300 mH 电感元件的电流为 $5\exp(-200t)$ A。试求其电压、功率和储存能量的表达式，并绘制出它们在 0 ~ 20 ms 期间内随时间变化的波形。

P3.51　一个 0.5 H 电感元件两端的电压波形如图 P3.51 所示，其电流的初始值为 $i_L(0) = 0$。试绘制其电压、功率和储存能量随时间变化的波形。

P3.52 假设一个非常大(理想情况下为无限大)的电感电流初始值为10 A，试问该电感可以等效为哪种其他电路元件？说明原因。

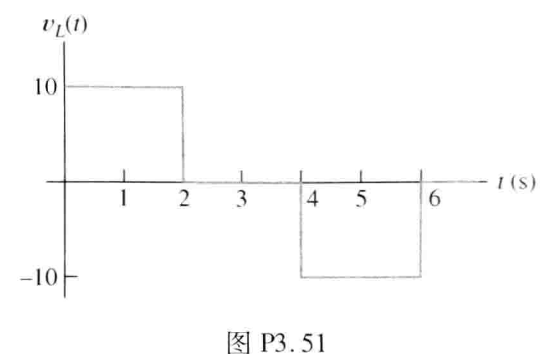


图 P3.51

P3.53 一个50 μH的电感元件两端的电压为 $v_L(t) = 5\cos(2\pi\ 10^6 t)$ V，其电流的初始值为 $i_L(0) = 0$。试求 $t>0$ 以后电流、功率和储存能量的表达式，并画出它们在0~2 μs期间内随时间变化的波形。

P3.54 在 $t = 0$ 时刻之前，一个5 H电感的电流一直为零。从 $t = 0$ 时刻开始，其电流在3 s内线性增加到15 A。然后，电感电流保持15 A不变，试求电压、电流、功率和储存能量随时间变化的表达式。

P3.55 一个电感 L 的电流初始值为零，其两端电压为 $v(t) = V_m\cos(\omega t)$。假设角频率 ω 接近于无限大，试问在该电压作用下，电感近似为开路还是短路？试说明理由。

P3.56 在 $t = t_0$ 时刻给定电感的电流为零，在 t_0 到 $t_0 + \Delta t$ 期间，有脉冲电压施加到该电感两端，使其电流增加到 I_f。在该脉冲电压作用下，试求电压的幅值 V_m 和该区域的面积(相当于电压随时间变化的函数)。请问该区域面积的单位是什么？在 I_f 保持不变的情况下，如果时间间隔 Δt 趋于零，那么关于电流的幅值和面积会出现什么情况？

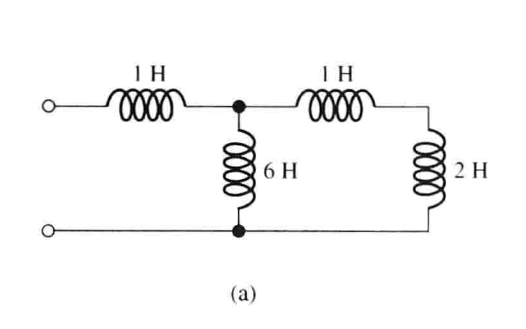
P3.57 一个2 H电感元件储存的能量为400 J，在 $t = 4$ s时刻能量以200 J/s的速度开始衰减。试求 $t = 4$ s时电压和电流的大小。试问该时刻电流是从电感电压的正极流入还是流出？

P3.58 假设一个电感的电流初始值为零，试问电感参数应为多少就相当于开路？并说明理由。如果要使电感相当于短路，又该怎么办？

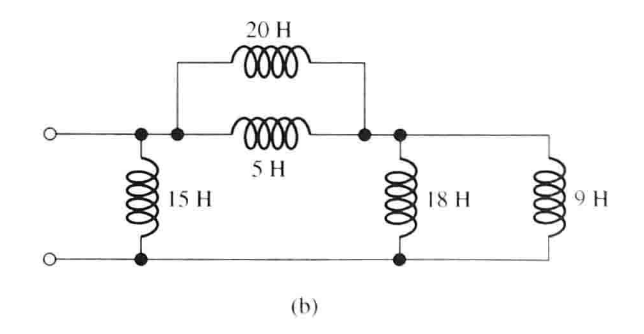
3.5节 电感的串/并联

P3.59 请描述电感的串/并联是怎样等效的，并与电阻进行比较。

*P3.60 试求图 P3.60 所示每个串/并联组合的等效电感。



(a)



(b)

图 P3.60

*P3.61 两个电感 $L_1 = 1$ H和 $L_2 = 2$ H并联连接，其电路如图 P3.61 所示，其电流的初始值为 $i_1(0) = 0$ 和 $i_2(0) = 0$。试求 $i_1(t)$ 与 $i(t)$、L_1 和 L_2 之间的函数关系式，然后重复计算 $i_2(t)$ 的表达式。

图 P3.61

P3.62 试求图 P3.62 所示每个串/并联组合的等效电感。

P3.63 假设我们需要将一个参数未知的电感 L 与一个4 H的电感通过串联或并联的方式获得7 H的电感。试问应该采用串联还是并联的方式？L 的值应为多少？

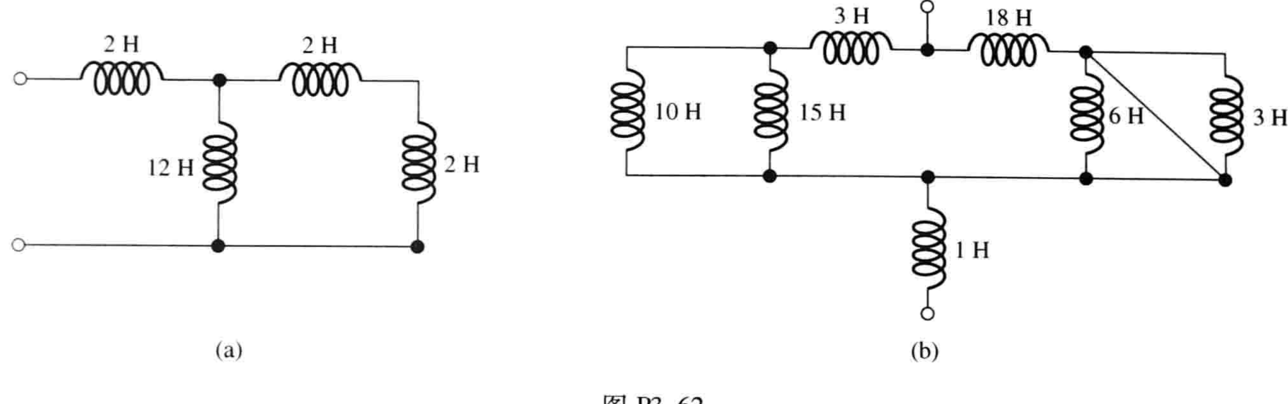


图 P3.62

P3.64　假设我们有三个 6 H 的电感。试问将它们通过串/并联组合可得到的等效电感的最大值为多少？可得到的等效电感的最小值又为多少？

P3.65　假设需要将一个参数未知的电感 L 与一个 4 H 的电感通过串联或并联的方式获得 3 H 的电感。试问应该采用串联还是并联的方式？L 的值应为多少？

3.6 节　实际电感元件

P3.66　请画出包含了 3 种寄生效应的实际电感的等效电路。

P3.67　一个 10 mH 电感元件的寄生串联电阻为 $R_s = 0.5\ \Omega$，其电路如图 P3.67 所示。(a) 如果给定电流 $i(t) = 0.1\sin(20t)$，试求 $v_R(t)$、$v_L(t)$ 和 $v(t)$。在这种情况下，如果使总电压 $v(t)$ 达到 1% 的精度要求，请问寄生串联电阻是否可以忽略？(b) 如果 $i(t) = 0.1\sin(10^6 t)$，再重复上述计算。

P3.68　在图 P3.68 所示的电路中，分别计算 $v(t)$、$i_C(t)$、$i(t)$、电容中储存的能量、电感中储存的能量和储存的总能量，其中 $i_L(t) = \cos(5000t)$ A。(三角函数中角度的单位为弧度。) 结果表明储存的总能量为与时间无关的常数，对该结果加以说明。

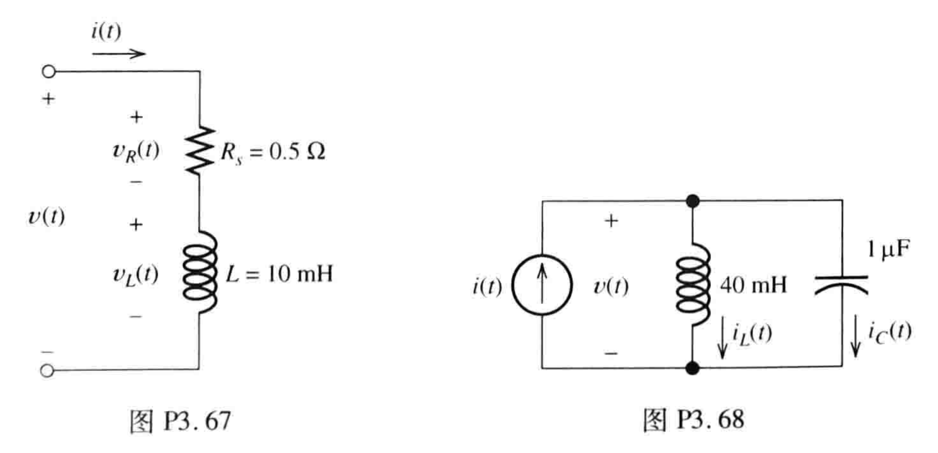


图 P3.67　　　　图 P3.68

P3.69　一个实际电感的电流为 200 mA，两端电压为 400 mV。试问从已知条件可以推导出图 3.22 所示电路中哪些元件的参数，它们的值为多少？

P3.70　在图 P3.70 所示的电路中，分别计算 $i(t)$、$v_L(t)$、$v(t)$、电容中储存的能量、电感中储存的能量和储存的总能量，其中 $v_C(t) = 10\cos(1000t)$ V。(三角函数中角度的单位为弧度。) 结果表明储存的总能量为与时间无关的常数，对该结果加以说明。

3.7 节　互感

P3.71　简要说明互感的物理基础。

* P3.72　(a) 试求图 P3.72 所示电路等效电感的表达式。(b) 当 L_2 的圆点标在底端时，再计算等效电感。

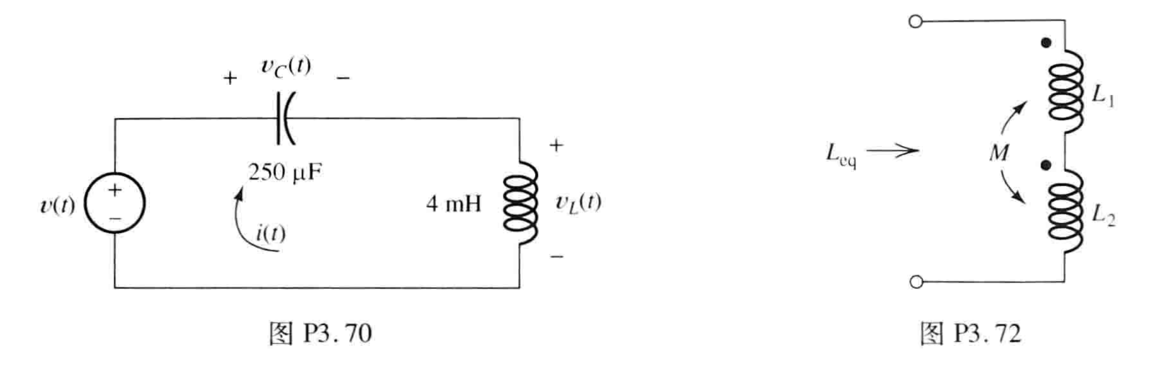


图 P3.70

图 P3.72

P3.73 在图 P3.73 所示的互感中，$L_1=1$ H；$L_2=2$ H，$M=1$ H；另外，$i_1(t)=\sin(20t)$ 和 $i_2(t)=0.5\sin(30t)$。(a)试求电压 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 的表达式。(b)当 L_2 的圆点标在底端时，再重复计算。

P3.74 已知一对互感的部分参数为 $L_1=2$ H，$L_2=1$ H，电流为 $i_1=10\cos(1000t)$ A，$i_2=0$，部分电压为 $v_2=-5000\sin(1000t)$ V。试求 $v_1(t)$ 和互感。

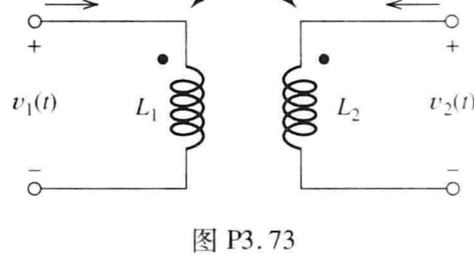
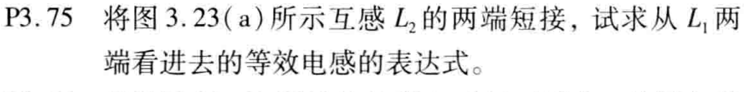
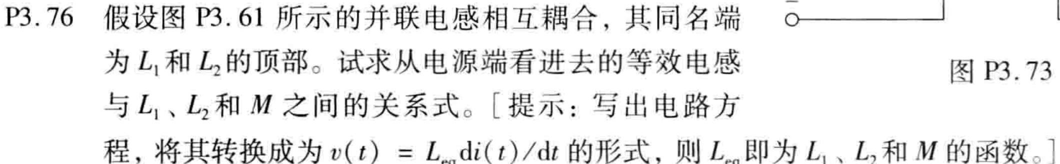


图 P3.73



P3.75 将图 3.23(a)所示互感 L_2 的两端短接，试求从 L_1 两端看进去的等效电感的表达式。



P3.76 假设图 P3.61 所示的并联电感相互耦合，其同名端为 L_1 和 L_2 的顶部。试求从电源端看进去的等效电感与 L_1、L_2 和 M 之间的关系式。[提示：写出电路方程，将其转换成为 $v(t)=L_{eq}\mathrm{d}i(t)/\mathrm{d}t$ 的形式，则 L_{eq} 即为 L_1、L_2 和 M 的函数。]

3.8 节 用 MATLAB 进行符号积分与微分运算

P3.77 通过 200 mH 电感的电流为 $i_L(t)=\exp(-2t)\sin(4\pi t)$ A，其中角度的单位为弧度。应用已学的数学知识，求出电感电压的表达式。然后再用 MATLAB 验证计算结果，并绘制出 0 ~ 2 s 期间电流和电压的曲线。

P3.78 对于一个 1 H 电感，有 $i_L(0)=0$，当 $t\geqslant 0$ 时 $v_L(t)=t\exp(-t)$。应用已学的数学知识，求出电感电流的表达式。然后再用 MATLAB 验证计算结果，并绘制出 0 ~ 10 s 期间 $v_L(t)$ 和 $i_L(t)$ 的曲线。

P3.79 通过 2 μF 电容的曲线如图 P3.13 所示。在 $t=0$ 时刻电容电压为零。试用 MATLAB 命令求出电容电流、电压、功率和储存的能量，并绘制出它们随时间变化的波形。

P3.80 通过 5 μF 电容的曲线如图 P3.16 所示。在 $t=0$ 时刻电压 $v_C(0)=0$ V。试用 MATLAB 命令求出电容电流、电压、功率和储存的能量，并绘制出它们随时间变化的波形。

测试题

这里有一组测试题，用以检查你对本章主要内容的理解程度。附录 E 中给出了这些题目的答案，完整解答过程请参见学生资源文件。附录 F 中提供了有关这些文件的详细信息。

T3.1 一个 10 μF 电容的两端分别标为 a 和 b，当 $t\geqslant 0$ 时其电流为 $i_{ab}=0.3\exp(-2000t)$ A。如果 $v_{ab}(0)=0$，试求 $t\geqslant 0$ 时 $v_{ab}(t)$ 的表达式，然后计算 $t=\infty$ 时电容中储存的能量。

T3.2 试求图 T3.2 所示电路的等效电容。

T3.3 一个平行板电容器的极板长度为 2 cm，宽度为 3 cm，绝缘介质的厚度为 0.1 mm，其相对介电常数为 80。试求其电容量。

T3.4 一个 2 mH 电感的电流为 $i_{ab}=0.3\sin(2000t)$ A。试求 $v_{ab}(t)$ 的表达式，然后计算电感中储存能量的最大值。

T3.5　试求图 T3.5 所示电路 a、b 两端之间的等效电感。

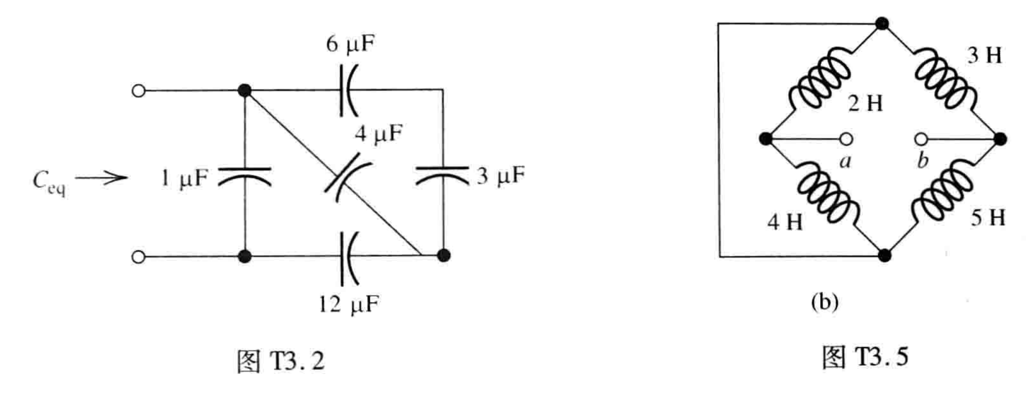


图 T3.2　　　　图 T3.5

T3.6　在图 T3.6 所示的互感中，$L_1 = 40$ mH，$M = 20$ mH，$L_2 = 30$ mH。试求电压 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 的表达式。

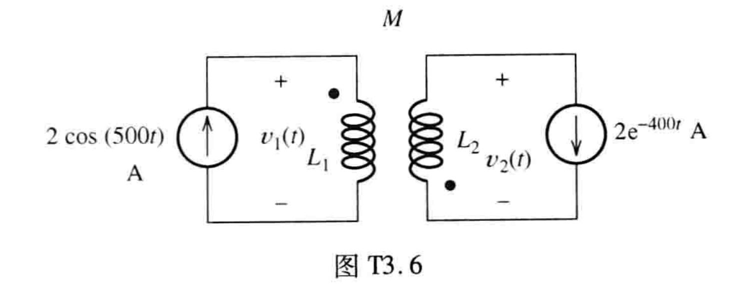


图 T3.6

T3.7　一个 20 μF 电容的两端分别标为 a 和 b，当 $t \geqslant 0$ 时其电流为 $i_{ab} = 3 \times 10^5 t^2 \exp(-2000t)$ A。如果 $v_{ab}(0) = 5$ V，试用 MATLAB 命令求出 $t \geqslant 0$ 时 $v_{ab}(t)$ 的表达式，并绘制 0 ~ 5 ms 期间电流和电压的曲线。

第4章　暂 态 分 析

本章学习目标

- 求解一阶 *RC* 或 *RL* 电路
- 理解暂态响应和稳态响应的概念
- 明确一阶电路的暂态响应与时间常数的关系
- *RLC* 电路的直流稳态分析
- 求解二阶电路
- 明确二阶电路的阶跃响应与固有频率和阻尼比的关系
- 用 MATLAB 的符号运算工具箱求解微分方程

本章介绍

本章将分析含有电源、开关、电阻、电感和电容的电路。开关的通断将会导致电源的突然变化，在电路中所产生的时变电流和电压称为暂态响应。

在电路的暂态分析中，我们仍然应用第 2 章学过的分析方法列写电路方程，比如 KCL、KVL、节点电压分析法和网孔电流分析法等。由于电感和电容的伏安关系涉及积分和微分，因此，列写的方程为微积分方程。通过对这些方程进行时间微分转换成纯微分方程。因此，进行暂态分析需要求解微分方程。

4.1　一阶 *RC* 电路

本节将介绍含有独立电源、电阻和仅有一个电容的电路。

4.1.1　电容通过电阻进行放电

首先以图 4.1(a)所示电路为例，在 $t=0$ 时刻以前，电容器已被充电，其电压初始值为 V_i。在 $t=0$ 时刻开关闭合，电流流过电阻，电容开始放电。

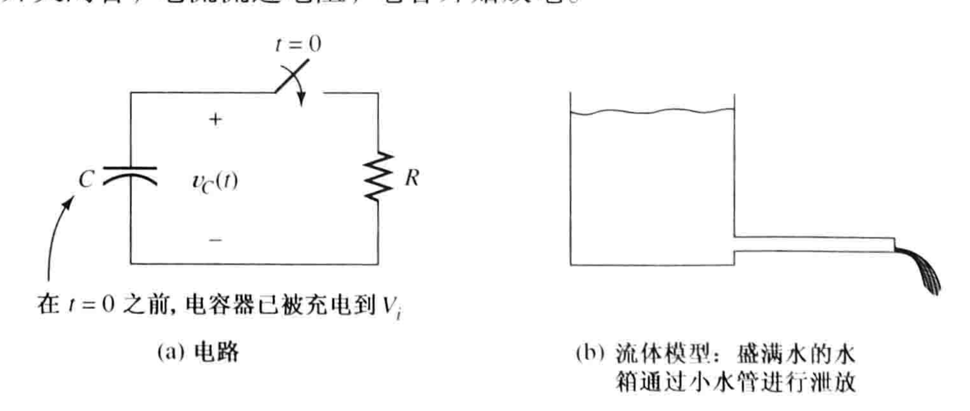


图 4.1　电容通过电阻进行放电的电路及其流体模型。在 $t=0$ 时刻以前（充电电路没有提供），电容器已被充电到 V_i。在 $t=0$ 时刻开关闭合，电容通过电阻开始放电

当开关闭合后，该电路的电流方程为

$$C\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{v_C(t)}{R}=0$$

将方程两端同时乘以电阻 R，有

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=0 \tag{4.1}$$

由此获得了一个微分方程。

式(4.1)表明该方程的解 $v_C(t)$ 与它的一阶微分具有相同的形式，具有这种性质的函数当然是一个指数函数。因此，预先定义解的通式为

$$v_C(t)=Ke^{st} \tag{4.2}$$

其中，K 和 s 为待定常数。

将式(4.2)的 $v_C(t)$ 代入式(4.1)，可得

$$RCKse^{st}+Ke^{st}=0 \tag{4.3}$$

求解 s 可得

$$s=\frac{-1}{RC} \tag{4.4}$$

将上式代入式(4.2)，可得微分方程的解为

$$v_C(t)=Ke^{-t/RC} \tag{4.5}$$

再回到图 4.1(a)，根据第 3 章学过的内容可知，当开关闭合时，电容器两端的电压不能突变，这是由于 $i_C(t)=Cdv_C(t)/dt$，如果电压发生突变，电流必然为无穷大。然而电压是有限值，那么流过电阻的电流也必然是有限的，因此我们认为电容器两端的电压必然是连续的，即发生换路(电路的状态或者参数发生改变，称为换路)前后的瞬间，电容电压应该相等，写成表达式为

$$v_C(0+)=V_i \tag{4.6}$$

其中，$v_C(0+)$ 表示开关闭合后瞬间的电容电压。在式(4.5)中，令 $t=0+$ 可得

$$v_C(0+)=V_i=Ke^0=K \tag{4.7}$$

可以看出，常数 K 等于电容电压的初始值。最后，可得所求电容电压的解为

$$v_C(t)=V_ie^{-t/RC} \tag{4.8}$$

图 4.2 为所求电压的波形图。注意，电容电压最终将衰减到零。

时间间隔

$$\tau=RC \tag{4.9}$$

称为电路的**时间常数**。每经历一个时间常数，电压将降低到 $e^{-1}\approx 0.368$。大约经历 5 个时间常数后，与其初始电压相比，电容器两端所剩的电压完全可以忽略不计。

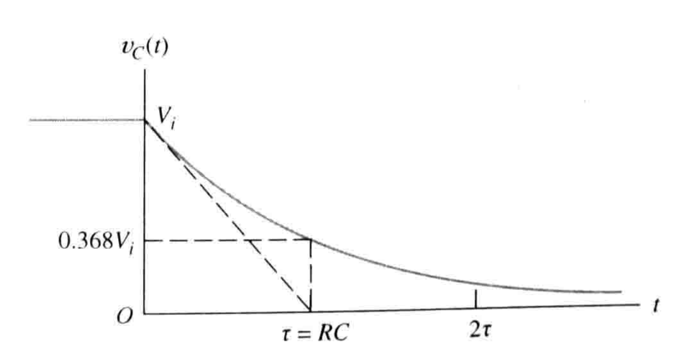


图 4.2　图 4.1(a)电路中电压随时间变化的曲线。当开关闭合后，电容电压最终衰减到零。经历一个时间常数之后，电压为初始电压的36.8%

图 4.1(b)为该电路的流体模型。原来已盛有水的水箱相当于已充电的电容。再有，小水管相当于电阻。刚开始时，水箱是满的，流量较大，水位下降较快。随着水箱不断变空，流量也在不断减小。

过去，工程师们经常采用 RC 电路进行时间控制。比如，当每次开关车库门时，需要打开一个电灯，并且持续 30 s 后自动熄灭。为了实现该任务，需要设计一个电路，包含：(1)在开关门时可以将电压充到初始值为 v_i 的电容器；(2)对电容器进行放电的电阻元件；(3)一个感应电路可以使电灯在电容电压超过 $0.368v_i$ 时持续点亮。如果我们选取时间常数 $\tau = RC$ 为 30 s，就可以完成预期的目标。

4.1.2 直流电源对电容充电

接下来分析如图 4.3 所示电路，电源电压 V_s 为常数——即直流电源，在 $t=0$ 时刻开关闭合，将电源接入 RC 电路。假设在开关闭合以前电容电压的初始值为 $v_C(0-)=0$，试求解电容电压随时间变化的函数关系式。

电阻与电容连接点的电流方程为

$$C\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t) - V_s}{R} = 0 \qquad (4.10)$$

上式左边的第一项为流过电容的电流，其参考方向向下。第二项为电阻的电流，其参考方向向左。根据 KCL 流出该节点的电流总和应为零。

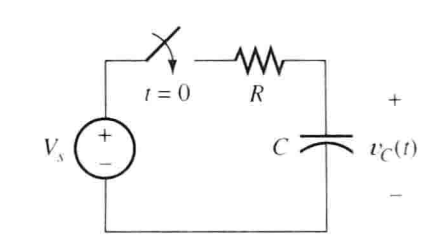


图 4.3 通过电阻对电容进行充电。在 $t=0$ 时刻开关闭合，将直流电源接入该电路

式(4.10)可以写成

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = V_s \qquad (4.11)$$

由此获得了一个一阶线性常微分方程。同前面的电路一样，换路时电容电压不能发生突变。因此有

$$v_C(0+) = v_C(0-) = 0 \qquad (4.12)$$

现在，只需要找到 $v_C(t)$ 的表达式，要求：(1)满足方程(4.11)；(2)符合式(4.12)给定的初始条件。注意：方程(4.11)与方程(4.1)是完全一致的，只不过将其常数项移到了方程右边。因此，解的形式为

$$v_C(t) = K_1 + K_2 e^{st} \qquad (4.13)$$

其中 K_1、K_2 和 s 为待定常数。

将式(4.13)的 $v_C(t)$ 代入方程(4.11)，可得

$$(1 + RCs)K_2 e^{st} + K_1 = V_s \qquad (4.14)$$

为了使上式成立，e^{st} 的系数必须为零，可得 s 为

$$s = \frac{-1}{RC} \qquad (4.15)$$

由式(4.14)，还可求得 K_1 为

$$K_1 = V_s \qquad (4.16)$$

将式(4.15)和式(4.16)代入式(4.13)，可得

$$v_C(t) = V_s + K_2 e^{-t/RC} \qquad (4.17)$$

其中 K_2 仍为待定常数。

现在应用初始条件(式(4.12))以求得 K_2。在式(4.17)中，令 $t=0+$ 可得

$$v_C(0+) = 0 = V_s + K_2 e^0 = V_s + K_2 \qquad (4.18)$$

因此，$K_2 = -V_s$，代入式(4.17)，可得电容电压的解为

$$v_C(t) = V_s - V_s e^{-t/RC} \tag{4.19}$$

上式右边的第二项称为暂态响应，最终将趋于无穷小。上式右边的第一项称为稳态响应，也称为强迫响应，即在暂态过程结束后最后保留下来的响应。

跟前面的分析一样，电阻和电容的乘积具有时间量纲，称为时间常数$\tau = RC$。因此该方程的解可写成

$$v_C(t) = V_s - V_s e^{-t/\tau} \tag{4.20}$$

图4.4所示为电压$v_C(t)$的波形图。可见，随着时间的增大，$v_C(t)$从初始值0逐渐趋于终值V_s。经历一个时间常数后，$v_C(t)$等于其终值的63.2%。实际上，大约经历5个时间常数后，$v_C(t)$就已达到其终值V_s，此时电路已经进入稳态。

从图4.4可以看出，$v_C(t)$在初始时刻的切线延长后与稳态值相交的时刻正好为一个时间常数。

通过以上的分析，我们知道电容的充电和放电都需要经过数倍时间常数的过渡时间，这一点使数字计算机的数据处理速度受到限制。在典型的计算机中，信息或者用+1.8 V电压，或者用0 V电压来表示，具体用哪个电压由它们代表的数字量来决定。当数据发生变化时，电压也随之发生变化。在设计电路中当电压发生变化时不可能不会对一些电容进行充电或者放电。进一步说，电路中肯定存在一些非零电阻，当电容在充放电时，它们将会阻碍电流流动。所以，计算机中每个电路非零的时间常数将限制它们的运行速度。在以后的章节中我们将会更深入地学习数字计算机。

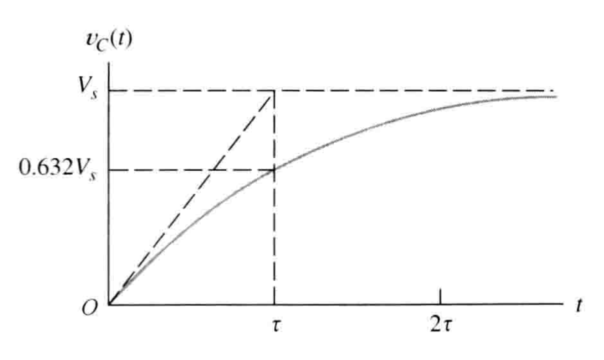


图4.4　图4.3所示RC电路充电的暂态过程

练习4.1　假设图4.1(a)所示电路中，$R = 5000\ \Omega$，$C = 1\ \mu\text{F}$。试求经历多长时间后电容电压变为其初始值的1%。

答案：$t = -5\ln(0.01)\text{ms} \approx 23\text{ ms}$。

练习4.2　试证明图4.4中电压$v_C(t)$在初始时刻的切线延长后与稳态值相交的时刻正好为一个时间常数。[$v_C(t)$的表达式由式(4.20)给出。]

4.2　直流稳态

*RLC*电路中电压和电流表达式的暂态项随着时间的增大将会衰减到零(没有电阻的*LC*电路除外)。对于直流电源的电路，电压和电流的稳态值也为常数。

根据如下的方程可求得流过电容的电流：

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

如果电压$v_C(t)$是常数，则电流应为零。换句话说，电容相当于开路。因此，在直流电路稳态的情况下，电容相当于开路。

同理，对于电感有

$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

当电流为常数时，电压也为零。因此，在直流电路稳态的情况下，电感相当于短路。

这些结论提供了一种计算 *RLC* 电路直流稳态解的方法。首先，将电容和电感分别用开路和短路代替，此时电路仅由直流电源和电阻构成。最后，求解等效电路以获得电压和电流的稳态值。

例 4.1 直流稳态分析。

试求图 4.5(a)所示电路在 $t \gg 0$ 时的 v_x和 i_x。

解: 在开关闭合很长时间以后，假设暂态响应已衰减为零，则电路进入了直流稳定状。我们将电感用短路代替，电容用开路代替以进行直流稳态分析，图 4.5(b)所示为直流稳态等效电路。

这是一个可以直接求解的电阻电路，电阻 R_1和 R_2形成串联结构，因此有

$$i_x = \frac{10}{R_1 + R_2} = 1\ \text{A}$$

及

$$v_x = R_2 i_x = 5\ \text{V}$$

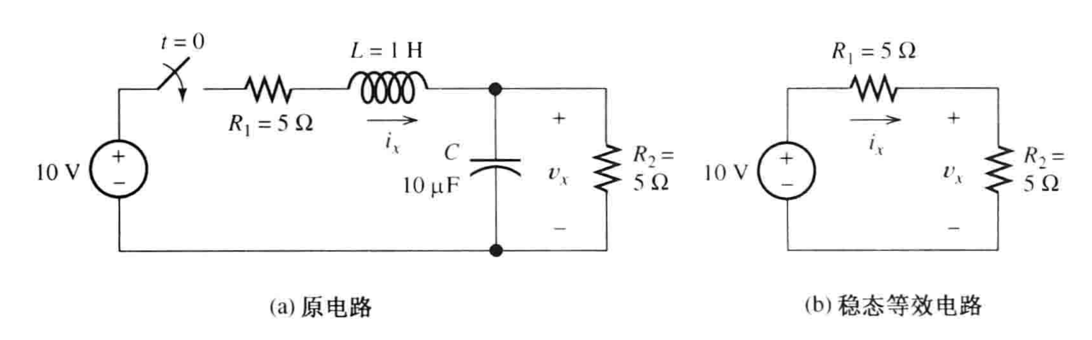


图 4.5 例 4.1 的电路及其直流稳态等效电路

有时，我们只对电路的直流稳态感兴趣。比如在汽车的前灯电路中，我们最关心稳态的情况。另一方面，在分析点火系统的工作过程时，暂态分析是必不可少的。

在其他一些场合，我们又对正弦交流稳态感兴趣。对于正弦电源，稳态电压和电流也是正弦量。在第 5 章将学习一种类似于直流稳态分析的方法以求解正弦稳态电路。这种方法不是将电感和电容用短路和开路代替，而是用如同电阻的阻抗表示，只不过阻抗是虚数。

练习 4.3 试求图 4.6 所示电路中标注的未知电压和电流的稳态值。

答案: (a) v_a = 50 V, i_a = 2 A; (b) i_1 = 2 A, i_2 = 1 A, i_3 = 1 A。

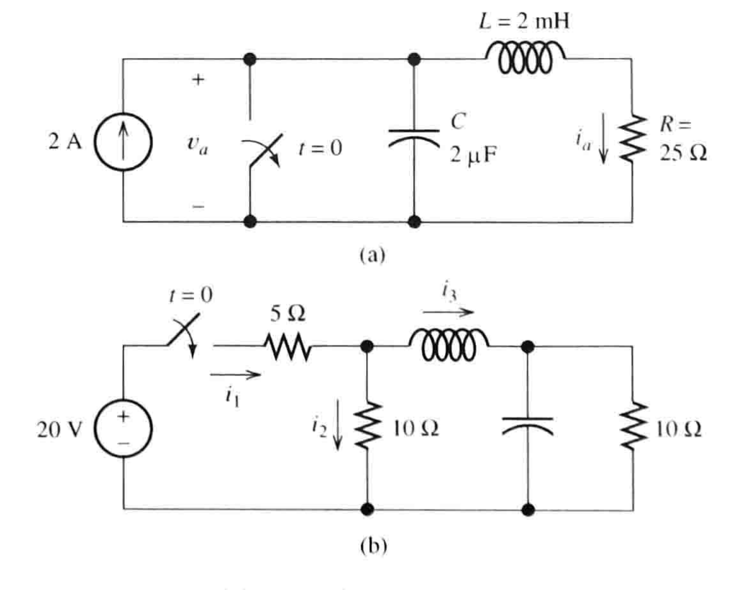


图 4.6 练习 4.3 的电路

4.3 *RL* 电路

本节将学习含有直流电源、电阻和仅有一个电感的电路，其分析方法和解的形式都非常类似4.1节的 *RC* 电路。

对含有直流电源、电阻和仅有一个储能元件（电容或电感）的简单电路的暂态分析步骤为：

1. 应用基尔霍夫电流和电压定律列写电路方程；
2. 如果方程中含有积分项，则将该方程的每一项进行微分，使其转换为一个纯微分方程；
3. 假设解的形式为 $K_1 + K_2e^{st}$；
4. 将该表达式代入微分方程求取参数 K_1 和 S（也可以用4.2节中电路稳态分析的方法计算参数 K_1）；
5. 应用初始条件计算参数 K_2；
6. 获得解的最终表达式。

例4.3 *RL* 电路的暂态分析。

试求图4.7所示电路中 $i(t)$ 和 $v(t)$ 的暂态响应。

解： 首先求电流 $i(t)$。显然，在 $t=0$ 时刻以前，开关是断开的，电流为零：

$$i(t) = 0, \qquad t < 0 \tag{4.21}$$

当开关闭合后，电感电流逐渐增大，最终达到稳态值。

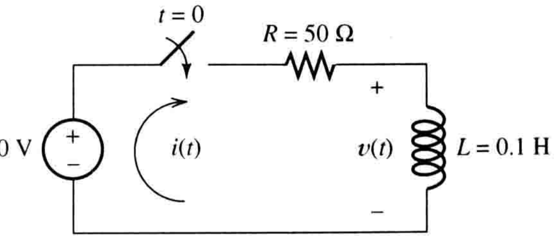


图4.7 例4.2的电路

根据回路的KVL方程，可得该电路的微分方程为

$$Ri(t) + L\frac{di}{dt} = V_s \tag{4.22}$$

该方程与式(4.11)形式相同，那么其解的结构也类似于式(4.13)的形式，因此可假设该方程解的形式为

$$i(t) = K_1 + K_2e^{st} \tag{4.23}$$

其中，K_1、K_2和 s 为待定常数。然后根据4.1节提出的分析方法，将式(4.23)的 $i(t)$ 代入式(4.22)，可得

$$RK_1 + (RK_2 + sLK_2)e^{st} = V_s \tag{4.24}$$

由上式可得

$$K_1 = \frac{V_s}{R} = 2 \tag{4.25}$$

以及

$$s = \frac{-R}{L} \tag{4.26}$$

将式(4.25)和式(4.26)代入式(4.23)，可得

$$i(t) = 2 + K_2e^{-tR/L} \tag{4.27}$$

接下来根据初始条件计算参数 K_2。由于开关是断开的，在 $t=0$ 时刻之前电感电流为零。由于电感电压是有限值，那么其电流必然是连续的，在开关闭合的瞬间，电流必然为零。因此

可得

$$i(0+) = 0 = 2 + K_2 e^0 = 2 + K_2 \tag{4.28}$$

求解上式有 $K_2 = -2$。

再将上式代入式(4.27)，可得电感电流的解为

$$i(t) = 2 - 2e^{-t/\tau}, \qquad t > 0 \tag{4.29}$$

其中时间常数为

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{4.30}$$

图 4.8(a)所示为电流随时间变化的曲线。可以看出，电流从初始值 0 逐渐增大到稳态值 2 A。经历 5 个时间常数后，$i(t)$已达到其终值的99%，此时电路已经进入稳态(正如4.2 节所讲的分析方法，将电感用短路代替则可直接求得该结果)。

现在来考虑电压 $v(t)$。在 $t=0$ 时刻以前，开关是断开的，电感电压为零：

$$v(t) = 0, \qquad t < 0 \tag{4.31}$$

在 $t=0$ 时刻之后，$v(t)$应等于电源电压减去电阻 R 上的压降。因此可得

$$v(t) = 100 - 50i(t), \qquad t > 0 \tag{4.32}$$

将式(4.29)代入上式，可得电感电压的暂态响应为

$$v(t) = 100e^{-t/\tau} \tag{4.33}$$

图 4.8(b)所示为电压 $v(t)$的曲线。

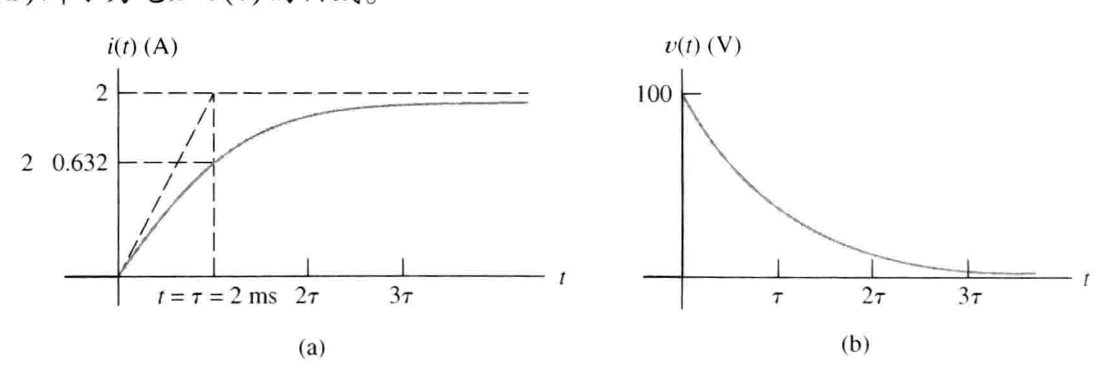


图 4.8 图 4.7 所示电路电压和电流的波形

从图 4.8 的波形图可以看出，在 $t=0$ 时刻，电感电压从 0 突变到 100 V。随着电流的增加，电阻上的电压降也在增加，使得电感电压逐渐减小。进入稳态后，电感相当于短路，因此其电压$v(t)=0$。

通过对上面一个简单一阶电路的分析可以看出，我们完全可以运用个人经验而不按照本节最初的步骤逐步分析计算。在下一个例题中将会简化计算过程。

例 4.3 *RL* 电路的暂态分析。

图 4.9 所示电路中 V_s为直流电源。假设在 $t=0$ 时刻之前电路处于稳态。试求 $i(t)$ 和 $v(t)$ 的表达式。

解： 由于在 $t=0$ 时刻以前电感相当于短路，因此可得

$$v(t) = 0, \qquad t < 0$$

以及

$$i(t)=\frac{V_s}{R_1}, \qquad t<0$$

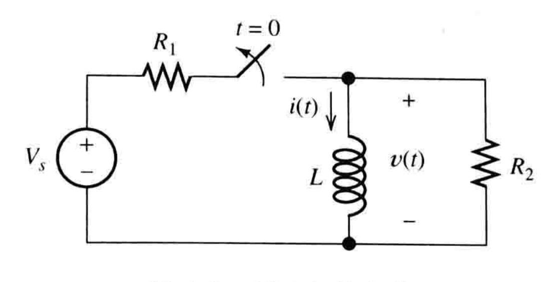


图4.9 例4.3的电路

在开关断开之前，电流沿着顺时针方向依次流过 V_s、R_1 和电感。当开关断开后，电流继续流过电感，但是将通过 R_2 形成闭合路径。那么电感两端的电压降施加在 R_2，使得其电流将减小。

当开关断开后，由于电路中不再有任何电源，则电流的稳态值将为零。因此 $i(t)$ 的表达式可写成

$$i(t)=Ke^{-t/\tau}, \qquad t>0 \tag{4.34}$$

其中时间常数为

$$\tau=\frac{L}{R_2} \tag{4.35}$$

除非电感两端的电压为无穷大，那么其电流肯定是连续的。我们知道，在 $t=0$ 时刻以前，$i(t)=\frac{V_s}{R_1}$，那么在开关断开的瞬间，有

$$i(0+)=\frac{V_s}{R_1}=Ke^{-0}=K$$

将参数 K 的值代入式(4.34)，可得电感电流为

$$i(t)=\frac{V_s}{R_1}e^{-t/\tau}, \qquad t>0 \tag{4.36}$$

电感电压为

$$\begin{aligned} v(t)&=L\frac{di(t)}{dt}\\ &=0, \qquad t<0\\ &=-\frac{LV_s}{R_1\tau}e^{-t/\tau}, \qquad t>0 \end{aligned}$$

电压和电流随时间变化的曲线如图4.10所示。

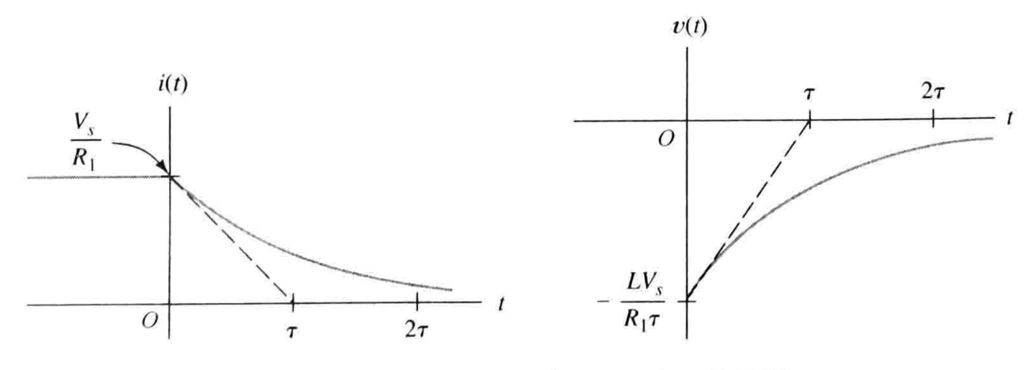


图4.10 图4.9所示电路电压和电流的波形

练习4.4 在例4.3的电路(图4.9)中，假设 $V_s=15$ V，$R_1=10\ \Omega$，$R_2=100\ \Omega$，$L=0.1$ H。(a)该电路的时间常数是多少(开关断开后)？(b)电压 $v(t)$ 的最大幅值是多少？(c) $v(t)$ 的最大幅值为电源电压的多少倍？(d)当开关断开后需要经过多长时间 $v(t)$ 的大小仅为其初始值的一半？

答案：(a) $\tau=1$ ms；(b) $|v(t)|_{max}=150$ V；(c) $v(t)$ 的最大幅值为电源电压的10倍；(d) $t=\tau\ln(2)=0.693$ ms。

练习4.5 在图4.11所示电路中，在 $t=0$ 时刻开关断开。试求 $t>0$ 后 $v(t)$、$i_R(t)$ 和 $i_L(t)$ 的表达式。假设在开关断开之前 $i_L(t)$ 为零。

答案： $v(t) = 20\mathrm{e}^{-t/0.2}$，$i_R(t) = 2\mathrm{e}^{-t/0.2}$，$i_L(t) = 2 - 2\mathrm{e}^{-t/0.2}$。

练习4.6 在图4.12所示电路中，在 $t=0$ 时刻以前开关已经闭合了很长一段时间。试求 $i(t)$ 和 $v(t)$ 的表达式。

答案：

$$\begin{aligned} i(t) &= 1.0, \quad t<0 \\ &= 0.5 + 0.5\mathrm{e}^{-t/\tau}, \quad t>0 \\ v(t) &= 0, \quad t<0 \\ &= -100\mathrm{e}^{-t/\tau}, \quad t>0 \end{aligned}$$

其中时间常数 $\tau = 5$ ms。

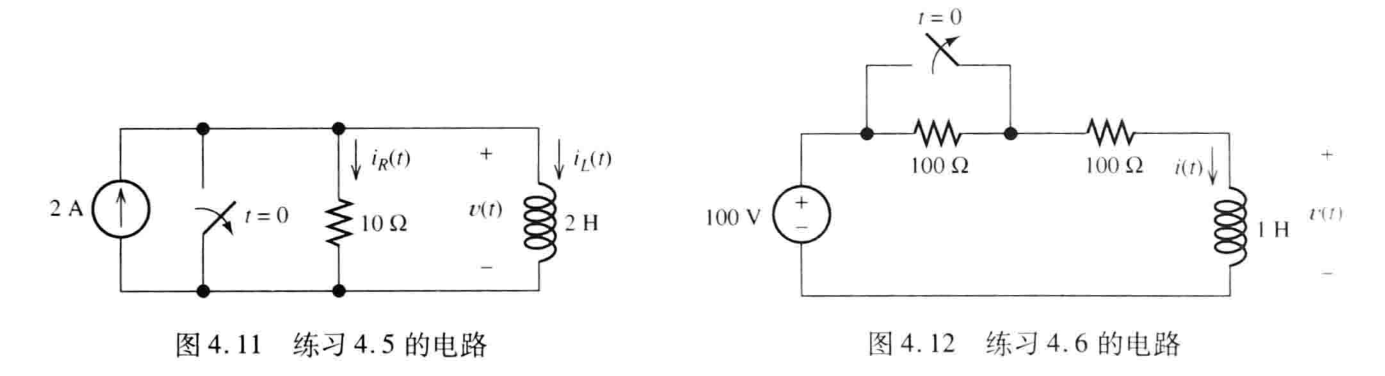


图4.11 练习4.5的电路　　　图4.12 练习4.6的电路

4.4 其他激励作用下的 *RC* 和 *RL* 电路

目前我们已知道 *RL* 和 *RC* 电路有类似的地方，在此基础上我们将分析它们在其他激励作用下的解。本节仍然处理仅含有一个储能元件的电路，即只有一个电感或电容。

考虑如图4.13(a)所示的电路，方框里面为电阻和电源的任意组合，电感 L 放在方框之外。回顾一下我们所学的可以戴维南等效电路表示仅含电源和电阻的电路，其等效电路由一个独立电压源和戴维南电阻串联而成。因此，任何包含了电源、电阻和一个电感的电路可以等效为如图4.13(b)所示的电路。(当然，我们也可以将含有电源、电阻和一个电容的电路简化为类似的形式。)

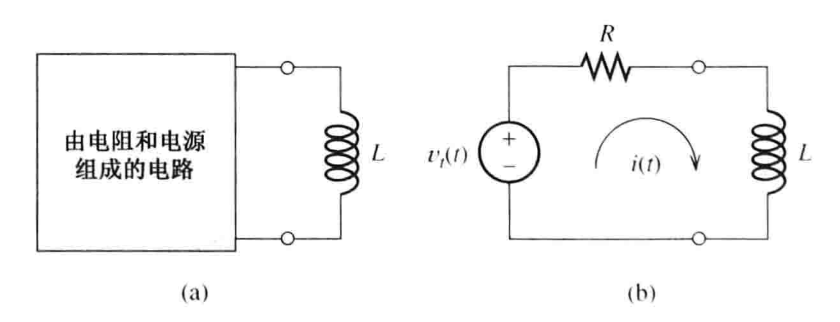


图4.13 由电源、电阻和一个电感组成的电路可以等效为一个电压源和一个电阻与电感串联而成

对图4.13(b)所示的电路列写 KVL 方程，可得

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) = v_t(t) \tag{4.37}$$

将上式两端同时除以电阻 R，可得

$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+i(t)=\frac{v_t(t)}{R} \tag{4.38}$$

通常情况下，含有一个电感或一个电容的任何电路方程都具有如下形式：

$$\tau\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+x(t)=f(t) \tag{4.39}$$

然后我们开始求解在给定初始条件（比如电感的初始电流）下方程(4.39)的解。

常数τ（即时间常数）为电阻和电感（或电容）的函数。$f(t)$称为强迫函数，也就是电路的电源部分。如果一个电路没有外接电源（如图4.1所示），则强迫函数为零。如果是直流电源，则强迫函数是常数。

由于方程(4.39)的最高阶微分是一阶，因此称为一阶微分方程。由于该方程未包含功率或$x(t)$或其微分的非线性函数，因此该方程是一个线性方程。因此，为了分析*RL*（或*RC*）电路，我们必须求出一阶常系数微分方程的解。

4.4.1　微分方程的解

关于微分方程的一个重要结论表明方程(4.39)的解由两部分组成。第一部分称为特解，其表达式应满足方程(4.39)，即

$$\tau\frac{\mathrm{d}x_p(t)}{\mathrm{d}t}+x_p(t)=f(t) \tag{4.40}$$

特解也称为强迫响应，是因为它与强迫函数有关（即与独立电源有关）。

（虽然特解满足微分方程，但是它可能不满足初始条件，即电容电压或电感电流的初始值。将特解加上另一部分，即补充解，这样即可获得既满足微分方程、也满足初始条件的解。）

我们经常根据强迫函数来选取特解的形式。通常情况下特解与强迫函数及其微分项具有相同的形式。

在工程中正弦函数是用得最多的强迫函数之一。比如，考虑如下的强迫函数：

$$f(t)=10\cos(200t)$$

由于正余弦函数的微分也是正余弦函数，因此选取如下形式的特解：

$$x_p(t)=A\cos(200t)+B\sin(200t)$$

其中A和B是两个需要确定的常数。我们将上述特解代入微分方程并使方程两边完全一致，从而可以解出A和B。（在第5章中，我们将学习求解正弦激励源电路的强制响应的便捷方法。）

方程解的第二部分称为**补充解**$x_c(t)$，它是**齐次方程**的解：

$$\tau\frac{\mathrm{d}x_c(t)}{\mathrm{d}t}+x_c(t)=0 \tag{4.41}$$

通过令强迫函数为0得到此齐次方程。因此，补充解的形式并不取决于输入函数的形式。由于它取决于电路的元件，所以它也被称为**自然响应**。为使所得的一般解符合电流和电压的初值，补充解应该和特解相加。

将齐次方程变形为以下形式：

$$\frac{\mathrm{d}x_c(t)/\mathrm{d}t}{x_c(t)}=\frac{-1}{\tau} \tag{4.42}$$

整理方程(4.42)两边，得到

$$\ln[x_c(t)]=\frac{-t}{\tau}+c \tag{4.43}$$

方程中c是积分常数。方程(4.43)等价为

$$x_C(t) = \mathrm{e}^{(-t/\tau + c)} = \mathrm{e}^{c}\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

再令 $K = \mathrm{e}^c$，将得到补充解：

$$x_C(t) = K\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{4.44}$$

4.4.2 解方程的步骤

接下来，我们将总结如何解由一个电阻、一个激励源和一个电感(或电容)组成的电路。

1. 写出回路方程并整理成一阶微分方程。
2. 求出一个特解。具体取决于强迫函数的形式，我们通过例子和练习来描述几种强迫函数。
3. 把特解和由方程(4.44)得到的补充解相加得到完整解，其中包含任意常数 K。
4. 由初始条件解出 K 值。

我们通过下面的例子来说明。

例 4.4 正弦激励作用下 RC 电路瞬态分析。

电路电流的解在图 4.14 中，电容被充电，初值为 $v_C(0+) = 1$ V。

解 首先，写出 $t>0$ 时的电压方程，以顺时针为正方向将各个电压相加得到：

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t + v_C(0) - 2\sin(200t) = 0$$

通过对方程两边求导将方程变形。显然，对积分求导得到被积函数。因为 $v_C(0)$ 是常量，求导为 0，故有

$$R\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i(t) = 400\cos(200t) \tag{4.45}$$

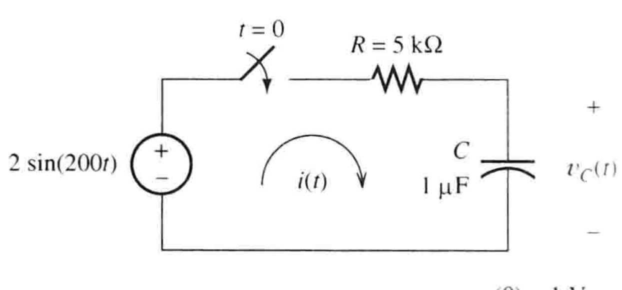


图 4.14 正弦激励作用的一阶 RC 电路，参见例4.4

两边乘以 C 得到

$$RC\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + i(t) = 400\,C\cos(200t) \tag{4.46}$$

代入 R 和 C 的值，得到

$$5\times 10^{-3}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + i(t) = 400\times 10^{-6}\cos(200t) \tag{4.47}$$

第二步要求一个特解 $i_p(t)$。通常，首先推测 $i_p(t)$ 的形式，可能包含一些未知常量。然后，将猜测的解代入微分方程求得常量。本例中，因为 $\sin(200t)$ 和 $\cos(200t)$ 的求导分别为 $200\cos(200t)$ 和 $-200\sin(200t)$，因而将特解形式写成

$$i_p(t) = A\cos(200t) + B\sin(200t) \tag{4.48}$$

A 和 B 是待求的常量，因此 i_p 是方程(4.47)的解。

将上述方程代入方程(4.47)，得到

$$-A\sin(200t) + B\cos(200t) + A\cos(200t) + B\sin(200t) = 400\times 10^{-6}\cos(200t)$$

方程等号左边和右边应该一致，合并 sin 函数项的系数，得

$$-A + B = 0 \tag{4.49}$$

合并 cos 函数项的系数，得

$$B + A = 400 \times 10^{-6} \tag{4.50}$$

可解上述方程，得到

$$A = 200 \times 10^{-6} = 200\ \mu\text{A}$$

和

$$B = 200 \times 10^{-6} = 200\ \mu\text{A}$$

把以上值代入方程(4.48)，得到特解：

$$i_p(t) = 200\cos(200t) + 200\sin(200t)\ \mu\text{A} \tag{4.51}$$

也可将其写成

$$i_p(t) = 200\sqrt{2}\cos(200t - 45°)$$

（第5章中我们将学习更简便的合并 sin 和 cos 函数的方法。）

令方程(4.46)中的强迫函数为0，可以得到以下齐次方程：

$$RC\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + i(t) = 0 \tag{4.52}$$

方程的补充解为

$$i_c(t) = K\mathrm{e}^{-t/RC} = K\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{4.53}$$

将补充解和特解相加得到方程的一般解：

$$i(t) = 200\cos(200t) + 200\sin(200t) + K\mathrm{e}^{-t/RC}\ \mu\text{A} \tag{4.54}$$

最后，代入初始值求得常数 K。电压和电流在开关闭合后瞬间的情况显示在图4.15中。激励源电压为0，电容两端的电压为 $v_C(0+) = 1$。因而，电阻两端电压必定为 $v_R(0+) = -1$ V，因此，我们得到

$$i(0+) = \frac{v_R(0+)}{R} = \frac{-1}{5000} = -200\ \mu\text{A}$$

将 $t = 0$ 代入方程(4.54)，得到

$$i(0+) = -200 = 200 + K\ \mu\text{A} \tag{4.55}$$

解得 $K = -400\ \mu$A，把 K 代入方程(4.54)得到

$$i(t) = 200\cos(200t) + 200\sin(200t) - 400\mathrm{e}^{-t/RC}\ \mu\text{A} \tag{4.56}$$

特解和补充解的波形绘于图4.16。电路的时间常数为 $\tau = RC = 5$ ms。注意到自然响应在25 ms后衰减到一个可忽略的值。和预想的一样，自然响应在5倍时间常数下衰减完毕。另外，注意到对于输入为正弦强迫函数，强迫响应也是正弦的并且在自然响应衰减完后仍然持续。

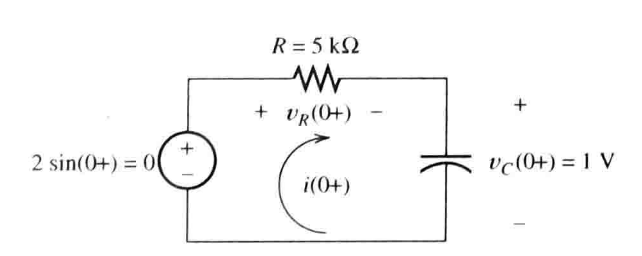


图4.15 图4.14所示电路在开关闭合后瞬间的电压和电流

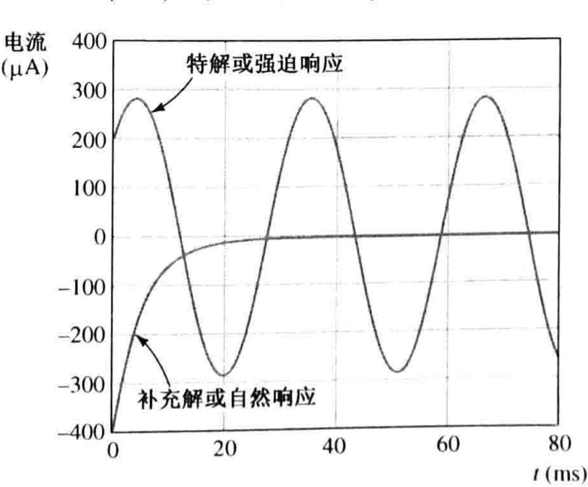


图4.16 例4.4中的补充解和特解

完整解的波形绘制于图 4.17。

练习 4.7 在例 4.4 中，如果激励源电压变为 $2\cos(200t)$ 且电容电压初始值为 $v_C(0)=0$，改变后的电路图绘于图 4.18。

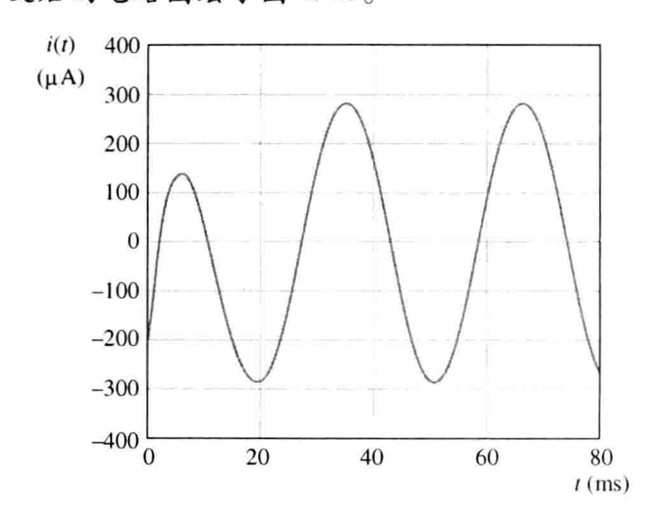


图 4.17 例 4.4 中的完整解

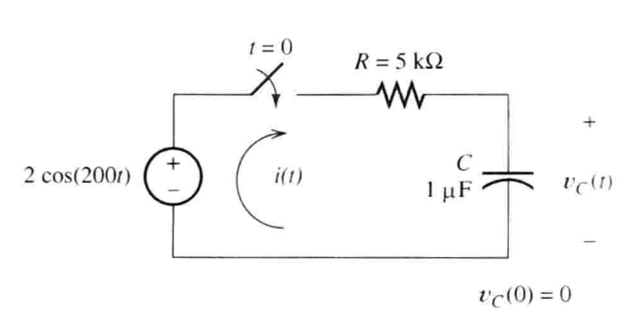


图 4.18 练习 4.7 中的电路

解答: $i(t)=-200\sin(200t)+200\cos(200t)+200e^{-t/RC}\mu A$，其中时间常数 $\tau=RC=5$ ms。

练习 4.8 求解图 4.19 所示电路在开关闭合后的电流。[提示：特解形式为 $i_p(t)=Ae^{-t}$]。

解答: $i(t)=20e^{-t}-15e^{-t/2}\mu A$。

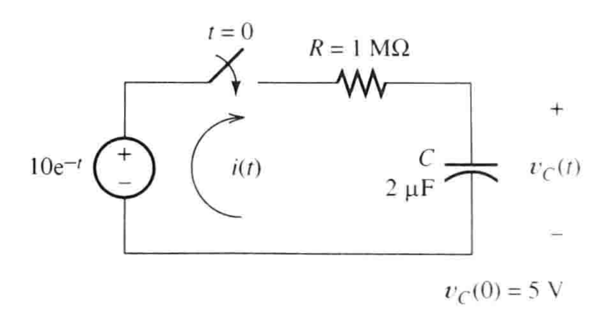


图 4.19 练习 4.8 中的电路

4.5 二阶电路

本节中，我们将考虑包含两个储能元件的电路。特别地，我们关注含有一个电感和一个电容串联或并联的电路。

4.5.1 微分方程

要导出二阶电路的一般形式解，考虑串联的情况如图 4.20(a)所示。写出 KVL 方程，即

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt+v_C(0)=v_s(t) \tag{4.57}$$

对时间进行微分，得到

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2}+R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=\frac{dv_s(t)}{dt} \tag{4.58}$$

除以 L，得到

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{LC}i(t)=\frac{1}{L}\frac{dv_s(t)}{dt} \tag{4.59}$$

接下来，定义阻尼系数为

$$\alpha=\frac{R}{2L} \tag{4.60}$$

以及无阻尼振荡角频率：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{4.61}$$

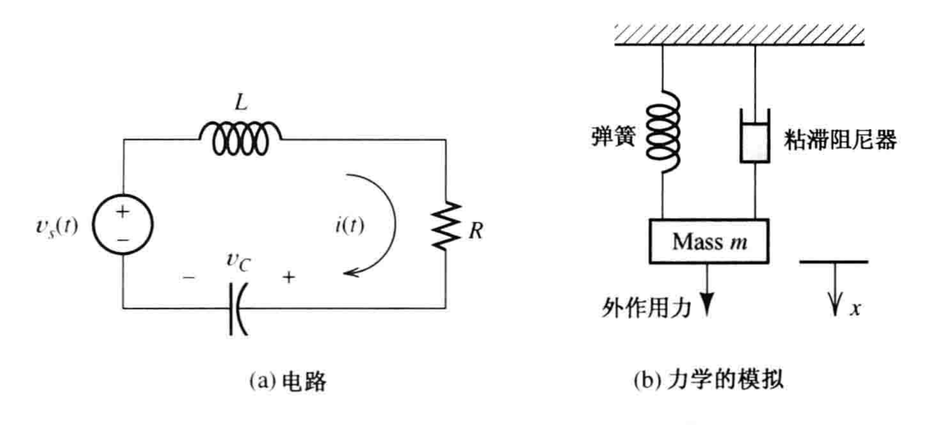
强迫函数为

$$f(t) = \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}v_s(t)}{\mathrm{d}t} \tag{4.62}$$

利用定义，将方程(4.59)写成

$$\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i(t) = f(t) \tag{4.63}$$

这是一个线性二阶常系数微分方程。因此，我们将含有两个储能元件的电路称为二阶电路。(两个储能元件可通过串联或并联合并的情况除外。例如，两个电容并联，我们可以把它们合并成一个等效电容，得到一个一阶电路。)



(a) 电路　　(b) 力学的模拟

图4.20　串联 *RLC* 电路及其力学的模拟

4.5.2　力学的模拟

串联 *RLC* 电路的力学模拟见图4.20(b)。重物的位移 x 类比于充电，速度 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 类比于电流，拉力类比于电压。重物类似于电感，弹簧类似于电容，阻碍器类似于电阻。这个力学系统的运动方程可以写成方程(4.63)的形式。

基于图4.20的直观考虑，可以假设一个突然的恒定作用力(直流电压)，这将造成一个逐渐向稳态靠近的位移(电流)，或者是进入稳态前有一个振荡过程。这取决于重量、弹性系数和阻尼系数间的关系。

4.5.3　二阶方程的解

我们发现有两个储能元件的电路的电流和电压方程可以表示成方程(4.63)的形式。因此，将解写成

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = f(t) \tag{4.64}$$

式中用 $x(t)$ 代表一个变量，它可以表示电流或电压。

这里再次说明，方程的通解 $x(t)$ 由两部分组成：一个特解 $x_p(t)$ 与一个齐次解 $x_c(t)$ 的和的形式，写作

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) \tag{4.65}$$

特解　特解是一个表达式 $x_p(t)$，它满足以下微分方程：

$$\frac{d^2x_p(t)}{dt^2}+2\alpha\frac{dx_p(t)}{dt}+\omega_0^2x_p(t)=f(t) \tag{4.66}$$

特解也称为**强迫响应**。(通常，把 $x_p(t)$ 代入方程(4.66)等号左边会产生零网络结果的关系应该消除。换句话说，要消除任何与齐次解有相同形式的关系。)

我们主要关心常量(直流)或正弦(交流)强迫函数。对于直流激励源，将电感视为短路或将电容视为开路可直接解出特解，此方法在4.2节中已经讨论过。在第5章中，我们将学习求解正弦激励输入下的强迫响应的更有效的方法。

齐次解 齐次解 $x_c(t)$ 可由齐次方程中令强迫函数 $f(t)$ 为0解出。因此，齐次方程的解为

$$\frac{d^2x_c(t)}{dt^2}+2\alpha\frac{dx_c(t)}{dt}+\omega_0^2x_c(t)=0 \tag{4.67}$$

在解齐次方程时，先令齐次解 $x_c(t)=Ke^{st}$ 并代入到方程(4.67)可得

$$s^2Ke^{st}+2\alpha sKe^{st}+\omega_0^2Ke^{st}=0 \tag{4.68}$$

提取公因式，得到

$$(s^2+2\alpha s+\omega_0^2)Ke^{st}=0 \tag{4.69}$$

为得到 Ke^{st} 的非零解，必须使得

$$s^2+2\alpha s+\omega_0^2=0 \tag{4.70}$$

这个方程称为**特征方程**。

阻尼比定义为

$$\zeta=\frac{\alpha}{\omega_0} \tag{4.71}$$

补充解的形式取决于阻尼比的大小。特征方程的根给出如下：

$$s_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \tag{4.72}$$

和

$$s_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \tag{4.73}$$

通过比较阻尼比与1的大小得到以下三种情况。

1. 过阻尼状况($\zeta>1$)。如果 $\zeta>1$(即如果 $\alpha>\omega_0$)，特征方程有两个不同的实根，补充解可写为

$$x_c(t)=K_1e^{s_1t}+K_2e^{s_2t} \tag{4.74}$$

   这种情况下我们称电路处于**过阻尼状态**。

2. 临界阻尼状况($\zeta=1$)。如果 $\zeta=1$(即如果 $\alpha=\omega_0$)，特征方程有两个相等的实根，补充解可以写成

$$x_c(t)=K_1e^{s_1t}+K_2te^{s_1t} \tag{4.75}$$

   这种情况下我们称电路处于**临界阻尼状态**。

3. 欠阻尼状态($\zeta<1$)。如果 $\zeta<1$(即 $\alpha<\omega_0$)，特征方程有复数解。(复数解指的是方程的根包含 $\sqrt{-1}$。)换句话说，根的形式为

$$s_1 = -\alpha + \mathrm{j}\omega_n \quad 和 \quad s_2 = -\alpha - \mathrm{j}\omega_n$$

上式中$j = \sqrt{-1}$，且定义**自然角频率**为

$$\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \tag{4.76}$$

（在电气工程中，用j而不是i来代表虚数$\sqrt{-1}$，这是因为i代表电流。）

对于虚数根的情况，补充解有以下形式：

$$x_c(t) = K_1 \mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\omega_n t) + K_2 \mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_n t) \tag{4.77}$$

这种情况下我们称电路处于**欠阻尼状态**。

例4.5 直流激励源作用下二阶电路的分析。

一个直流激励源通过开关在$t=0$时刻闭合接入串联RLC电路，电路图如图4.21所示。初值为$i(0)=0$，$v_C(0)=0$。写出$v_C(t)$的微分方程；若已知$R=300$、200和100 Ω，求解$v_C(t)$。

解：首先，写出用电容电压表示的电流表达式：

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} \tag{4.78}$$

然后，写出电路的KVL方程：

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) + v_C(t) = V_s \tag{4.79}$$

用方程(4.78)代替$i(t)$，得到

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + v_C(t) = V_s \tag{4.80}$$

两边除以LC，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}v_C(t) = \frac{V_s}{LC} \tag{4.81}$$

和预想的一样，$v_C(t)$的微分方程与方程(4.63)具有相同的形式。

接下来，求特解。因为有直流激励源，我们将电感用短路替代，电容用开路替代，从而得到这部分解，其显示于图4.22中。因此电流为零，电阻上的压降也为零，从而电容电压（开路）等于直流激励源电压。因此，特解为

$$v_{Cp}(t) = V_s = 10\ \mathrm{V} \tag{4.82}$$

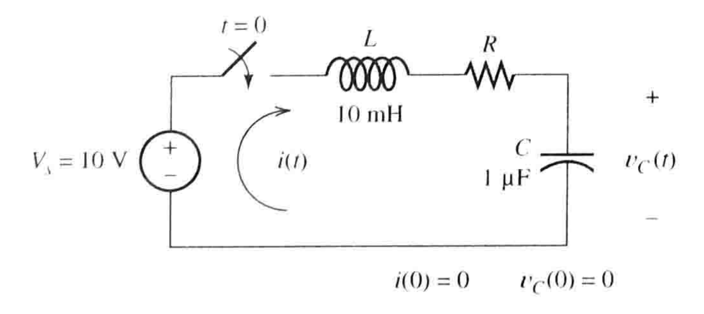


图4.21 例4.5的电路

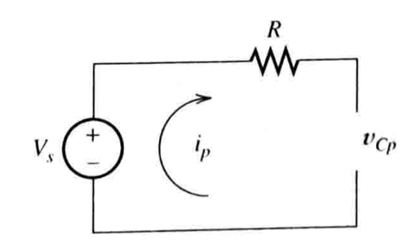


图4.22 图4.21的等值电路。稳态下电感视为短路，电容视为开路

[通过代入方程(4.81)可以证明这是方程的一个特解。]注意到电路中$v_C(t)$的特解在三种电阻值的情况下均相同。

接下来，我们将解出各个电阻值对应的齐次解和通解。三种阻值下均有

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4 \tag{4.83}$$

情况Ⅰ($R = 300\ \Omega$)

这种情况下有

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 1.5 \times 10^4 \tag{4.84}$$

阻尼比为 $\zeta = \alpha/\omega_0 = 1.5$。因为 $\zeta > 1$，是过阻尼状态。方程特征根在方程(4.72)和方程(4.73)中已经给出，代入数值得到

$$\begin{aligned} s_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ &= -1.5 \times 10^4 - \sqrt{(1.5 \times 10^4)^2 - (10^4)^2} \\ &= -2.618 \times 10^4 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} s_2 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ &= -0.3820 \times 10^4 \end{aligned}$$

齐次方程有方程(4.74)的形式。将方程(4.82)的特解加上齐次解，得到通解：

$$v_C(t) = 10 + K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \tag{4.85}$$

现在，我们要求出适合电路的初值的 K_1 和 K_2。已知电容电压的初值为零，因此

$$v_C(0) = 0$$

在方程(4.85)中令 $t = 0$，得到

$$10 + K_1 + K_2 = 0 \tag{4.86}$$

另外，已知初始电流为 $i(0) = 0$，之前已经给出电流表达式为

$$i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

我们推断

$$\frac{dv_C(0)}{dt} = 0$$

对方程(4.85)求导并令 $t = 0$，得到

$$s_1 K_1 + s_2 K_2 = 0 \tag{4.87}$$

现在，可以由方程(4.86)和方程(4.87)解得 K_1 和 K_2。得到 $K_1 = 1.708$ 和 $K_2 = -11.708$，将它们代入方程(4.85)，得到解为

$$v_C(t) = 10 + 1.708 e^{s_1 t} - 11.708 e^{s_2 t}$$

方程各个部分和通解的波形绘于图4.23中。

情况Ⅱ ($R = 200\ \Omega$)

这种情况下，得到

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 10^4 \tag{4.88}$$

因为 $\zeta = \alpha/\omega_0 = 1$，这是临界阻尼状态。方程特征根在方程(4.72)和方程(4.73)中已经给出，代入数值得到

$$s_1 = s_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha = -10^4$$

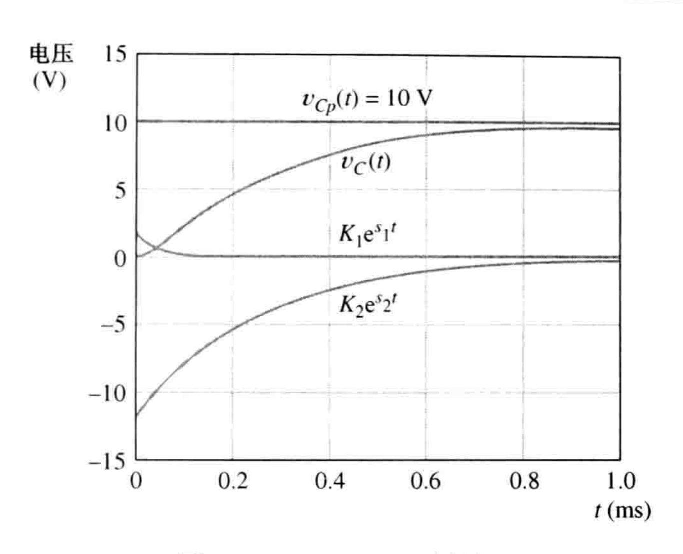


图 4.23 $R=300\ \Omega$ 时的解

齐次方程有方程(4.75)的形式。将特解(方程(4.82))加上齐次解，得到

$$v_C(t) = 10 + K_1e^{s_1t} + K_2te^{s_1t} \tag{4.89}$$

和情况Ⅰ类似，初始值要求 $v_C(0)=0$，且 $\mathrm{d}v_C(0)/\mathrm{d}t=0$。因此，将 $t=0$ 代入方程(4.89)，得到

$$10 + K_1 = 0 \tag{4.90}$$

将方程(4.89)微分并令 $t=0$，得到

$$s_1K_1 + K_2 = 0 \tag{4.91}$$

解方程(4.90)和方程(4.91)得到 $K_1=-10$ 和 $K_2=-10^5$，因此解为

$$v_C(t) = 10 - 10e^{s_1t} - 10^5te^{s_1t} \tag{4.92}$$

方程各个部分和通解的波形绘于图4.24中。

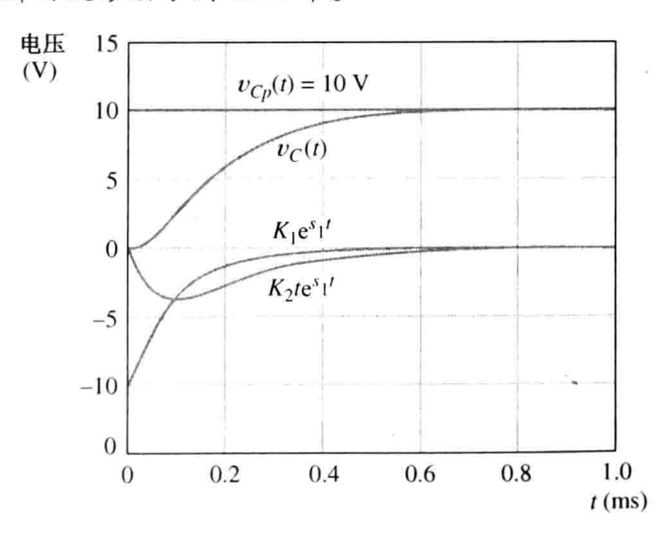


图 4.24 $R=200\ \Omega$ 时的解

情况Ⅲ ($R=100\ \Omega$)

这种阻值的情况中，得到

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 5000 \tag{4.93}$$

因为 $\zeta=\alpha/\omega_0=0.5$，这是欠阻尼状态。通过方程(4.76)，解得自然角频率为

$$\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 8660 \tag{4.94}$$

齐次方程有方程(4.77)的形式。将之前求得的特解加上齐次解，得到通解：

$$v_C(t) = 10 + K_1 e^{-\alpha t}\cos(\omega_n t) + K_2 e^{-\alpha t}\sin(\omega_n t) \tag{4.95}$$

和之前情况类似，初始值要求 $v_C(0)=0$，且 $dv_C(0)/dt=0$。因此，将 $t=0$ 代入方程(4.95)，得到

$$10 + K_1 = 0 \tag{4.96}$$

将方程(4.95)微分并令 $t=0$，得到

$$-\alpha K_1 + \omega_n K_2 = 0 \tag{4.97}$$

解方程(4.96)和方程(4.97)得到 $K_1=-10$ 和 $K_2=-5.774$，因此完整解为

$$v_C(t) = 10 - 10e^{-\alpha t}\cos(\omega_n t) - 5.774e^{-\alpha t}\sin(\omega_n t) \tag{4.98}$$

方程各个部分和通解的波形绘于图 4.25 中。

图 4.26 显示了三种阻值下全解的波形。

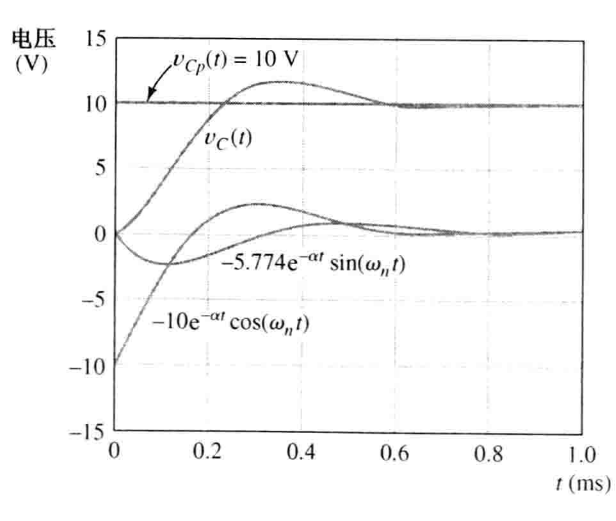


图 4.25 $R = 100\ \Omega$ 时的解

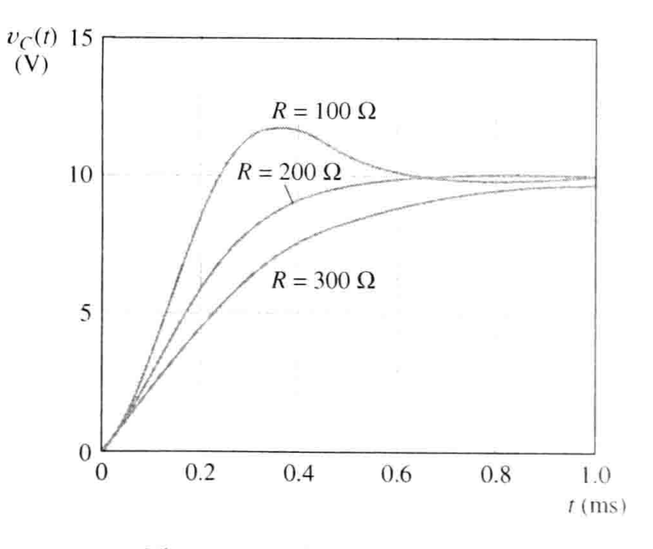


图 4.26 三种电阻值下的解

4.5.4 二阶系统的标准阶跃响应

当突然给电路加一个恒定的激励源时，我们说强迫函数是一个**阶跃函数**。一个单位阶跃函数用 $u(t)$ 表示，绘于图 4.27 中。由定义，有

$$\begin{aligned} u(t) &= 0 \quad t < 0 \\ &= 1 \quad t \geqslant 0 \end{aligned}$$

例如，如果通过闭合开关将一个 A 伏特的直流电压加于电路中，则加入的电压就是阶跃函数，写成

$$v(t) = Au(t)$$

这个函数绘于图 4.28 中。

我们通常遇到如例 4.5 所示的情况，其中阶跃强迫函数作用于二阶系统，这可以描述成下面微分方程的形式：

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = Au(t) \tag{4.99}$$

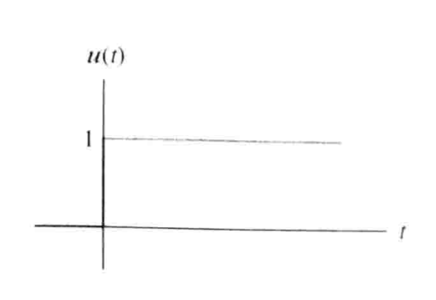
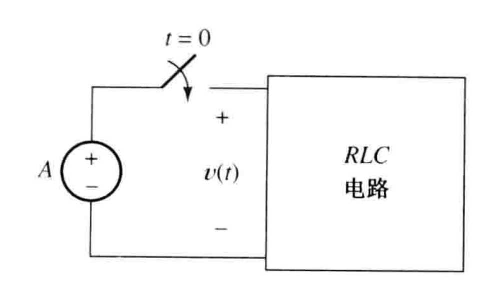


图 4.27 单位阶跃函数 $u(t)$。当 $t<0$ 时，$u(t)=0$；当 $t>0$ 时，$u(t)=1$



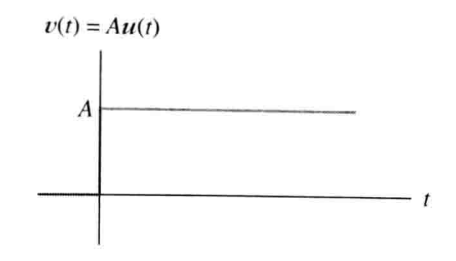


图4.28　开关闭合接入直流电压使得强迫函数为一个阶跃函数

微分方程的特征在于无阻尼共振角频率 ω_0 和阻尼比 $\zeta = \alpha/\omega_0$。[当然，$x(t)$ 的解也取决于初始状态。]标准化的解绘于图4.29中，其中初始状态为 $x(0)=0$ 和 $x'(0)=0$。

当阻尼比 ζ 较小时系统的响应出现在进入稳态前的**超调**和**振荡**。另一方面，如果阻尼比较大(与1相比)，则响应需要较长时间才能逐渐趋近于最终值。

有时，我们想要设计一个能快速达到稳态的二阶系统，然后尝试着将阻尼比设计成接近1。例如，机械臂的控制系统就是一个二阶系统。当阶跃信号要求机械臂移动时，我们希望它能够在最短的时间内到达最终位置，且没有过度的超调和振荡。

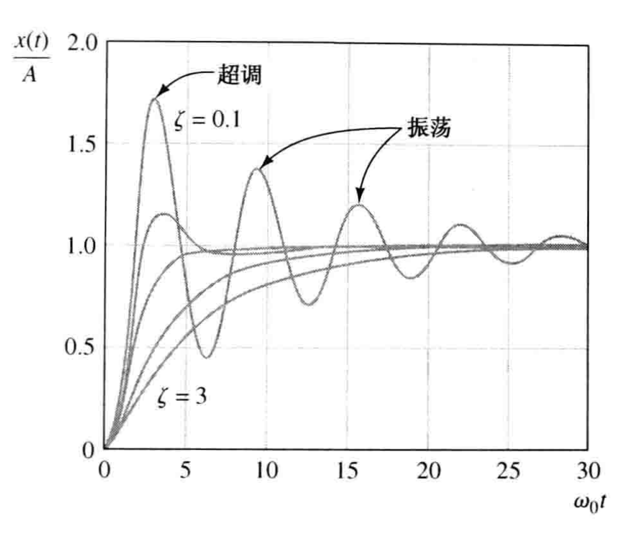


图4.29　由方程(4.99)描述的二阶系统的标准化阶跃响应。其中，阻尼比 $\zeta=0.1, 0.5, 1, 2$，和3。初始状态为假设 $x(0)=0$ 且 $x'(0)=0$

4.5.5　并联 *LC* 电路

有电感电容并联的电路，其解与串联的情况相似。考虑图4.30(a)所示的电路，方框里的电路假定由激励源和电阻构成。正如我们在2.6节中看到的，任何由电阻和激励源构成的二段电路均可等效成诺顿电路，绘于图4.30(b)。

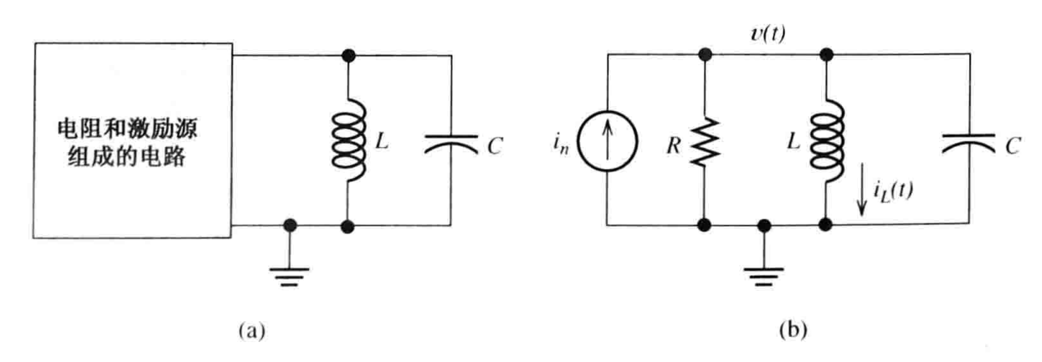


图4.30　任何由激励源、电阻、一对并联 *LC* 支路构成的电路可以缩减为图(b)中所示的等值电路

分析电路，通过对图4.30(b)所示电路的顶部节点列写KCL方程，得到

$$C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R}v(t) + \frac{1}{L}\int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t + i_L(0) = i_n(t) \tag{4.100}$$

两边对时间求导，可以变成纯微分方程：

$$C\frac{d^2v(t)}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{L}v(t)=\frac{di_n(t)}{dt} \tag{4.101}$$

两边除以电容，得到

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{LC}v(t)=\frac{1}{C}\frac{di_n(t)}{dt} \tag{4.102}$$

现在，如果定义阻尼系数

$$\alpha=\frac{1}{2RC} \tag{4.103}$$

无阻尼振荡角频率

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{4.104}$$

强迫函数为

$$f(t)=\frac{1}{C}\frac{di_n(t)}{dt} \tag{4.105}$$

微分方程可以写成

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2}+2\alpha\frac{dv(t)}{dt}+\omega_0^2v(t)=f(t) \tag{4.106}$$

方程的形式恰好和方程(4.64)相同。因此，并联 LC 电路的暂态分析和串联 LC 电路相似。然而，注意方程的阻尼系数 α 在并联电路($\alpha=1/2RC$)中和串联电路($\alpha=R/2L$)中不同。

练习4.9 考虑图4.31所示的电路，电阻 $R=25\ \Omega$。(a)计算无阻尼共振角频率、阻尼系数，以及阻尼比。(b)初始状态为 $v(0-)=0$ 且 $i_L(0-)=0$。这要求 $v'(0+)=10^6$ V/s。(c)计算$v(t)$的特解。(d)计算 $v(t)$的通解，所有参数均用数值表示。

答：(a) $\omega_0=10^5$，$\alpha=2\times10^5$，$\zeta=2$；(b) KCL要求 $i_C(0)=0.1$ A $=Cv'(0)$，因此 $v'(0)=10^6$；(c) $v_p(t)=0$；(d) $v(t)=2.89(e^{-0.268\times10^5t}-e^{-3.73\times10^5t})$。

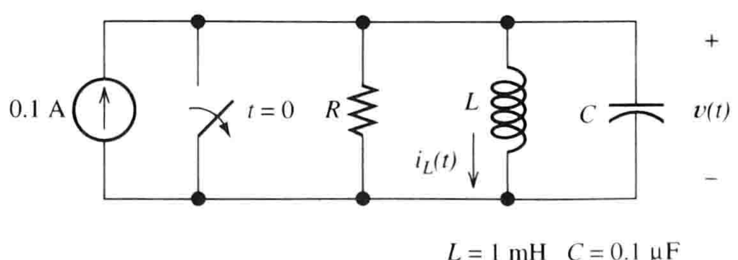


图4.31 练习4.9、练习4.10和练习4.11的电路图

实际应用4.1 电子学与汽车维护的艺术

在汽车漫长的历史中，作为电气暂态的一个直接应用，点火系统被设计了出来。图PA4.1是一个用了很多年的基本点火系统。线圈是一对互相耦合的电感，分别称为主电感和副电感。

由若干触点形成开关的打开和闭合来模拟引擎旋转，在汽缸点火系统的点火瞬间开关打开。当触点闭合的时，电流在线圈的主绕组中缓慢形成。然后，当触点打开时，电流迅速切断。很大的电流变化在副绕组中引起很大的电压，相应的火花塞与副绕组相连。电阻用来限制引擎

停止且触点仍闭合时的电流。电容用来防止当触点快速打开时出现过快的电压上升。(或说电容电压不能突变。)另外，触点间可能出现电弧，将造成触点的燃烧和损耗。电容减缓电压上升，使得触点间隙有足够的时间变宽来承受这个电压。(尽管如此，触点间的电压峰值仍为电源电压的很多倍。)

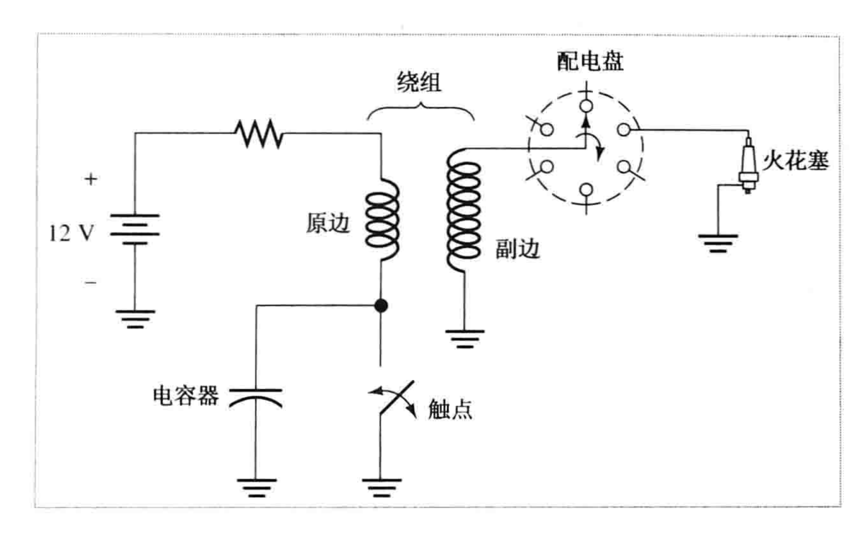


图 PA4.1 内燃机的经典点火系统

主电感、限流电阻和电容形成了一个欠阻尼串联 *RLC* 电路。因此，触点闭合振荡的电流流经主电感时，必定在副绕组中产生一个电压。

早期的点火系统含有机械和真空系统来适应调速器，这取决于发动机速度和风门的放置。最近几年，价格合理的复杂电子设备的出现，使得能适应变化的温度、燃料品质、气压、发动机温度及其他影响因素而获得高性能和低污染的点火系统的需求增加。基本的原则和经典的汽车时代一样，但复杂的电子传感器网络、数字式计算机和电子开关代替了触点和简单的真空。



图 PA4.2

现代工程设计的复杂性变得有些吓人，甚至对培训工程师也是如此。在上世纪60年代，作为一名刚毕业的工程师，我可以学习点火系统的设计、收音机或是家用器械，利用一些工具和标准零件找出并修理失灵的器件。现在，如果我的车因为点火系统失灵而无法启动，在往密歇根北部偏远地区的垂钓旅行的尾声，我也只好走回城市里。现代电子学提高了点火系统的性能，却也造成了维修的困难。

练习 4.10 练习 4.9 中电阻 $R=50\ \Omega$。

答：(a) $\omega_0=10^5$，$\alpha=10^5$，$\zeta=1$；(b) KCL 要求 $i_C(0)=0.1\ \text{A}=Cv'(0)$，因此 $v'(0)=10^6$；(c) $v_p(t)=0$；(d) $v(t)=10^6te^{-10^5t}$。

练习 4.11 练习 4.9 中电阻 $R=250\ \Omega$。

答：(a) $\omega_0=10^5$，$\alpha=0.2\times10^5$，$\zeta=0.2$；(b) KCL 要求 $i_C(0)=0.1\ \text{A}=Cv'(0)$，因此 $v'(0)=10^6$；(c) $v_p(t)=0$；(d) $v(t)=10.21e^{-2\times10^4t}\sin(97.98\times10^3t)$。

4.6 用 MATLAB 的符号工具箱进行暂态分析

MATLAB 的符号工具箱对解决电路的瞬态解很有帮助，它使得求解微分方程系统就像用计算器解算数问题一样简单。在这种方式下解一个电路的步骤如下：

1. 写出电路的网孔电路、节点电压或其他变量的微积分方程。
2. 必要时，对方程微分以消去积分项。
3. 分析 $t=0+$ 时刻(即开关动作瞬间)的电路以得到各个变量及其导数的初始状态。对于一阶方程，我们需要电路变量的初值；对于二阶方程，我们需要各个变量及其导数的初值。
4. 在 MATLAB 求解符号微分方程命令窗中输入方程和初始值。

我们用一个例子来描述。

例 4.6 一阶电路的计算机辅助解法。

求解图 4.32(a)中电路的 $v_L(t)$。(注：解此例需用到 MATLAB 的 R2008a 或 R2008b 版。)

解：首先，写出电阻和电感连接的节点的 KCL 方程：

$$\frac{v_L(t)-20\cos(100t)}{R}+\frac{1}{L}\int_0^t v_L(t)\mathrm{d}t+i_L(0)=0$$

微分去掉方程的积分项，两边乘以 R，代入数值，最后得到

$$\frac{\mathrm{d}v_L(t)}{\mathrm{d}t}+100v_L(t)=-2000\sin(100t)$$

接下来需要计算 v_L 的初值，因为直到 $t=0$ 时刻开关一直断开，直到 $t=0$ 时刻电感电流的初值为零。另外，电路中的电流不能突变，因此有 $i_L(0+)=0$。开关瞬间闭合，激励源电压为 20 V，流过电路的电流为零，电阻压降为零。由 KVL 有 $v_L(0+)=20$ V。这些都描述于图 4.32(b)中。

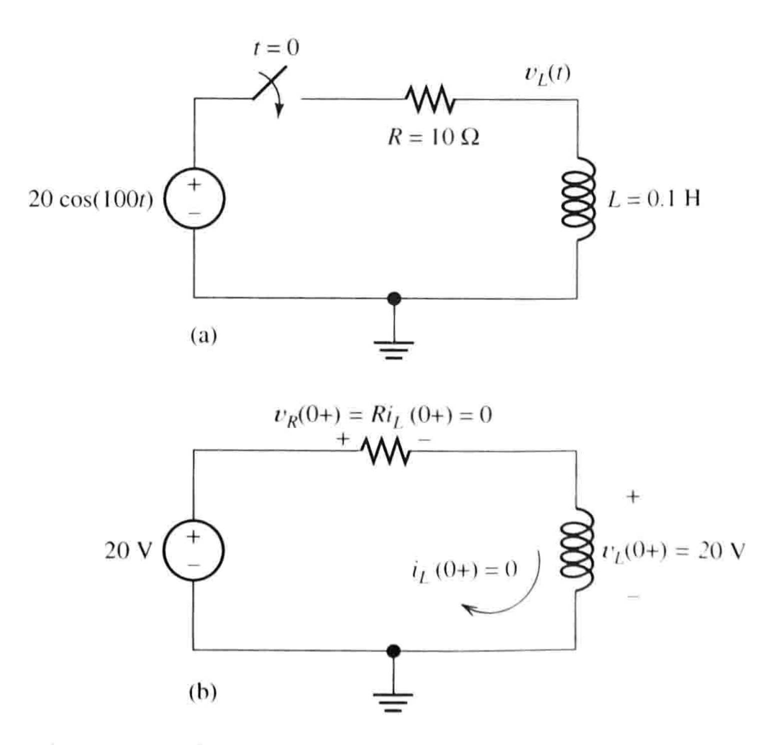


图 4.32 (a)例 4.6 的电路；(b)电路在 $t=0+$ 时刻的状态

现在，我们可以写出 MATLAB 的命令。像往常一样，命令为黑体字，注释为常规字体，MATLAB 的响应用有颜色的语句(此处为浅灰字)表示。

```
>> clear
>> syms VL t
>> % Enter the equation and initial value in the dsolve command.
>> % DVL represents the derivative of VL with respect to time.
>> VL = dsolve('DVL + 100*VL = -2000*sin(100*t)', 'VL(0) = 20');
>> % Print answer with 4 decimal place accuracy for the constants:
>> vpa(VL,4)
     ans =
     10.*cos(100.*t)-10.*sin(100.*t)+10.*exp(-100.*t)
```

在数学符号的标准表示中，结果变为

$$v_L(t) = 10\cos(100t) - 10\sin(100t) + 10\exp(-100t)$$

一个含有上例中命令的命名为 Example_4_6 的 m 文件被放在 MATLAB 的文件夹中。(在附录 F 中可查到此文件夹的路径。)

例 4.7 二阶电路的计算机辅助解法。

在图 4.33(a)中，在 $t=0$ 时刻以前，开关闭合了很长时间，假设 $i_L(0+)=0$。用 MATLAB 解出 $i_L(t)$ 并画出 $0\leqslant t\leqslant 2$ ms 的波形。(注：在 2009 以前的版本中，本例能运行于 R2008a 版本但不能运行于 R2008b 版本。)

解：因为电路含有 2 个节点和 3 个网孔，节点电压分析比网孔分析要简单。我们将解出 $v(t)$，然后将电压的积分项乘以 $1/L$ 获得流过电感的电流。

我们通过列写电路顶部的节点(开关断开)的 KCL 方程开始节点电压分析。

$$C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v(t)\mathrm{d}t + i_L(0+) = 0.2\exp(-1000t)$$

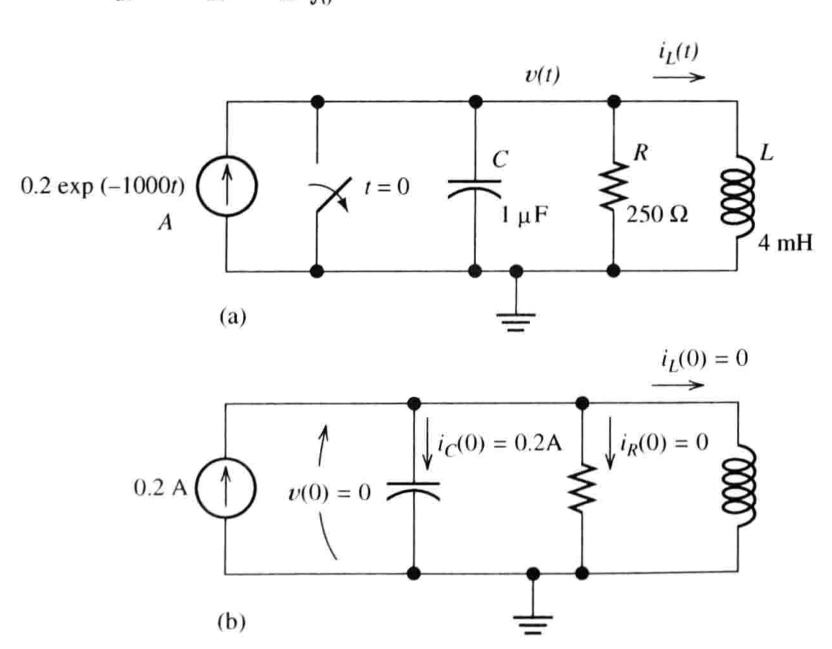


图 4.33 (a)例 4.7 的电路；(b)电路在 $t=0+$ 时刻的状态

对方程求导消去积分项并代入初值，最终得到

$$10^{-6}\frac{\mathrm{d}^2v(t)}{\mathrm{d}t^2} + 4\times 10^{-3}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + 250v(t) = -200\exp(-1000t)$$

因为对于二阶电路，我们需要 $v(t)$ 的初值及其一阶导数。电路在 $t=0+$ 时刻的状态见图 4.33(b)。

现将问题陈述如下：电感的初始电流为0，初始电压 $t=0+$ 是0，因为开关闭合时，电容相当于短路；开关断开时，电容上电压保持为0，因为电容电压突变需要一个无穷大的电流。另外，流过电阻的电流为0，因为电阻两端电压为0。因此，激励源的0.2 A的电流应流过电容，故有

$$C\frac{dv(0+)}{dt}=0.2$$

已经确定 $v(0+)=0$ 且 $v'(0+)=dv(0+)/dt=0.2\times10^6$ V/s。

电压算出后，电流也可得到：

$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_0^t v(t)dt=250\int_0^t v(t)dt$$

我们用以下 MATLAB 命令获得结果。

```
>> clear
>> syms ILV t
>> % Enter the equation and initial values in the dsolve command.
>> % D2V represents the second derivative ofV.
>> V = dsolve('(1e-6)*D2V + (4e-3)*DV + 250*V = -200*exp(-1000*t)',...
           'DV(0)=0.2e6', 'V(0)=0');
>> % Calculate the inductor current by integratingV with respect to t
>> % from 0 to t and multiplying by 1/L:
>> IL = (250)*int(V,t,0,t);
>> % Display the expression for current to 4 decimal place accuracy:
>> pretty(vpa(IL,4))
-0.2024exp(-2000. t)cos(15680. t) - 0.01290exp(-2000. t)sin(15680. t)
        + 0.2024 exp(-1000. t)
>> ezplot(IL,[0 2e-3])
```

在数学符号的标准表示中，结果变为

$$i_L(t)=-0.2024\exp(-2000t)\cos(15680t)-$$
$$0.01290\exp(-2000t)\sin(15680t)+0.2024\exp(-1000t)$$

波形(做了一些美化编辑后)见图4.34。一个含有上例中命令的命名为 Example_4_7 的 m 文件被放在 MATLAB 的文件夹中。(在附录 F 中可查到此文件夹的路径。)

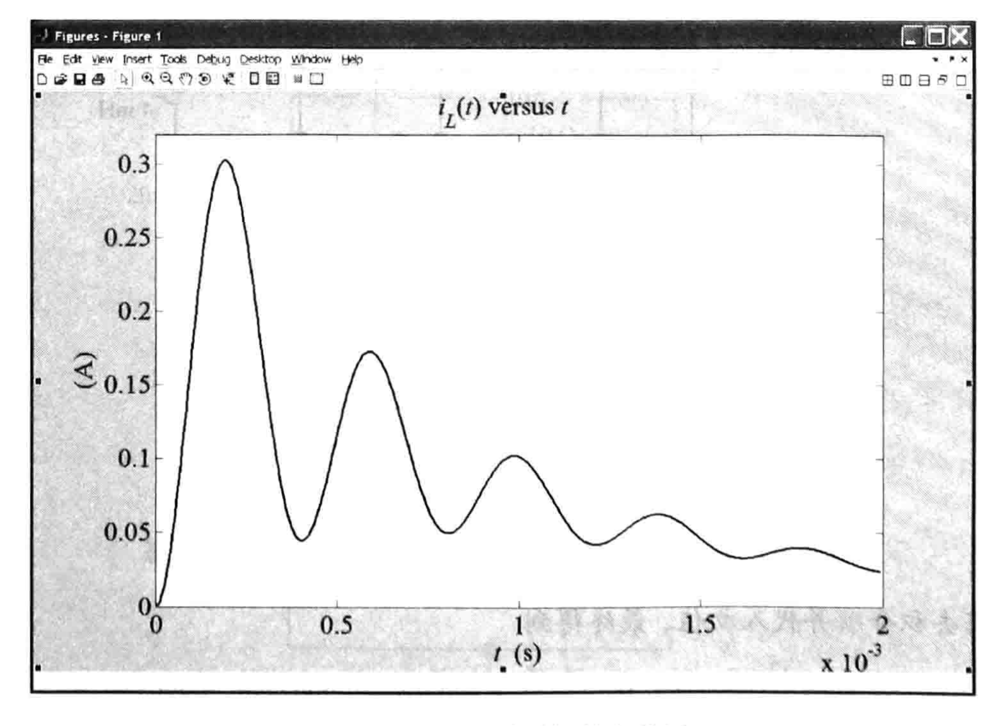


图4.34 $i_L(t)$随时间的变化图

4.6.1 线性微分方程组的求解

目前为止，每一个例子只含有一个单一的微分方程。当电路有两个或两个以上的变量时（如节点电压或网孔电流），则需要建立微分方程组。虽然传统方法已经能够求解微分方程组，但是应用MATLAB的符号工具箱可使得求解过程更加简洁。

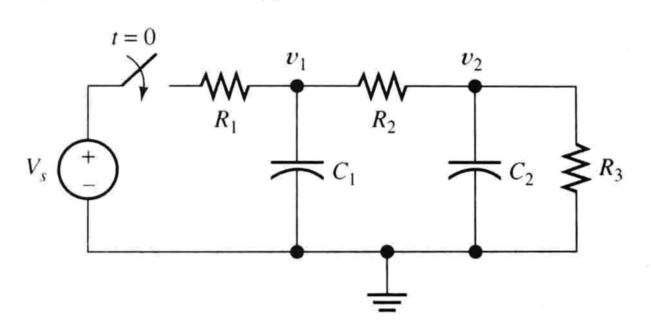
例4.8 微分方程组的计算机辅助解法。

用MATLAB解出图4.35所示电路的节点电压。在 $t=0$ 时刻以前电路已连好，开关断开，各节点电压初值为0。（注：本例可以在R2008a或R2008b下运行。）

解：首先，列出节点1、2的KCL方程：

$$C_1\frac{dv_1(t)}{dt}+\frac{v_1(t)-V_s}{R_1}+\frac{v_1(t)-v_2(t)}{R_2}=0$$

$$C_2\frac{dv_2(t)}{dt}+\frac{v_2(t)-v_1(t)}{R_2}+\frac{v_2(t)}{R_3}=0$$



$V_s=10\text{ V},\ R_1=R_2=R_3=1\text{ M}\Omega,\ C_1=C_2=1\ \mu\text{F}$

图4.35 例4.8的电路

现代入数值，两式分别乘以 10^6，重新整理两式得到

$$\frac{dv_1(t)}{dt}+2v_1(t)-v_2(t)=10$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt}+2v_2(t)-v_1(t)=0$$

MATLAB命令和结果如下：

```
>> clear
>> syms v1 v2 t
>> [v1 v2] = dsolve('Dv1 + 2*v1 - v2 = 10','Dv2 + 2*v2 -v1 = 0',...
                    'v1(0) = 0','v2(0)= 0');
>> v1
     v1 =
     -5*exp(-t)-5/3*exp(-3*t)+20/3
>> v2
     v2 =
     -5*exp(-t)+5/3*exp(-3*t)+10/3
```

因此，节点电压列出如下：

$$v_1(t)=20/3-5\exp(-t)-(5/3)\exp(-3t)$$

$$v_2(t)=10/3-5\exp(-t)+(5/3)\exp(-3t)$$

对所求的答案做一些检验是个好的想法。首先，从初始状态的需要，我们可以证实 $t=0$ 时刻MATLAB的解均为0。另外，在 $t=\infty$ 时，电容表现为开路，由分压定律有 $v_1(\infty)=20/3$ V和 $v_2(\infty)=10/3$。由MATLAB算出的表达式也可得到这些值。

例4.9 微分方程组的计算机辅助解法。

用MATLAB解图4.36所示电路的网孔电流和 $v_C(t)$。在 $t=0$ 时刻以前电路已连好，电容电压和电感电流的初值为0，确定方程中的常数并保留4位小数的精度。（注：本例可以在R2008a或R2008b版本下运行，然而R2008b更慢且给出答案的形式不合适。）

解：我们将解出网孔电流并用下式计算电容电压：

$$v_C(t)=\frac{1}{C}\int_0^t[i_1(t)-i_2(t)]dt$$

第一步要写出网孔1、2的KVL方程：

$$L_1\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}+R_1i_1(t)+\frac{1}{C}\int_0^t[i_1(t)-i_2(t)]\mathrm{d}t=V_s \tag{4.107}$$

$$L_2\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}+R_2i_2(t)+\frac{1}{C}\int_0^t[i_2(t)-i_1(t)]\mathrm{d}t=0 \tag{4.108}$$

因为方程均含有积分项，各自对时间微分：

$$L_1\frac{\mathrm{d}^2i_1(t)}{\mathrm{d}t^2}+R_1\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}i_1(t)-\frac{1}{C}i_2(t)=0$$

$$L_2\frac{\mathrm{d}^2i_2(t)}{\mathrm{d}t^2}+R_2\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}i_2(t)-\frac{1}{C}i_1(t)=0$$

然后，代入元件的参数值得到

$$10^{-3}\frac{\mathrm{d}^2i_1(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}+10^5i_1(t)-10^5i_2(t)=0$$

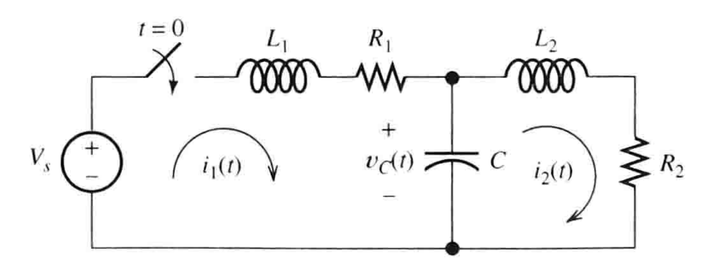
$$10^{-3}\frac{\mathrm{d}^2i_2(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}+10^5i_2(t)-10^5i_1(t)=0$$

求解二阶电路，我们需要$i_1(0+)$，$i_2(0+)$，$i'_1(0+)$，$i'_2(0+)$。因为在$t=0$时刻前开关保持断开，可知开关断开前电感电流为0。另外，电路中的电流不能突变，故有$i_1(0+)=0$，$i_2(0+)=0$。在$t=0$时刻以前和$t=0+$时刻电容电压也为0。然后，在$t=0+$时刻，网孔方程[方程(4.107)和方程(4.108)]简化为

$$L_1\frac{\mathrm{d}i_1(0+)}{\mathrm{d}t}=V_s$$

$$L_2\frac{\mathrm{d}i_2(0+)}{\mathrm{d}t}=0$$

因此，得到$i'_1(0+)=V_s/L_1=2000\ \mathrm{A/s}$，$i'_2(0+)=0$。



$V_s=2\ \mathrm{V}$, $L_1=L_2=1\ \mathrm{mH}$, $R_1=R_2=1\ \Omega$, $C=10\ \mu\mathrm{F}$

图4.36　例4.9的电路图

现在，我们写出MATLAB的命令：

```
>> clear
>> syms i1 i2 t vc
>> [i1 i2] = dsolve('(1e-3)*D2i1 + Di1 + (1e5)*i1 - (1e5)*i2 = 0',...
                    '(1e-3)*D2i2 + Di2 + (1e5)*i2 - (1e5)*i1 = 0',...
                    'i1(0)= 0, Di1(0)= 2000, i2(0) = 0, Di2(0) =0');
>> vpa(i1, 4) % Display answer to 4 decimal place accuracy.
    ans =
    1.-1.*exp(-1000.*t)+.7076e-1*exp(-500.*t)*sin(.1414e5*t)
>> vpa(i2, 4) % Display answer to 4 decimal place accuracy.
    ans =
    1.-1.*exp(-1000.*t)-.7076e-1*exp(-500.*t)*sin(.1414e5*t)
>> % Next calculate vc by integrating the difference between the
>> % results for i1 and i2:
>> vc = int((1e5)*(i1-i2),t,0,t);
>> vc = vpa(vc,4) % Display answer to 4 decimal place accuracy.
   vc =
   1.-1.*exp(-500.*t)*cos(.1414e5*t)-.3539e-1*exp(-500.*t)*sin(.1414e5*t)
```

因此，结果为

$$i_1(t) = 1 - \exp(-1000t) + 0.07076\exp(-500t)\sin(14.14 \times 10^3 t)\ \mathrm{A}$$

$$i_2(t) = 1 - \exp(-1000t) - 0.07076\exp(-500t)\sin(14.14 \times 10^3 t)\ \mathrm{A}$$

$$v_C(t) = 1 - \exp(-500t)\cos(14.14 \times 10^3 t) - 0.03539\exp(-500t)\sin(14.14 \times 10^3 t)\ \mathrm{V}$$

作为不完全检查，我们可以证实以上结果符合初始状态 $t = \infty$ 时的稳定状态。

练习4.12 用 MATLAB 的符号工具箱求解例 4.4，获得方程(4.56)给出的结果，图像与图 4.17 相似。

答 生成解和图像的命令为

```
clear
syms ix t R C vCinitial w
ix = dsolve('(R*C)*Dix + ix = (w*C)*2*cos(w*t)', 'ix(0)=-vCinitial/R');
ians =subs(ix,[R C vCinitial w],[5000 1e-6 1 200]);
pretty(vpa(ians, 4))
ezplot(ians,[0 80e-3])
```

一个含有上例中命令的命名为 Example_4_12 的 m 文件被放在 MATLAB 的文件夹中。(在附录 F 中可查到此文件夹的路径。)(可在 R2008a 或 R2008b 下运行。)

练习4.13 用 MATLAB 的符号工具箱求解例 4.5，获得的结果即例题中的 $v_C(t)$，图像与图 4.26 相似。

答 生成解和图像的命令为

```
clear
syms vc t
% Case I, R = 300:
vc = dsolve('(1e-8)*D2vc + (1e-6)*300*Dvc+ vc =10', 'vc(0) = 0','Dvc(0)=0');
vpa(vc,4)
ezplot(vc, [0 1e-3])
hold on % Turn hold on so all plots are on the same axes
% Case II, R = 200:
vc = dsolve('(1e-8)*D2vc + (1e-6)*200*Dvc+ vc =10', 'vc(0) = 0','Dvc(0)=0');
vpa(vc,4)
ezplot(vc, [0 1e-3])
% Case III, R = 100:
vc = dsolve('(1e-8)*D2vc + (1e-6)*100*Dvc+ vc =10', 'vc(0) = 0','Dvc(0)=0');
vpa(vc,4)
ezplot(vc, [0 1e-3])
```

一个含有上例中命令的命名为 Example_4_13 的 m 文件被放在 MATLAB 的文件夹中。(在附录 F 中可查到此文件夹的路径。)(可在 R2008a 或 R2008b 下运行。)

本章小结

1. 由激励源、电阻、单个储能元件(L 或 C)构成的电路，其响应的暂态部分表示为 $Ke^{-t/\tau}$。时间常数为 $\tau = RC$ 或 $\tau = L/R$，其中电阻 R 为从储能元件两端看的电路的戴维南等效电阻。
2. 直流稳态情况下，电感相当于短路而电容相当于开路。可以通过分析直流等效电路解出稳态(强迫)响应。
3. 求解暂态电压、电流，必须要求解常系数线性微分方程。方程的解由两部分组成，其中特解也称为强迫响应，取决于激励源和其他电路元件。齐次解，也称为自然响应，是由 R、L、C 决定的，而与激励源无关。在含有电阻的电路中自然响应最终趋近于零。
4. 由一对电感和电容串联或并联组成的二阶电路，其自然响应取决于阻尼比和无阻尼振荡角频率。

如果阻尼比大于1，则电路处于过阻尼状态，自然响应有以下形式：

$$x_c(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

如果阻尼比等于1，则电路处于临界阻尼状态，自然响应有以下形式：

$$x_c(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 t e^{s_1 t}$$

如果阻尼比小于1，则电路处于临界阻尼状态，自然响应有以下形式：

$$x_c(t) = K_1 e^{-\alpha t}\cos(\omega_n t) + K_2 e^{-\alpha t}\sin(\omega_n t)$$

二阶系统不同阻尼比的单位阶跃响应见图4.29。

5. MATLAB的符号工具箱是解决暂态电路方程的有力工具。解题步骤前面已给出。

注：你可以借助计算机辅助电路分析程序来检验本章中各个问题的结果，例如National Instruments公司的Multisim以及Cadence公司的OrCAD Capture，详见附录D。

习题

4.1节　一阶 *RC* 电路

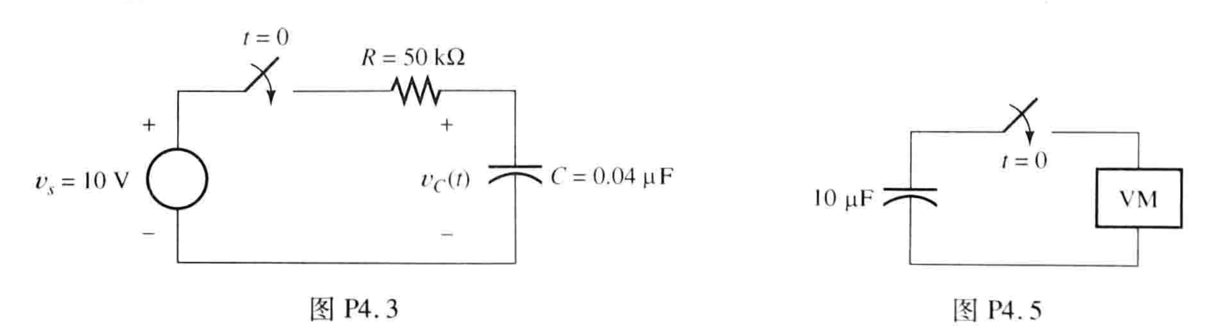
P4.1　假设有一电容 C 通过电阻 R 放电。写出时间常数的定义并列出表达式。要得到一个较大的时间常数，我们需要较大的 R 还是较小的 R？较大的 C 还是较小的 C 呢？

*P4.2　实际上电容器的绝缘材料并不是很好的绝缘体，用一个电阻并联在电容两端的模型可以模拟这个缺点，电阻成为泄漏电阻。一个100 μF的电容初始时被充到100 V，一分钟后能保持初始电容储能的90%，则这个电容泄漏电阻的限制是多少？

P4.3　如图P4.3所示，电容电压初值为 $v_C(0+) = -10$ V，列出电容两端电压关于时间的函数表达式，确定电压过零的时间 t_0。

*P4.4　一个100 μF的电容初始时被充到1000 V，在 $t=0$ 时刻被连接到一个1 kΩ的电阻上。在哪一时刻(t_2)将在电阻上消耗初始电容储能的50%？

*P4.5　如图P4.5所示，$t=0$ 时刻，一个被充电的10 μF的电容连接到一个电压表上，电压表可用一个电阻模拟。在 $t=0$ 时刻，电压表读数为50 V，在 $t=30$ s时刻，电压表读数为25 V，求电压表的电阻。



图P4.3　　　　图P4.5

*P4.6　在 t_1 时刻，电容 C 被充至电压 V_1，然后通过电阻 R 放电。写出 $t>t_1$ 时电容电压关于时间的表达式，用 R、C、V_1、t_1 表示。

P4.7　一个初始时充了电的电容，在 $t=0$ 时刻通过一个电阻放电，两倍时间常数的时间后电容电压变为初始电压的百分之多少？还剩初始储能的百分之多少？

P4.8　如图P4.3所示，电容电压初值为 $v_C(0+) = 0$，列出电容两端电压关于时间的函数表达式，并作出电压随时间变化的曲线。

P4.9　物理学上，半衰期通常被用来描述数量随指数规律衰减的物质，例如放射性物质。半衰期是指数量衰减为初始值一半时所需要的时间。电容通过电阻放电，电压时间常数为 $\tau = RC$。给出用 R 和 C 表示电压半衰期的表达式。

P4.10 已知一个 50 μF 的电容 $t=0$ 时被充到一个未知电压 V_i，电容与一个 3 kΩ 的电阻并联。在 $t=100$ ms 时刻，电容电压变为 5 V，确定 V_i 的值。

P4.11 如图 P4.11 所示，已知 $t=0$ 时刻以前电容被充到 10 V。(a)写出全过程中电容电压 $v_C(t)$ 和电阻电压 $v_R(t)$ 的表达式。(b)写出传送到电阻上的功率表达式。(c)从 $t=0$ 到 $t=\infty$ 对功率进行积分，写出传递的能量的表达式。(d)证明传递到电阻上的能量和 $t=0$ 时刻以前存储在电容上的能量相等。

P4.12 货币的单位购买力 P 每年下降 3%，确定货币购买力对应的时间常数。

P4.13 如图 P4.13 所示，对电路中的表达式 $v_C(t)$ 进行微分，作出 $v_C(t)$ 随时间的变化图。

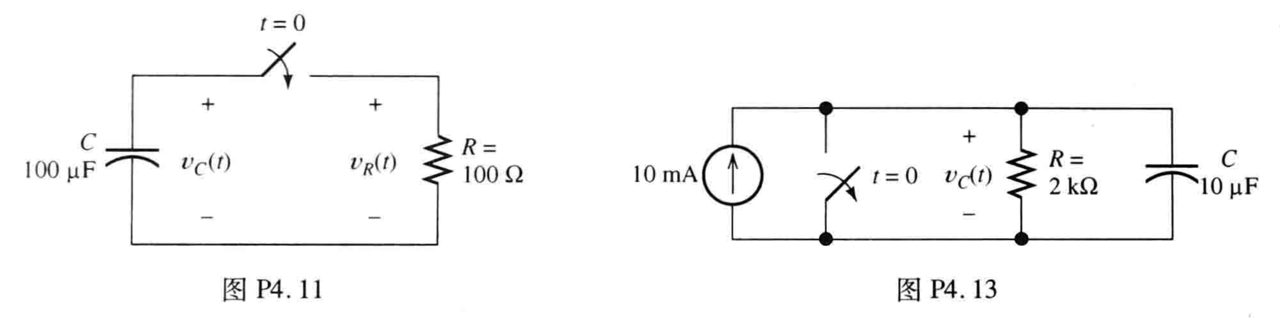


图 P4.11　　　　图 P4.13

P4.14 假设 $t=0$ 时刻，将一个 10 μF 的电容接入由 2500 V 电压源和 2 MΩ 电阻串联而成的充电回路中。在 $t=40$ s 时刻，电容从充电回路断开后与一个 5 MΩ 的电阻并联。确定 $t=40$ s 时刻和 $t=100$ s 时刻的电容电压。(提示：在放电区间定义一个时间变量 $t'=t-40$ 使得放电开始于 $t'=0$ 时刻。)

P4.15 假设有一个电容 C 被充到初始电压 V_i。之后在 $t=0$ 时刻，一个电阻 R 被接到电容两端，写出电流表达式。之后，从 $t=0$ 到 $t=\infty$ 对电流积分，证明积分结果等于电容初始储存的电荷。

P4.16 一个站在干燥地毯上的人被近似模拟成一个 50 pF 的一端接地的电容。如果这个人碰到一个接地的金属物品，例如水龙头，电容将放电并且人会感受到一个短时的冲击。通常，电容被充到 20 000 V，电阻(主要是一个手指)为 100 Ω，确定放电时电流峰值和冲击的时间常数。

P4.17 考虑如图 P4.17 所示电路，开关可在 A、B 两点间快速切换，每点停留 2 s。因而，电容重复着充电 2 s 后放电 2 s 的过程。假设 $t=0$ 时刻 $v_C(0)=0$ 且开关在 A 点，确定 $v_C(2)$、$v_C(4)$、$v_C(6)$ 和 $v_C(8)$。

P4.18 考虑如图 P4.18 所示电路，在 $t=0$ 时刻前，$v_1=100$ V 且 $v_2=0$。(a)开关突然闭合，电路多大[即 $i(0+)$ 为多大]？(b)写出用电流和初始电压表达的电路的 KVL 方程。求导得到微分方程。(c)电路时间常数为多少？(d)求出电流的关于时间的表达式。(e)求出当 t 很大时 v_2 的值趋于多少。

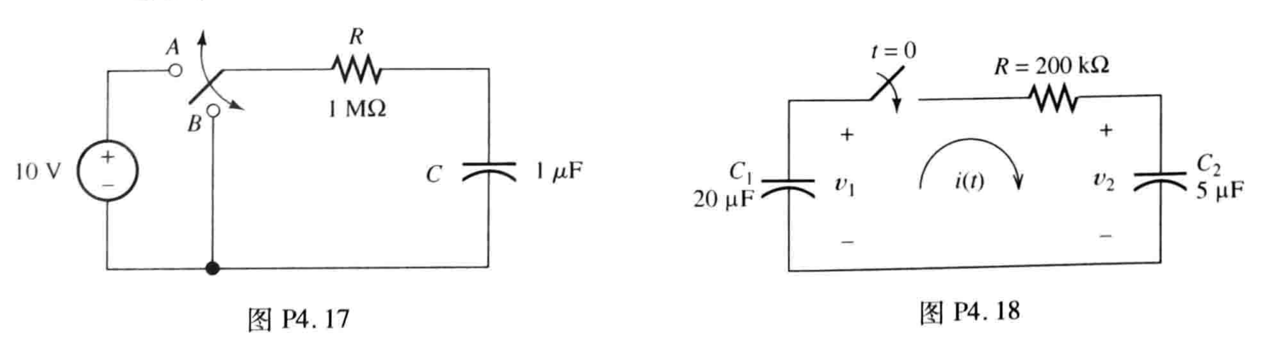


图 P4.17　　　　图 P4.18

4.2 节 直流稳态

P4.19 列出 *RLC* 电路的直流稳态分析的步骤。

P4.20 解释为何在直流稳态分析中，电容替换成开路而电感替换成短路。

*P4.21 如图 P4.21 所示，解出 i_1、i_2、i_3 的稳态值。

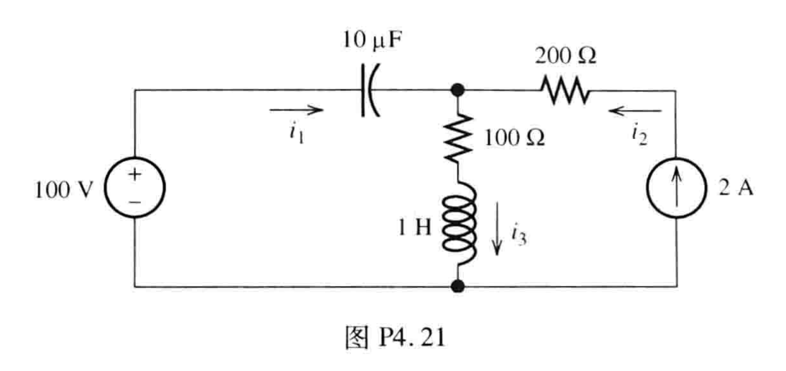


图 P4.21

* P4.22 考虑如图 P4.22 所示电路，开关断开后 v_C 的稳态值为多少？确定开关断开后经过多长时间 v_C 降至稳态值的 1% 以下。

* P4.23 如图 P4.23 所示电路，$t=0$ 时刻以前，开关一直处于 A 点，求出 $v_R(t)$ 的表达式并绘出 $-2 \leq t \leq 10$ s 的波形。

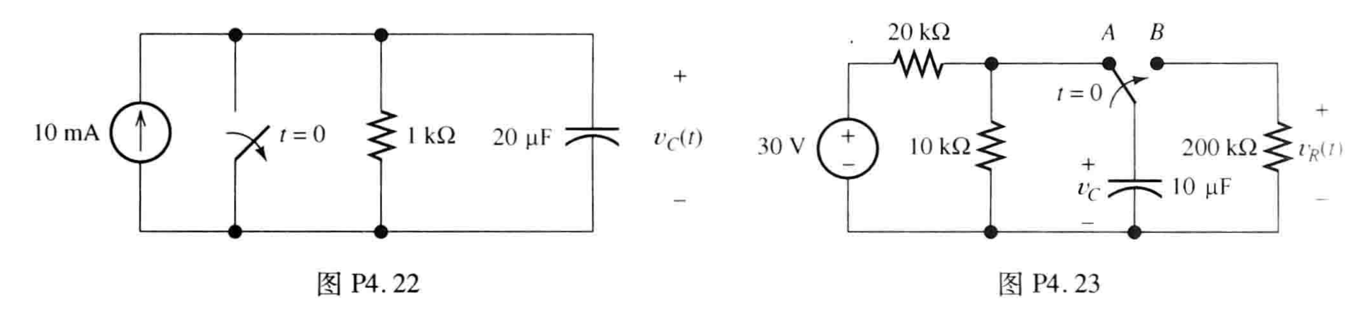


图 P4.22　　　　图 P4.23

P4.24 如图 P4.24 所示电路，在 $t=0$ 时刻以前开关闭合，解出 $t=0$ 时刻以前 v_C 的值和开关断开很长时间后 v_C 的稳态值。

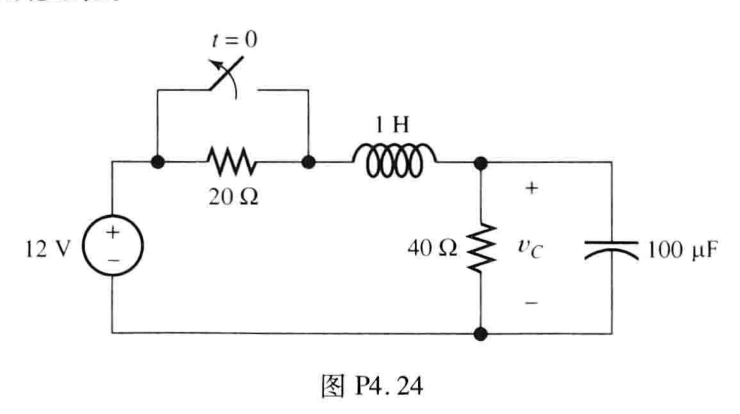


图 P4.24

P4.25 如图 P4.25 所示电路，求解 i_1、i_2、i_3、i_4 和 v_C 的稳态值。假设开关已经闭合很长时间。

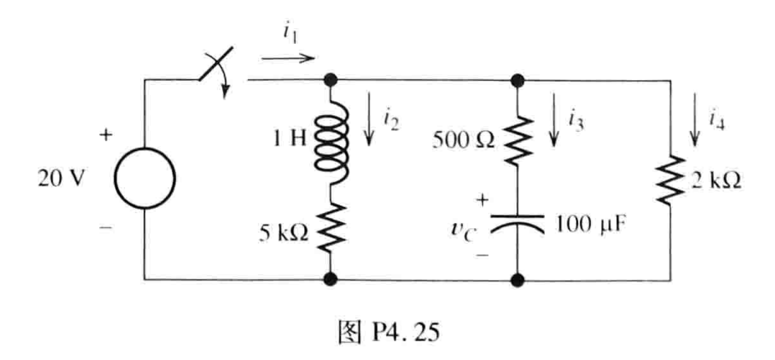


图 P4.25

P4.26 如图 P4.26 所示电路处于稳态，确定 i_L、v_x 和 v_C 的值。

P4.27 如图 P4.27 所示电路已接入很长时间，确定 v_C 和 i_R 的值。

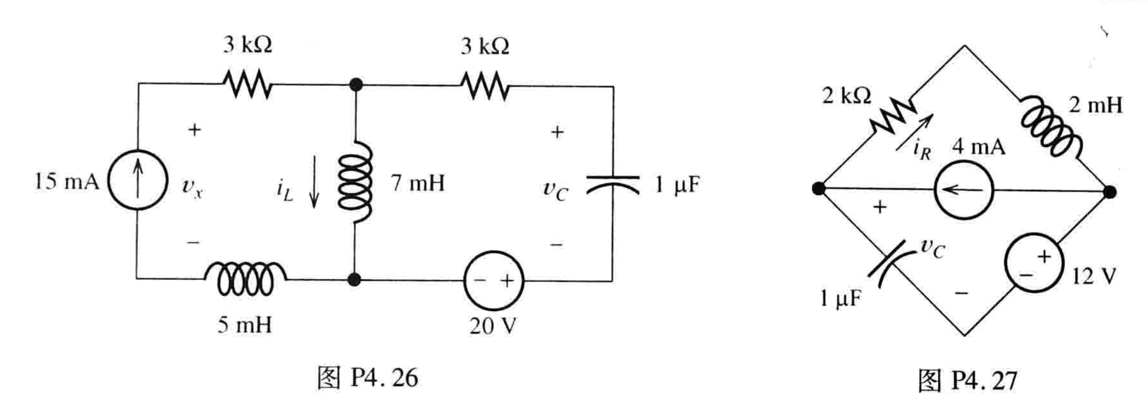


图 P4.26　　　　图 P4.27

P4.28　考虑如图 P4.28 所示电路，在 $t=0$ 时刻以前开关闭合了很长时间，确定 $t=0$ 时刻以前和 $t=0$ 时刻过很长一段时间以后 $v_C(t)$ 的值。确定开关断开后的时间常数和 $v_C(t)$ 的表达式，绘出 $v_C(t)$ 在 $-0.2\leq t\leq 0.5$ s 范围内的波形。

P4.29　如图 P4.29 所示电路，在 $t=0$ 时刻以前开关闭合了很长时间，求解 $v_C(t)$ 的表达式并绘出 $v_C(t)$ 在 $-80\leq t\leq 160$ ms 范围内的波形。

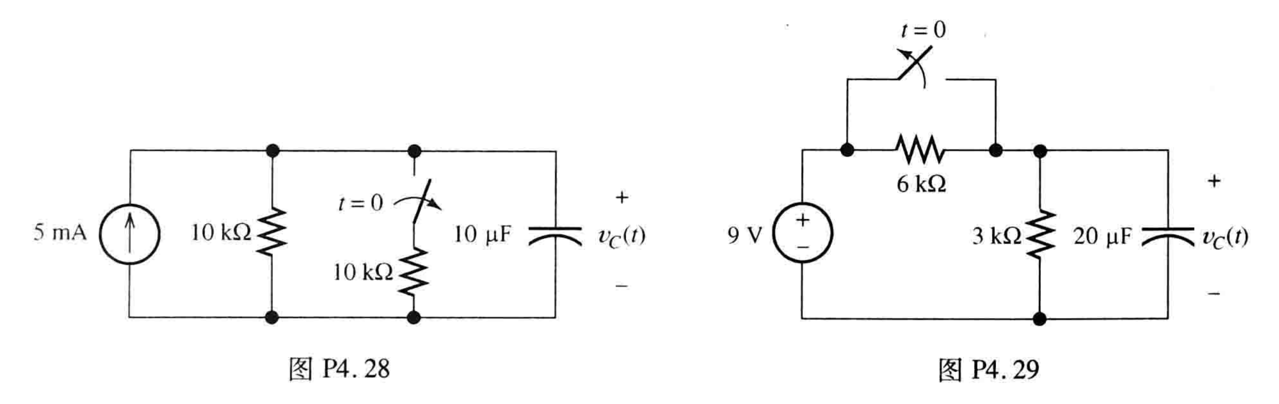


图 P4.28　　　　图 P4.29

P4.30　考虑如图 P4.30 所示电路，在 $t=0$ 时刻以前开关闭合了很长时间。确定 $t=0$ 时刻以前和 $t=0$ 时刻过很长一段时间以后 $v_C(t)$ 的值。确定开关断开后的时间常数和 $v_C(t)$ 的表达式，绘出 $v_C(t)$ 在 $-4\leq t\leq 16$ s 范围内的波形。

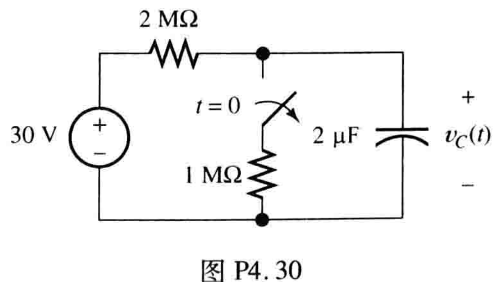


图 P4.30

4.3 节　*RL* 电路

P4.31　一电路由具有初始电流的电感和电阻 R 串联而成，写出时间常数的表达式。要得到一个较大的时间常数，我们需要较大的 R 还是较小的 R？较大的 L 还是较小的 L 呢？

P4.32　一电路由开关、电阻、直流电源和一个储能元件组成，开关在 $t=0$ 时刻断开或闭合，储能元件可为电容或电感。我们希望解出 $t\geq 0$ 时电流或电压关于时间的函数 $x(t)$，写出一般形式解，如何确定解中的每个未知数？

*P4.33　如图 P4.33 所示电路，$t=0$ 时刻以前开关闭合并达到稳态，求解 $t<0$ 和 $t\geq 0$ 时的 $i(t)$。

*P4.34　考虑如图 P4.34 所示电路，电感初始电流为 $i_L(0-)=-0.2$ A，求解 $t\geq 0$ 时 $i_L(t)$ 和 $v(t)$ 的表达式并作出波形图。

P4.35　若 P4.34 中改为 $i_L(0-)=0$ A，重新求解。

*P4.36　实际的电感有一个串联的电阻，与用来缠绕成线圈的导线相关联。假设我们想要在 10 H 的电感中储能，确定串联电阻的范围，使得电感在一小时后保持至少 75% 的初始储能。

P4.37　如图 P4.37 所示电路，确定在 $-0.2\leq t\leq 1.0$ s 期间 $i_s(t)$ 的表达式并作出波形。

P4.38　如图 P4.38 所示电路，求解 $i_L(t)$ 的表达式并作出波形，求解 $v_L(t)$ 的表达式并作出波形。

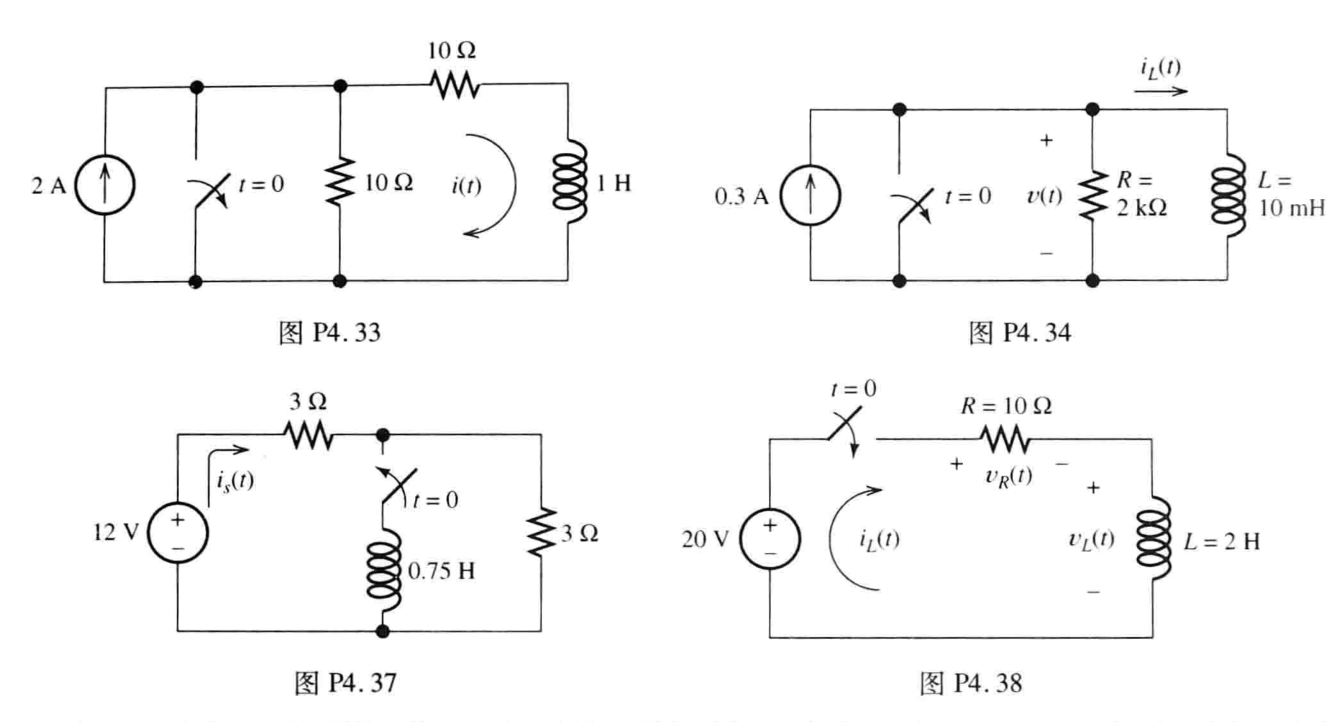


图 P4.33

图 P4.34

图 P4.37

图 P4.38

P4.39 如图 P4.39 所示电路在 $t=0$ 时刻以前开关闭合处于稳态，求解 $t<0$ 和 $t\geqslant 0$ 时 $i_L(t)$ 的表达式并作出波形。

P4.40 考虑如图 P4.40 所示电路，电压表(VM)接于电感两端，开关闭合了很长时间，当开关断开时，开关触点间有电弧出现。解释原因。假设一个理想开关和电感，开关断开时电感两端电压为多大？电压表会出现什么情况？

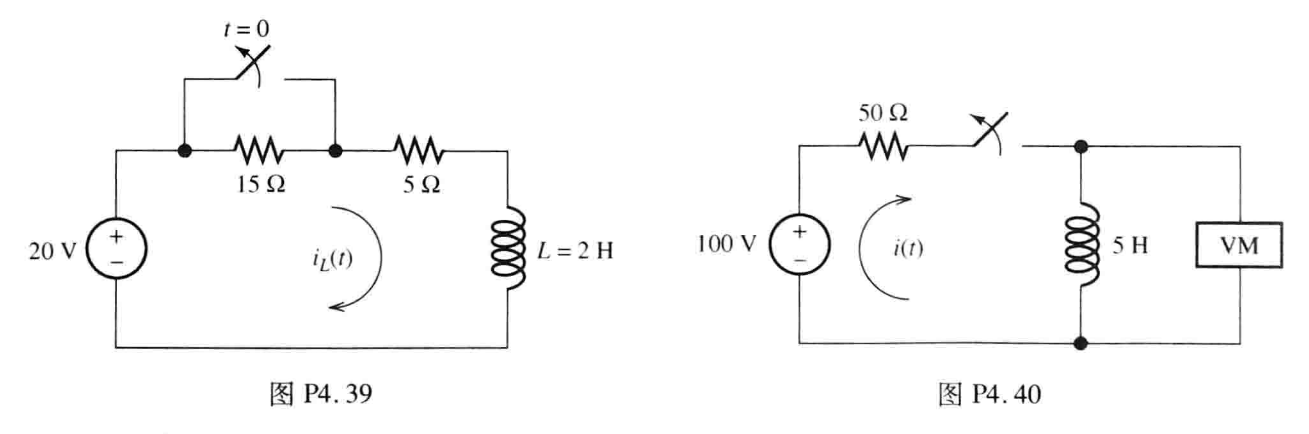


图 P4.39

图 P4.40

P4.41 如图 P4.41 所示，由于图中未画出的元件使得电路的 $i_L(0)=I_i$。(a)写出 $t\geqslant 0$ 时 $i_L(t)$ 的表达式。(b)求解传递到电阻上的功率关于时间的函数表达式。(c)对传递到电阻上的功率从 $t=0$ 到 $t=\infty$ 积分，证明积分结果与电感初始储能相等。

P4.42 如图 P4.42 所示电路，在 $t=0$ 时刻以前开关闭合，开关在 $t=0$ 时刻断开并在 $t=1$ s 时刻重新闭合，求解全过程 $i_L(t)$ 的表达式。

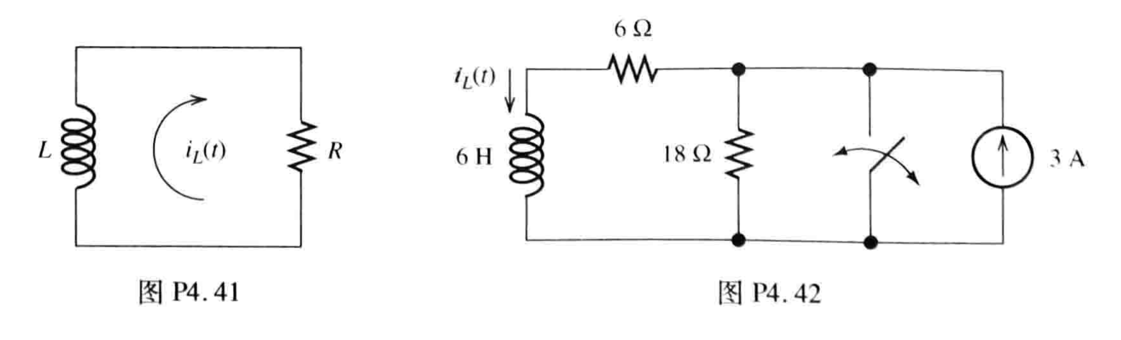


图 P4.41

图 P4.42

P4.43 如图 P4.43 所示电路，确定 $v_R(t)$ 的表达式并作出波形图。电路在 $t=0$ 时刻以前开关闭合处于稳态。考虑时间间隔为 $-1 \leq t \leq 5$ ms。

4.4 节 一般激励源作用下的 *RC* 和 *RL* 电路

P4.44 由一个激励源、一个电阻、一个电感(电容)构成的电路，求解步骤是什么？

*P4.45 如图 P4.45 所示电路，写出 $i_L(t)$ 的微分方程并求出全解。[提示：特解形式设为 $i_{Lp}(t) = Ae^{-t}$。]

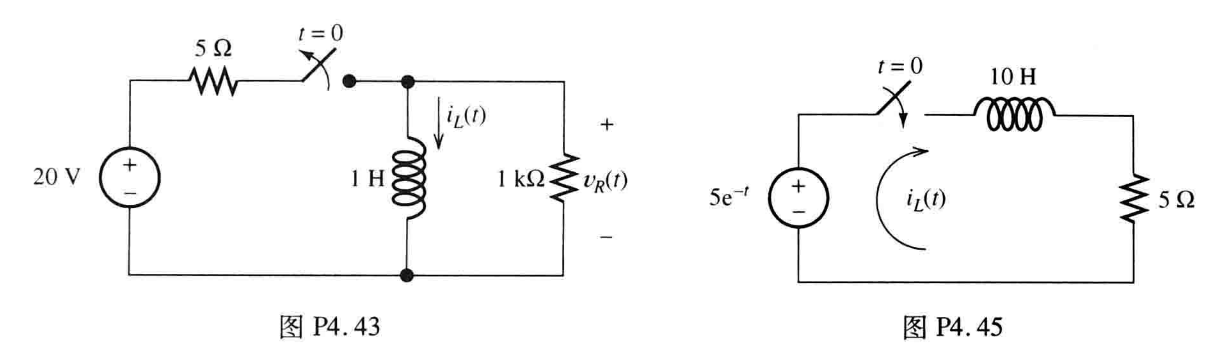


图 P4.43　　图 P4.45

*P4.46 如图 P4.46 所示电路，求解 $t>0$ 时的 $v_C(t)$。[提示：特解形式设为 $v_{Cp}(t) = Ae^{-3t}$。]

*P4.47 如图 P4.47 所示电路，求解 $t>0$ 时的 $v(t)$，已知 $t=0$ 时刻以前电感电流为 0。[提示：特解形式设为 $v_p = A\cos(10t) + B\sin(10t)$。]

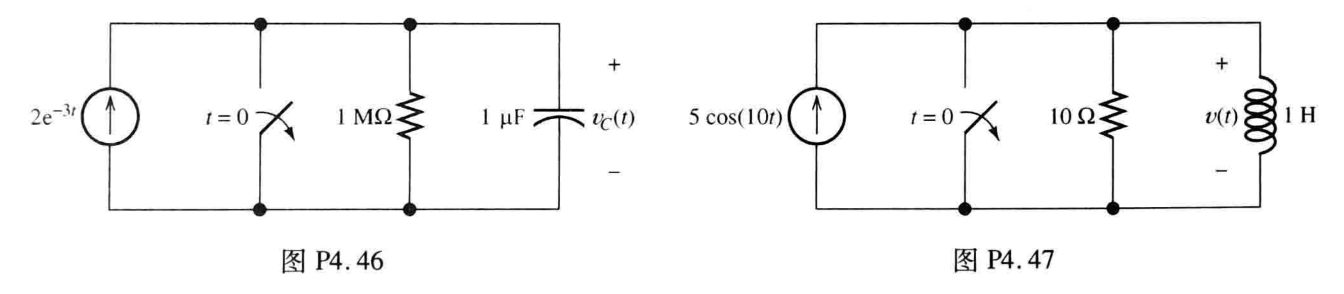


图 P4.46　　图 P4.47

P4.48 如图 P4.48 所示电路，求解 $t>0$ 时的 $i_L(t)$。特解的形式要有根据地猜想。[提示：特解包含的项和强迫函数及其导数具有相同的函数形式。]

P4.49 考虑如图 P4.49 所示电路，已知电压源为斜坡函数，定义如下：

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$$

假设 $v_C(0) = 0$，对 $t \geq 0$ 时 $v_C(t)$ 的表达式进行微分，作出 $v_C(t)$ 波形。[提示：写出 $v_C(t)$ 的微分方程并假设特解形式为 $v_{Cp}(t) = A + Bt$。]

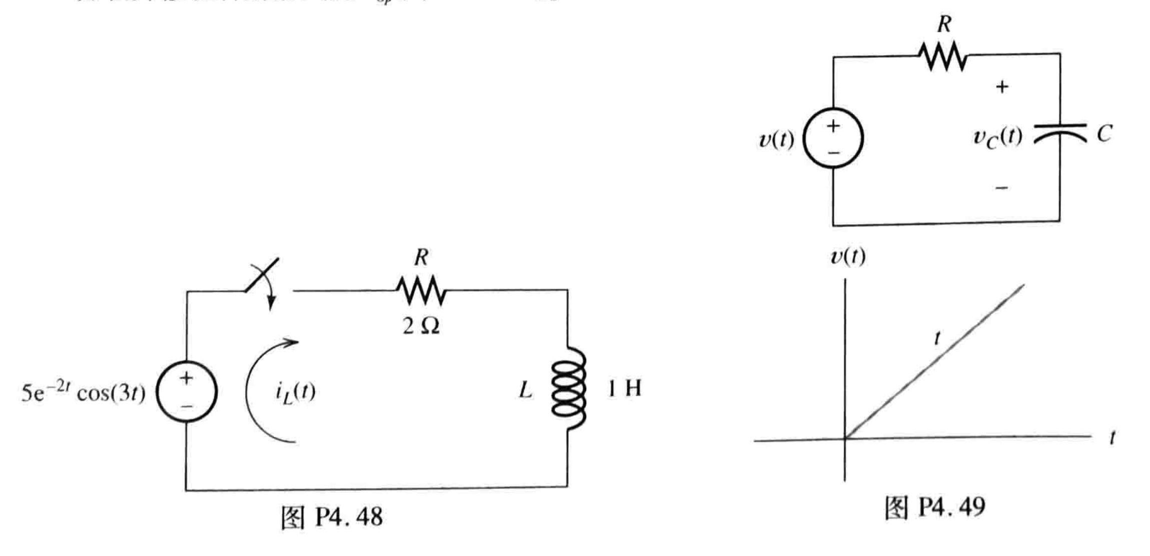


图 P4.48　　图 P4.49

P4.50 考虑如图 P4.50 所示电路，电感电流初值为 $i_s(0+)=0$。写出 $i_s(t)$ 微分方程和解。[提示：特解形式设为 $i_{sp}(t)=A\cos(300t)+B\sin(300t)$。]

P4.51 如图 P4.51 所示电路，电压源称为斜坡函数。假设 $i_L(0)=0$，写出 $i_L(t)$ 的微分方程并解出全解。[提示：特解形式设为 $i_p(t)=A+Bt$。]

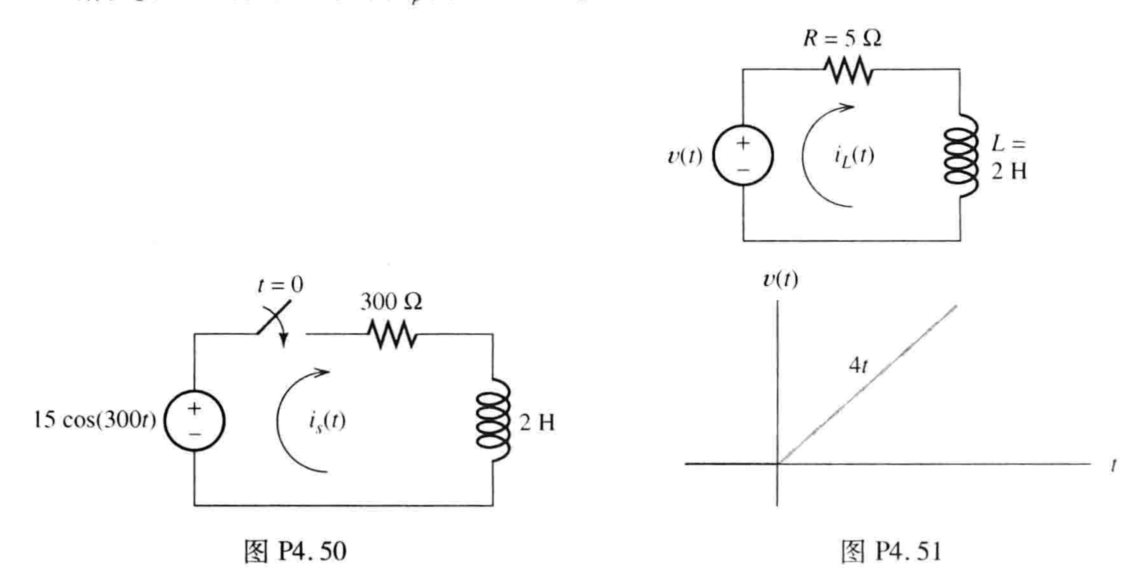


图 P4.50　　　　图 P4.51

P4.52 确定下面的微分方程的特解形式：

$$2\frac{dv(t)}{dt}+v(t)=5t\sin(t)$$

然后，解出特解。[提示：特解包含的项和强迫函数及其导数具有相同的函数形式。]

P4.53 确定下面的微分方程的特解形式：

$$\frac{dv(t)}{dt}+3v(t)=t^2\exp(-t)$$

然后，解出特解。[提示：特解包含的项和强迫函数及其导数具有相同的函数形式。]

P4.54 考虑如图 P4.54 所示电路。

(a)写出 $i(t)$ 的微分方程。

(b)求解时间常数以及补充解的形式。

(c)通常，对于指数形式的强迫函数，特解形式设为 $i_p(t)=K\exp(-2t)$。

(d)求特解。[提示：特解形式设为 $i_p(t)=Kt\exp(-2t)$。]

(e)求 $i(t)$ 的全解。

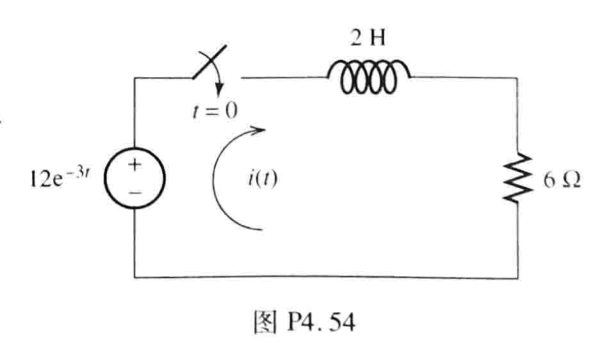
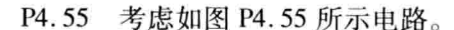


图 P4.54



P4.55 考虑如图 P4.55 所示电路。

(a)写出 $v(t)$ 的微分方程。

(b)求解时间常数以及补充解的形式。

(c)通常，对于指数形式的强迫函数，特解形式设为 $v_p(t)=K\exp(-10t)$。为什么此时无效？

(d)求特解。[提示：特解形式设为 $i_p(t)=Kt\exp(-10t)$。]

(e)求 $i(t)$ 的全解。

4.5 节　二阶电路

P4.56 如何从电路图确定它是一阶电路还是二阶电路？

P4.57 如何确定欠阻尼二阶系统？其补充解的形式是什么样的？临界阻尼和过阻尼又如何？

P4.58 单位阶跃函数的定义是什么？

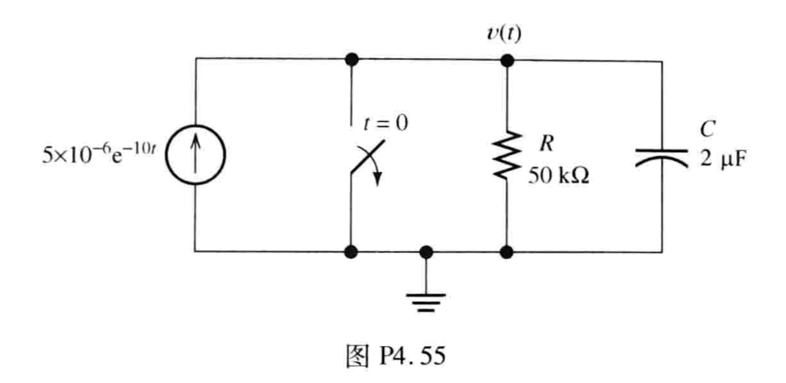


图 P4.55

P4.59 讨论两种求解稳恒直流电源作用下电路的特解的方法。

P4.60 作出二阶系统在较大超调量和振荡时的阶跃响应。何种电路具有显著的超调量和振荡？

*P4.61 如图 P4.61 所示，一个直流电源在 $t=0$ 时刻通过一个开关接入 RLC 串联电路，初始状态为 $i(0+)=0$且 $v_C(0+)=0$。写出 $v_C(t)$的微分方程，若 $R=80\ \Omega$，求解 $v_C(t)$。

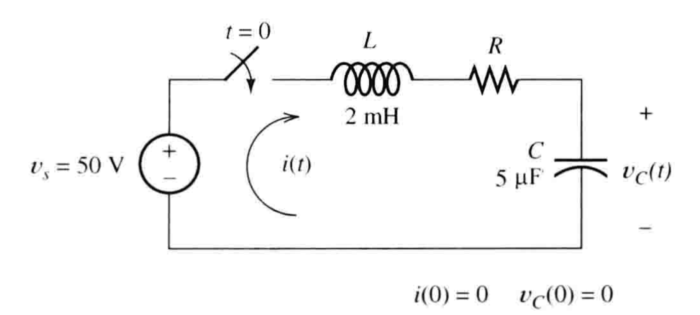


图 P4.61

*P4.62 当 $R=40\ \Omega$ 时再求解一次习题 P4.61。

*P4.63 当 $R=20\ \Omega$ 时再求解一次习题 P4.61。

P4.64 考虑如图 P4.64 所示电路，在 $t=0$ 时刻以前开关保持断开，已知 $R=25\ \Omega$。

(a)计算开关闭合时的无阻尼共振角频率、阻尼系数和阻尼比。

(b)假设电容初始时被一个 $v(0+)=25$ V 的直流电源充电，故有 $i_L(0+)=25$ V。确定 $i_L(0+)$和 $v'(0+)$的值。

(c)求出 $v(t)$的特解。

(d)求出 $v(t)$的通解，所有参数用数值表示。

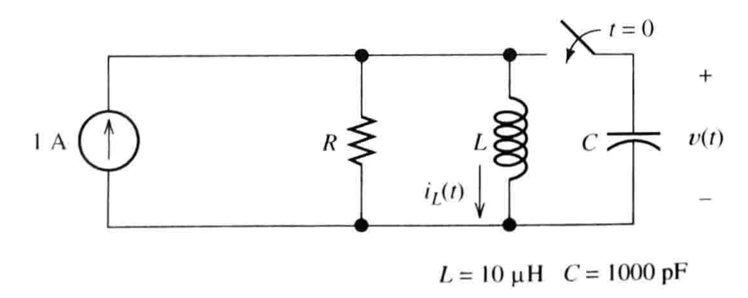


图 P4.64

P4.65 若 $R=50\ \Omega$，再次求解习题 P4.64。

P4.66 若 $R=500\ \Omega$，再次求解习题 P4.64。

P4.67 试求解图 P4.67 所示电路当 $t>0$ 时 $i(t)$的表达式，其中 $R=50\ \Omega$，$i(0+)=0$、$v_C(0+)=20$ V。[提示：假设特解的形式为 $i_P=A\cos(100\ t)+B\sin(100\ t)$。]

P4.68 若 $R=200\ \Omega$，再次求解习题 P4.67。

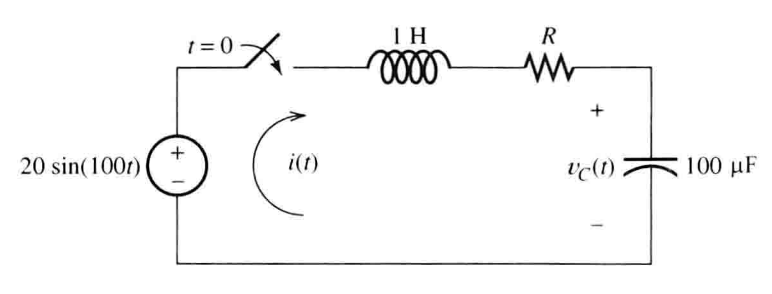


图 P4.67

P4.69 若 $R = 400\ \Omega$，再次求解习题 P4.67。

P4.70 考虑如图 P4.70 所示电路，试求：

a. 写出 $v(t)$ 的微分方程。

b. 求解阻尼系数、自然角频率、补充解的形式。

c. 通常，对于正弦强迫函数，特解形式设为 $v_p(t) = A\cos(10^4 t) + B\sin(10^4 t)$，为什么此时无效？

d. 求出特解。[提示：特解形式设为 $v_p(t) = At\cos(10^4 t) + Bt\sin(10^4 t)$。]

e. 求出 $v(t)$ 的全解。

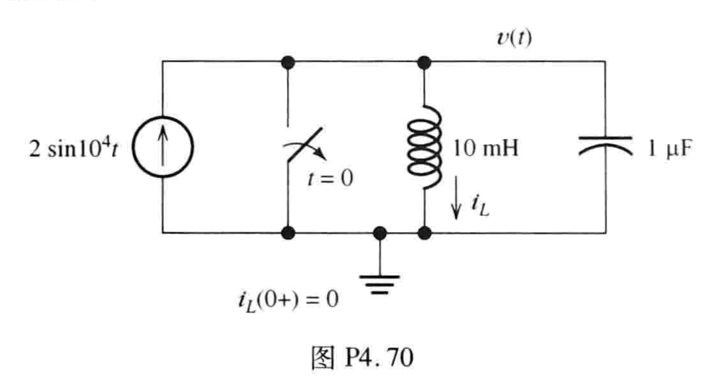


图 P4.70

4.6 节 运用 MATLAB 的符号工具箱进行暂态分析

P4.71 如图 P4.13 所示电路，用 MATLAB 对 $v_C(t)$ 的表达式微分并作出 $v_C(t)$ 的 $0 < t < 100$ ms 范围的波形。

P4.72 考虑如图 P4.49 所示电路，电压源为斜坡函数，定义为

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

或更简洁的形式 $v(t) = tu(t)$。运用 MATLAB 对 $v_C(t)$ 的表达式微分并用 R、C、t 表示。接下来，代入 $R = 1\ \text{M}\Omega$ 和 $C = 1\ \mu\text{F}$，然后，在同一坐标轴中作出 $-2 < t < 5$ s 时 $v_C(t)$ 和 $v(t)$ 的波形。[提示：在 MATLAB 中，$u(t)$ 表示为 heaviside(t)。]

P4.73 考虑如图 P4.50 所示电路，$t = 0$ 时刻以前开关一直断开，电流初值 $i_s(0+) = 0$。写出 $i_s(t)$ 的微分方程并用 MATLAB 求解。然后，作出 t 在 0 ~ 80 ms 范围内 $i_s(t)$ 的图像。[提示：避免用小写"i"作为因变量的首字母，在 MATLAB 中电流用"Is"代替。]

P4.74 考虑如图 P4.64 所示电路，$t = 0$ 时刻以前开关一直断开，已知 $R = 25\ \Omega$。(a) 写出 $v(t)$ 的微分方程。(b) 假设电容初始时被 50 V 的直流电源充电，故有 $v(0+) = 50$ V。确定 $i_L(0+)$ 和 $v'(0+)$ 的值。(c) 用 MATLAB 求出 $v(t)$ 的通解。

P4.75 考虑如图 P4.70 所示电路。(a) 写出 $v(t)$ 的微分方程。(b) 确定 $v(0+)$ 和 $v'(0+)$ 的值。(c) 用 MATLAB 求出 $v(t)$ 的全解。

P4.76 如图 P4.76 所示，用 MATLAB 求解网孔电流。$t = 0$ 时刻以前开关一直断开，电感电流初值为 0。

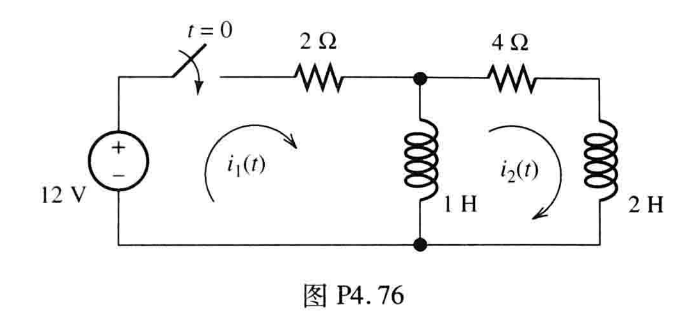


图 P4.76

P4.77　如图 P4.77 所示电路，$t=0$ 时刻以前开关断开。用 MATLAB 求解节点电压。答案保留四位小数的精度。

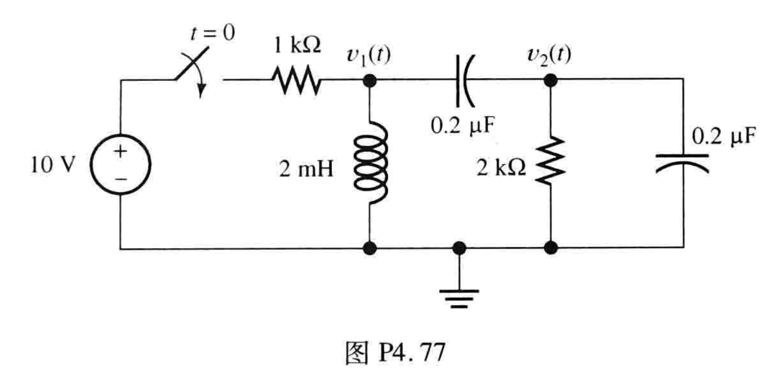


图 P4.77

测试题

你可以通过以下测试来检验对本章中重要概念的理解。答案在附录 E 中，全部解法列入学生用的解答文件中。学生解答参见附录 F。

T4.1　考虑如图 T4.1 所示电路。$t=0$ 时刻以前开关一直闭合。(a)确定开关断开之前瞬时 i_L、i_1、i_2、i_3 和 v_C 的值。(b)确定开关断开之后瞬时 i_1、i_2、i_3 和 v_C 的值。(c)求出 $t>0$ 时的 $i_L(t)$。(d)求出 $t>0$ 时的 $v_C(t)$。

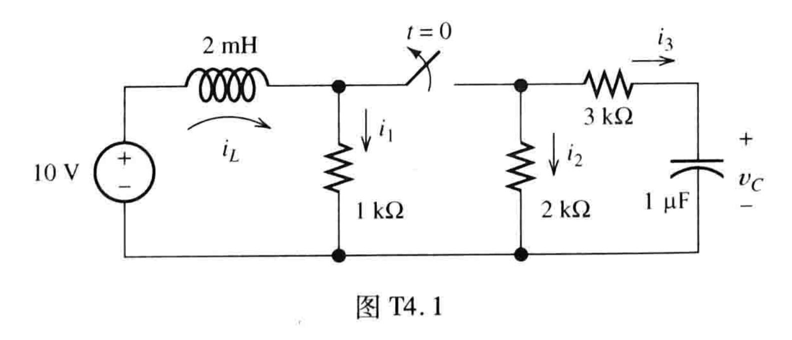


图 T4.1

T4.2　考虑如图 T4.2 所示电路。(a)写出 $i(t)$的微分方程。(b)求出时间常数和补充解的形式。(c)求出特解。(d)求出 $i(t)$的全解。

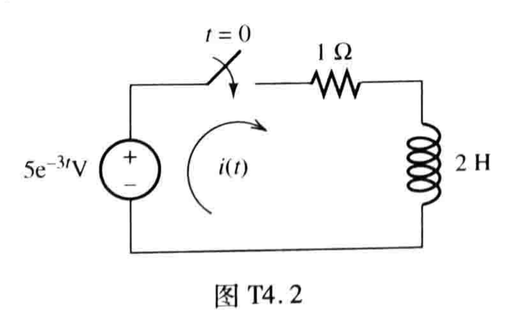


图 T4.2

T4.3 考虑如图 T4.3 所示电路。

(a)写出 $v_C(t)$的微分方程。

(b)求出特解。

(c)电路处于过阻尼状态，临界阻尼状态，还是欠阻尼状态？求出补充解的形式。

(d)求出 $v_C(t)$的全解。

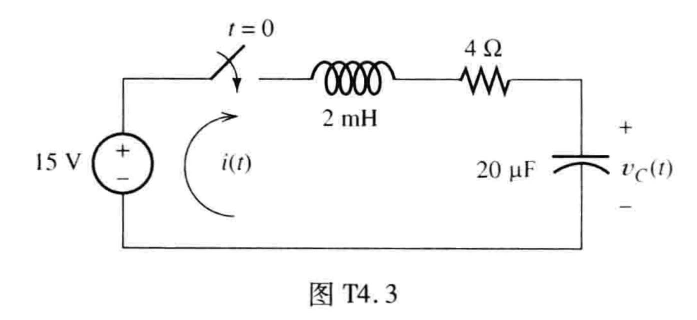


图 T4.3

T4.4 用 MATLAB 求解习题 T4.3 中的微分方程并保留四位小数的精度。

第 5 章　正弦稳态分析

本章学习目标

- 熟悉正弦信号的频率、角频率、峰值、均方根值和相位
- 计算任一周期电流、电压的均方根值
- 用相量和复阻抗进行交流电路的稳态分析
- 计算交流稳态电路的功率
- 计算交流电路的戴维南、诺顿等效电路
- 确定最大功率传输时的负载阻抗
- 讨论三相供电制的优点
- 计算三相对称电路

本章介绍

正弦交流电路有很多重要的应用。例如，日常生活和工业中的电能是按正弦电流和电压的形式进行传输的。另外，正弦信号在无线通信中应用也较多。而且，数学中一个重要分支——傅里叶分析对由多个正弦分量构成的实际信号的分析是非常有用的。因此，正弦交流电路的分析研究是电气工程中的一个重要内容。

通过第 4 章的学习，我们已经知道电路的响应由两部分组成：强迫响应和自由响应。在大部分电路中自由响应迅速衰减为零，正弦交流电路中强迫响应一直存在，因此被称为正弦稳态响应。因为自由响应迅速衰减为零，所以稳态响应是我们最关注的部分。本章将学习分析正弦稳态响应的有效方法。

本章还将介绍用于供电系统中的三相电路，工业生产中大多数工程师均需要理解三相供电系统。

5.1　正弦电流和电压

图 5.1 所示的正弦电压由下式给出：

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \tag{5.1}$$

其中，V_m是电压峰值，ω 是角频率，单位为弧度每秒（rad/s），θ 是相位。

注意：如果 θ 的单位是度，则有 $t_{max} = -\theta/360 \times T$，对于该波形 θ 为 $-45°$。

正弦信号是周期性的，在每一周期 T 中，重复同样的值。当角度增加 2π 弧度时，余弦（或正弦）函数完成一次循环，因此

$$\omega T = 2\pi \tag{5.2}$$

周期信号的频率是每秒钟完成循环的次数，可得

$$f = \frac{1}{T} \tag{5.3}$$

频率的单位是赫兹（Hz）（实际上，1 Hz 等于 1 s 的倒数）。

将式(5.3)代入式(5.2)，角频率为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{5.4}$$

利用(5.3)代替 T，得到

$$\omega = 2\pi f \tag{5.5}$$

通过讨论，余弦(或正弦)函数的角度形式为 $\omega t + \theta$。

角频率 ω 的单位为弧度每秒(rad/s)。但是，人们有时用度表示相位 θ，那么余弦函数的单位则不统一；如果想求某一时刻的 $\cos(\omega t + \theta)$，在进行加法运算之前应该把 θ 转换成弧度。通常，用角度表达更加直观，因此单位不统一不是一个问题。

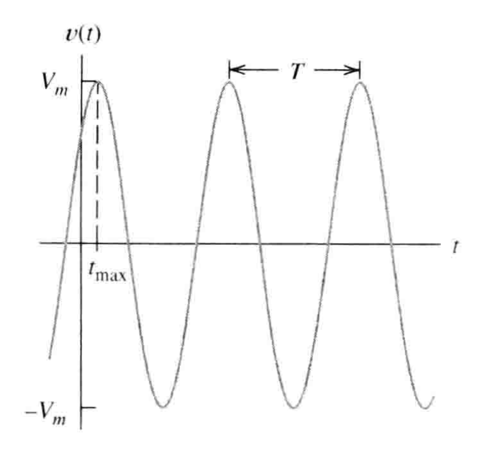


图 5.1 正弦电压 $v(t) = V_m\cos(\omega t + \theta)$ 的波形

为统一起见，本书采用余弦函数而不是用正弦函数来表示正弦量。正弦和余弦的关系如下：

$$\sin(z) = \cos(z - 90°) \tag{5.6}$$

例如，为了获得如下函数的相位：

$$v_x(t) = 10\sin(200t + 30°)$$

将它转换为余弦函数：

$$v_x(t) = 10\cos(200t + 30° - 90°)$$

$$= 10\cos(200t - 60°)$$

因此，$v_x(t)$ 的相位为 $-60°$。

5.1.1 均方根值

将周期为 T 的电压 $v(t)$ 对电阻 R 进行供电。电阻吸收的功率为

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R} \tag{5.7}$$

那么电阻在一个周期内吸收的能量为

$$E_T = \int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.8}$$

电阻的平均功率 P_{avg} 即为一个周期内吸收能量的平均值。因此，

$$P_{avg} = \frac{E_T}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.9}$$

将式(5.7)代入式(5.9)，可得

$$P_{avg} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{v^2(t)}{R}\,\mathrm{d}t \tag{5.10}$$

上式可重新写成

$$P_{avg} = \frac{\left[\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,\mathrm{d}t}\right]^2}{R} \tag{5.11}$$

现在，定义周期电压 $v(t)$ 的均方根(rms)值为

$$V_{\mathrm{rms}}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,\mathrm{d}t} \tag{5.12}$$

将上式代入式(5.11)，可得电阻的平均功率为

$$P_{\mathrm{avg}}=\frac{V_{\mathrm{rms}}^2}{R} \tag{5.13}$$

因此，如果一个周期电压的均方根值已知，那么计算该电压为电阻提供的平均功率就会很容易。均方根值也称为有效值。

类似地，可以定义周期电流 $i(t)$ 的均方根为

$$I_{\mathrm{rms}}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,\mathrm{d}t} \tag{5.14}$$

那么该电流 $i(t)$ 流过一个电阻的平均功率为

$$P_{\mathrm{avg}}=I_{\mathrm{rms}}^2 R \tag{5.15}$$

5.1.2　正弦电量的均方根值

已知一个正弦电压：

$$v(t)=V_m\cos(\omega t+\theta) \tag{5.16}$$

为了获得其均方根值，将上式代入式(5.12)，可得

$$V_{\mathrm{rms}}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_m^2\cos^2(\omega t+\theta)\,\mathrm{d}t} \tag{5.17}$$

其次，运用三角等式：

$$\cos^2(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2z) \tag{5.18}$$

则式(5.17)可写成

$$V_{\mathrm{rms}}=\sqrt{\frac{V_m^2}{2T}\int_0^T [1+\cos(2\omega t+2\theta)]\,\mathrm{d}t} \tag{5.19}$$

通过积分后可得

$$V_{\mathrm{rms}}=\sqrt{\frac{V_m^2}{2T}\left[t+\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t+2\theta)\right]_0^T} \tag{5.20}$$

进一步计算有

$$V_{\mathrm{rms}}=\sqrt{\frac{V_m^2}{2T}\left[T+\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega T+2\theta)-\frac{1}{2\omega}\sin(2\theta)\right]} \tag{5.21}$$

由式(5.2)可知 $\omega t=2\pi$，因此，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega T+2\theta)-\frac{1}{2\omega}\sin(2\theta)&=\frac{1}{2\omega}\sin(4\pi+2\theta)-\frac{1}{2\omega}\sin(2\theta)\\&=\frac{1}{2\omega}\sin(2\theta)-\frac{1}{2\omega}\sin(2\theta)\\&=0\end{aligned}$$

因此式(5.21)为

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \tag{5.22}$$

这是一个在以后处理正弦量时将多次用到的重要结论。

通常，在讨论正弦量时均方根值或有效值是已知的，而峰值是未知的。例如，在民用配电中交流电源的工作频率是60Hz，有效值是115V(美国标准)。大部分人都知道这一点，但是几乎很少有人知道115V是有效值，其峰值为 $V_m = V_{\text{rms}} \times \sqrt{2} = 115 \times \sqrt{2} \approx 163$ V(实际上，115 V是额定的民用配电电压，其变换范围为105~130 V)。

注意到 $V_{\text{rms}} = V_m/\sqrt{2}$ 仅适用于正弦量。为了获得其他周期波形的均方根值，需要根据式(5.12)的定义进行计算。

例5.1 正弦电源向电阻提供的功率。

假设电压为 $v(t) = 100\cos(100\pi t)$ 的电源加到50 Ω的电阻上。要求：(1)画出 $v(t)$ 随时间变化的波形，并计算电压的有效值和电阻的平均功率。(2)求出功率随时间变化的关系式，画出其波形。

将 $v(t)$ 的表达式和式(5.1)进行比较，得到 $\omega = 100\pi$。再由式(5.5)，频率为 $f = \omega/2\pi = 50$ Hz，因此周期 $T = 1/f = 20$ ms。$v(t)$ 随时间变化的波形如图5.2(a)所示。

电压的峰值为 $V_m = 100$ V，则有效值 $V_{\text{rms}} = V_m/\sqrt{2} = 70.71$ V，平均功率为

$$P_{\text{avg}} = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} = \frac{(70.71)^2}{50} = 100 \text{ W}$$

功率的表达式为

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \frac{100^2\cos^2(100\pi t)}{50} = 200\cos^2(100\pi t) \text{ W}$$

$p(t)$ 随时间变化的波形如图5.2(b)所示。注意：功率的变化范围为0~200 W，然而平均功率为100 W，正好与有效值的计算值相吻合。

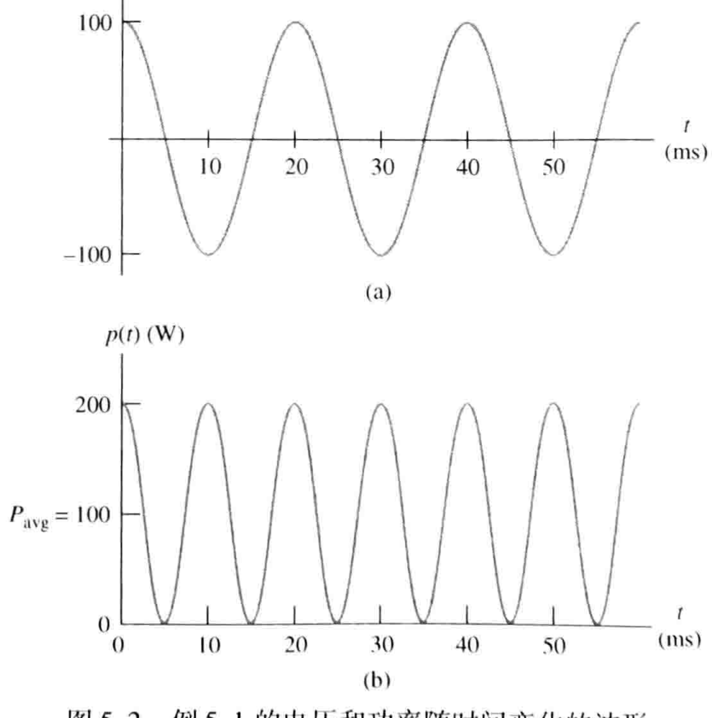


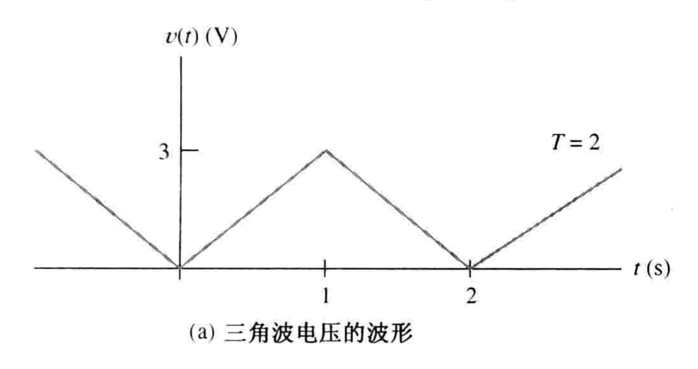
图5.2 例5.1的电压和功率随时间变化的波形

5.1.3 非正弦电压或电流的有效值

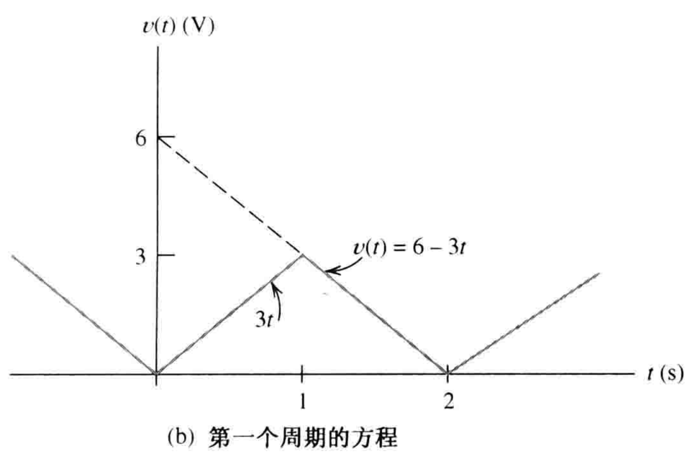
有时我们需要确定非正弦周期电压或电流的有效值，可以直接由式(5.12)或式(5.14)进行计算。

例 5.2 三角波电压的有效值。

图 5.3 所示为一个三角波电压的波形，试求其有效值。



(a) 三角波电压的波形



(b) 第一个周期的方程

图 5.3 例 5.2 的三角波电压波形

解： 首先，求在 $t=0$ 和 $t=T=2$ s 之间电压波形的表达式。如图 5.3(b) 所示，三角波第一个周期的表达式为

$$v(t)=\begin{cases}3t, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 6-3t, & 1\leqslant t\leqslant 2\end{cases}$$

式(5.12)提供的电压有效值为

$$V_{\text{rms}}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\mathrm{d}t}$$

将 $v(t)$ 的表达式分为两部分，并代入上式可得

$$V_{\text{rms}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\int_0^1 9t^2\mathrm{d}t+\int_1^2 (6-3t)^2\mathrm{d}t\right]}$$

$$V_{\text{rms}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[3t^3\big|_{t=0}^{t=1}+(36t-18t^2+3t^3)\big|_{t=1}^{t=2}\right]}$$

最后可得

$$V_{\text{rms}}=\sqrt{\frac{1}{2}[3+(72-36-72+18+24-3)]}=\sqrt{3}\text{ V}$$

以上例题的积分都是很容易手工计算的。但是，当积分计算很复杂时，主要运用软件MATLAB编程来解决，以上例题中的积分运算用 MATLAB 软件编写的命令行如下：

```
>> syms Vrms t
>> Vrms = sqrt((1/2)*(int(9*t^2,t,0,1) + int((6-3*t)^2,t,1,2)))
   Vrms =
   3^(1/2)
```

练习 5.1 假设一个正弦电压为

$$v(t) = 150\cos(200\pi t - 30^\circ)\ \text{V}$$

(a)试求角频率、频率、周期、峰值和有效值，并求出时间 $t=0$ 以后 $v(t)$ 第一次出现正的最大值对应的时间 t_{max}。(b)如果这个电压源对 50 Ω 的电阻供电，试求电源的平均功率。(c)画出 $v(t)$ 随时间变化的波形。

答案：(a)$\omega=200\pi$，$f=100$ Hz，$T=10$ ms，$V_m=150$ V，$V_{rms}=106.1$ V，$t_{max}=30°/360°\times T=0.833$ ms；(b)$P_{avg}=225$ W；(c) $v(t)$ 随时间变化的波形如图 5.4(a)所示。

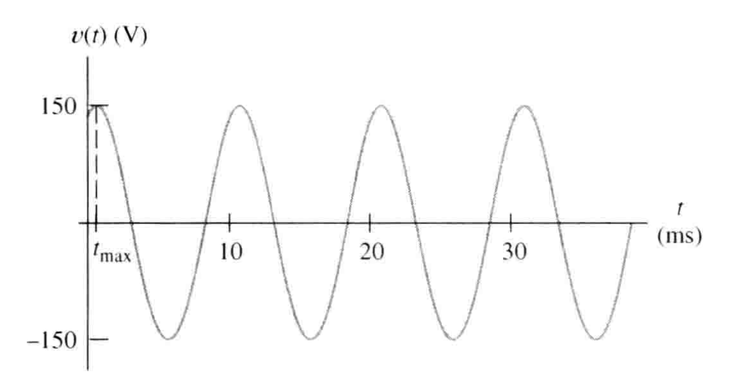


图 5.4 练习 5.1(c)的答案

练习 5.2 试将表达式 $v(t) = 100\sin(300\pi t + 60°)$ 转换为余弦函数。

答案：$v(t) = 100\cos(300\pi t - 30°)$。

练习 5.3 假设一个为计算机供电的交流线路电压的有效值为 110 V，频率为 60 Hz，在 $t=5$ ms 时出现电压峰值，试写出该交流电压的表达式。

答案：$v(t) = 155.6\cos(377t - 108°)$。

5.2 相量

在后面的几节中，我们将发现如果电流和电压用复平面的矢量(也称为相量)表示，那么正弦交流电路的稳态分析将变得非常方便。请复习附录 A 中有关复数运算的内容，作为相量分析的预备知识。

本书以寻求正弦量加减运算的快捷手段作为引入相量的起点。在分析交流电路中经常会用到基尔霍夫电流定律(KCL)和基尔霍夫电压定律(KVL)。例如，对电路中的几个正弦电压应用KVL，可能获得下式：

$$v(t) = 10\cos(\omega t) + 5\sin(\omega t + 60°) + 5\cos(\omega t + 90°) \tag{5.23}$$

为了获得 $v(t)$ 的峰值和相位，将式(5.23)转换为

$$v(t) = V_m\cos(\omega t + \theta) \tag{5.24}$$

因此，可以多次应用三角等式以获得计算结果。然而，这种常规的计算方法非常烦琐，如果将

式(5.23)右边的每一项用复平面上的矢量(即相量)来表示，就可以用相对简单的相量进行加减运算，然后将结果转换为要求的形式即可。

5.2.1　相量的定义

对于一个如下形式的正弦电压：

$$v_1(t) = V_1 \cos(\omega t + \theta_1)$$

对应的相量定义为

$$\mathbf{V}_1 = V_1 \angle \theta_1$$

因此，一个正弦量的相量是一个复数，其模为正弦量的峰值，并且相位相同。这里，我们用粗体字母表示相量。(实际上，工程师们所用相量的模并不一致。在本章和第 6 章，我们以正弦量的峰值作为相量的模，这对电气工程师而言进行电路分析是比较普遍的。然而，在后面第 15、16 和 17 章中，我们将以正弦量的有效值作为相量的模，这是电力工程师通常采用的。判断是否为有效值相量时，关键看是否有 rms 下标。在本书中，如果相量没有 rms 下标，则确定为峰值相量。)

如果一个正弦量的表达式为

$$v_2(t) = V_2 \sin(\omega t + \theta_2)$$

首先，应用三角等式将其转换为余弦函数：

$$\sin(z) = \cos(z - 90°) \tag{5.25}$$

有

$$v_2(t) = V_2 \cos(\omega t + \theta_2 - 90°)$$

其相量为

$$\mathbf{V}_2 = V_2 \angle \theta_2 - 90°$$

正弦电流的相量具有相同的形式。因此，对于电流：

$$i_1(t) = I_1 \cos(\omega t + \theta_1)$$

和

$$i_2(t) = I_2 \sin(\omega t + \theta_2)$$

其相量分别为

$$\mathbf{I}_1 = I_1 \angle \theta_1$$

和

$$\mathbf{I}_2 = I_2 \angle \theta_2 - 90°$$

5.2.2　用相量实现正弦量相加

现在我们举例说明怎样用相量来合并式(5.23)的右边几项。在这次讨论中，将提供分析步骤说明正弦量为什么能够用相量进行加法运算，最后得出一般的分析过程。

在合并式(5.23)之前，首先根据式(5.25)将所有的正弦量换用余弦函数表示，因此式(5.23)可写成

$$v(t) = 10\cos(\omega t) + 5\cos(\omega t + 60° - 90°) + 5\cos(\omega t + 90°) \tag{5.26}$$

$$v(t) = 10\cos(\omega t) + 5\cos(\omega t - 30°) + 5\cos(\omega t + 90°) \tag{5.27}$$

根据附录 A 中的欧拉公式(式(A.8))，有

$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}\left(e^{j\theta}\right) = \mathrm{Re}[\cos(\theta) + j\sin(\theta)] \tag{5.28}$$

其中 Re( )表示取圆括号中的实部。因此，式(5.27)可以写成

$$v(t)=10\,\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]+5\,\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-30^\circ)}\right]+5\,\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+90^\circ)}\right] \tag{5.29}$$

已知当一个实数 A 与复数 Z 相乘时，那么实数 A 应与复数 Z 的实部和虚部分别相乘，上式变为

$$v(t)=\mathrm{Re}\left[10\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]+\mathrm{Re}\left[5\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-30^\circ)}\right]+\mathrm{Re}\left[5\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+90^\circ)}\right] \tag{5.30}$$

进一步可得

$$v(t)=\mathrm{Re}\left[10\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+5\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-30^\circ)}+5\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+90^\circ)}\right] \tag{5.31}$$

表明几个复数之和的实部等于各实部之和。如果提出公因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$，则式(5.31)变为

$$v(t)=\mathrm{Re}\left[\left(10+5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}30^\circ}+5^{\mathrm{j}90^\circ}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \tag{5.32}$$

将复数用极坐标形式表示，可得

$$v(t)=\mathrm{Re}\left[(10\angle 0^\circ+5\angle -30^\circ+5\angle 90^\circ)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \tag{5.33}$$

将这些复数相加，可得

$$\begin{aligned}10\angle 0^\circ+5\angle -30^\circ+5\angle 90^\circ&=10+4.33-\mathrm{j}2.50+\mathrm{j}5\\&=14.33+\mathrm{j}2.5\\&=14.54\angle 9.90^\circ\\&=14.54\mathrm{e}^{\mathrm{j}9.90^\circ}\end{aligned} \tag{5.34}$$

将该结果代入式(5.33)，有

$$v(t)=\mathrm{Re}\left[\left(14.54\mathrm{e}^{\mathrm{j}9.90^\circ}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

再将上式整理可得

$$v(t)=\mathrm{Re}\left[14.54\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+9.90^\circ)}\right] \tag{5.35}$$

再根据式(5.28)，可得

$$v(t)=14.54\cos(\omega t+9.90^\circ) \tag{5.36}$$

因此，获得了 $v(t)$ 要求的表示方式。式(5.34)的左边几项即为式(5.27)右边几项对应的相量。注意：将相量相加是合并正弦量必不可少的部分。

5.2.3 正弦量求和运算的步骤

为了将正弦量相加，首先应写出求和项中每项对应的相量，再利用复数运算方法对相量相加，最后将求和结果转换为相应的表达式。

例 5.3 用相量形式对正弦量相加。

假设

$$v_1(t)=20\cos(\omega t-45^\circ)$$
$$v_2(t)=10\sin(\omega t+60^\circ)$$

试将它们的和 $v_s(t)=v_1(t)+v_2(t)$ 用一个正弦量表示。

解：对应的相量为

$$\mathbf{V}_1=20\angle -45^\circ$$
$$\mathbf{V}_2=10\angle -30^\circ$$

注意：这里将 $\mathbf{V}_2$ 的相位减去 90°，因为 $v_2(t)$ 是一个正弦函数而不是余弦函数。

其次，用复数运算方法对相量相加，并把求和结果转换为极坐标形式。

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_s &= \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 \\ &= 20\ \angle -45^\circ + 10\ \angle -30^\circ \\ &= 14.14 - \mathrm{j}14.14 + 8.660 - \mathrm{j}5 \\ &= 22.80 - \mathrm{j}19.14 \\ &= 29.77\ \angle -40.01^\circ\end{aligned}$$

因此，相量 $\mathbf{V}_s$ 的时域表达式为

$$v_s(t) = 29.77\cos(\omega t - 40.01^\circ)$$

练习 5.4　用相量进行以下运算：

$$\begin{aligned}v_1(t) &= 10\cos(\omega t) + 10\sin(\omega t) \\ i_1(t) &= 10\cos(\omega t + 30^\circ) + 5\sin(\omega t + 30^\circ) \\ i_2(t) &= 20\sin(\omega t + 90^\circ) + 15\cos(\omega t - 60^\circ)\end{aligned}$$

答案

$$\begin{aligned}v_1(t) &= 14.14\cos(\omega t - 45^\circ) \\ i_1(t) &= 11.18\cos(\omega t + 3.44^\circ) \\ i_2(t) &= 30.4\cos(\omega t - 25.3^\circ)\end{aligned}$$

5.2.4　旋转矢量

已知正弦电压

$$v(t) = V_m\cos(\omega t + \theta)$$

为了建立相量的概念，将正弦电压写成

$$v(t) = \mathrm{Re}\left[V_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \theta)}\right]$$

其中，方括号中的复数为

$$V_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \theta)} = V_m\ \angle \omega t + \theta$$

这个复数用一个复平面上长度 V_m、以 ω(rad/s)角速度逆时针旋转的矢量来表示，电压 $v(t)$ 为该矢量的实部，如图 5.5(a)所示。当这个矢量旋转时，它在实轴上的投影为该电压在当前时刻的大小，此旋转矢量在 $t=0$ 时刻的映射即为该电压对应的相量。

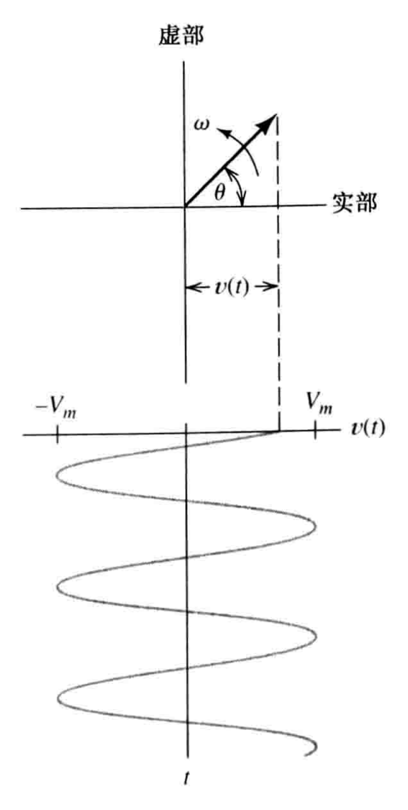


图 5.5　一个正弦量可用复平面上逆时针旋转矢量的实部表示

5.2.5　相位关系

电流与电压之间的相位关系通常是很重要的。已知电压

$$v_1(t) = 3\cos(\omega t + 40^\circ)$$

和

$$v_2(t) = 4\cos(\omega t - 20^\circ)$$

其对应的相量为

$$\mathbf{V}_1 = 3\ \angle 40^\circ$$

和

$$\mathbf{V}_2 = 4\ \angle -20^\circ$$

相量(phasor)图如图5.6(a)所示。注意到 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$ 之间的角度为60°，因为复数矢量(vector)是按逆时针方向旋转的，因此我们说 $\mathbf{V}_1$ 的相位超前 $\mathbf{V}_2$ 60°(也可以说 $\mathbf{V}_2$ 滞后 $\mathbf{V}_1$ 60°)。

电压的大小由旋转矢量的实部获得，图5.7(a)为 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 随 ωt 变化的波形图。注意：$v_1(t)$ 比 $v_2(t)$ 提前60°达到峰值，这意味着 $v_1(t)$ 的相位超前 $v_2(t)$ 60°。

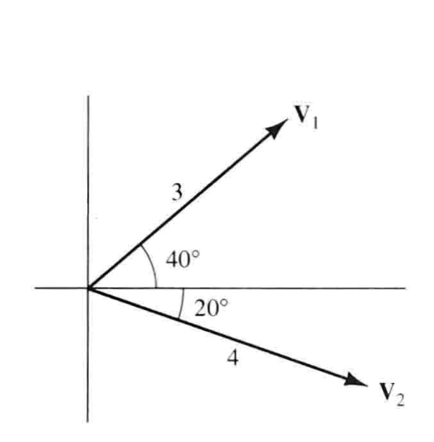


图5.6 由于矢量是按逆时针方向旋转，则 $\mathbf{V}_1$ 超前 $\mathbf{V}_2$ 60°(或 $\mathbf{V}_2$ 滞后 $\mathbf{V}_1$ 60°)

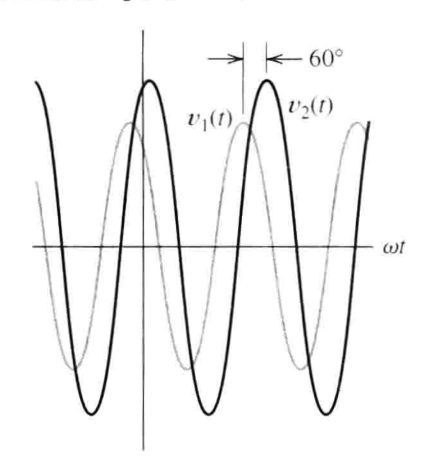


图5.7 $v_1(t)$ 比 $v_2(t)$ 提前60°达到峰值，即 $v_1(t)$ 超前 $v_2(t)$ 60°

练习5.5 已知如下几个电压：

$$v_1(t) = 10\cos(\omega t - 30°)$$
$$v_2(t) = 10\cos(\omega t + 30°)$$
$$v_3(t) = 10\sin(\omega t + 45°)$$

试说明每两个电压之间的相位关系。(提示：找出每个电压的相量并画出相量图。)

答案

v_1 滞后 v_2 60°(或 v_2 超前 v_1 60°)；

v_1 超前 v_3 15°(或 v_3 滞后 v_1 15°)；

v_2 超前 v_3 75°(或 v_3 滞后 v_2 75°)。

5.3 复阻抗

本节将介绍用相量表示正弦电压与电流进行正弦稳态分析的方法，与第4章学过的方法相比较，将要用到的相量分析法要相对容易些。除了采用复数计算以外，正弦稳态分析完全可以采用第2章所学过的电阻电路的分析方法。

5.3.1 电感

假设流过一个电感的正弦电流为

$$i_L(t) = I_m \sin(\omega t + \theta) \tag{5.37}$$

回忆一下电感两端的电压为

$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \tag{5.38}$$

将式(5.37)代入式(5.38)，经过推导可得

$$v_L(t) = \omega L I_m \cos(\omega t + \theta) \tag{5.39}$$

电流和电压相量为

$$\mathbf{I}_L = I_m \angle \theta - 90^\circ \tag{5.40}$$

和

$$\mathbf{V}_L = \omega L I_m \angle \theta = V_m \angle \theta \tag{5.41}$$

相量图如同 5.8(a)所示。相关电流和电压的波形如图 5.8(b)所示。注意：对于一个纯电感，其电流滞后电压 90°。

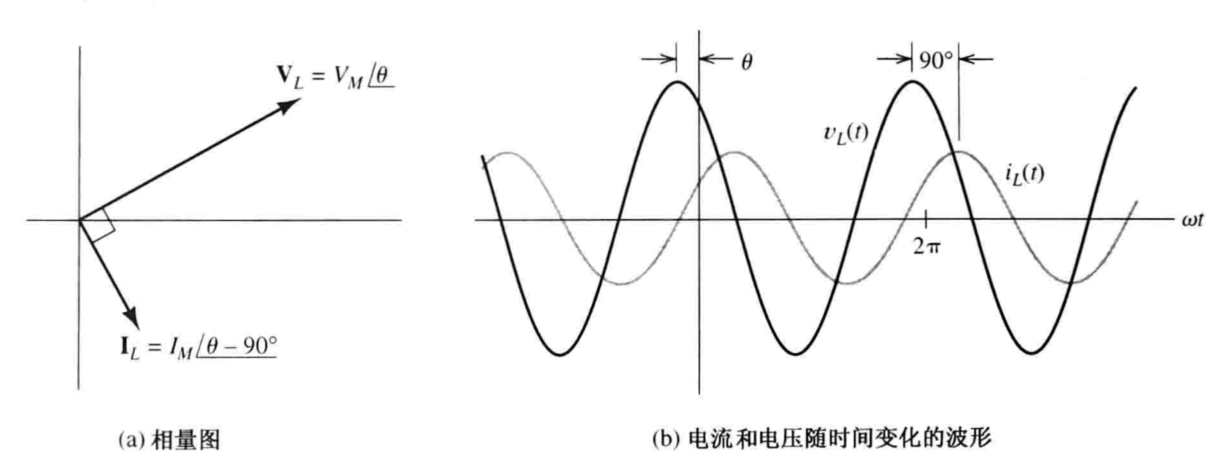


图 5.8　纯电感的电流滞后电压 90°

式(5.41)可以写成如下的形式：

$$\mathbf{V}_L = (\omega L \angle 90^\circ) \times I_m \angle \theta - 90^\circ \tag{5.42}$$

将式(5.40)代入上式可得

$$\mathbf{V}_L = (\omega L \angle 90^\circ) \times \mathbf{I}_L \tag{5.43}$$

又可以写成

$$\mathbf{V}_L = \mathrm{j}\omega L \times \mathbf{I}_L \tag{5.44}$$

将 $\mathrm{j}\omega L = \omega L/\underline{90^\circ}$ 称为电感的阻抗，并记为 Z_L，可得

$$Z_L = \mathrm{j}\omega L = \omega L \angle 90^\circ \tag{5.45}$$

和

$$\mathbf{V}_L = Z_L \mathbf{I}_L \tag{5.46}$$

因此，电压相量等于阻抗乘以电流相量，这就是欧姆定律的相量形式。这里，电感的阻抗是虚数，而电阻是实数(如果阻抗是纯虚数，也称为电抗)。

5.3.2　电容

同理，对于电容而言，如果其电流和电压都为正弦量，则相量关系为

$$\mathbf{V}_C = Z_C \mathbf{I}_C \tag{5.47}$$

其中，电容的阻抗为

$$Z_C = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ \tag{5.48}$$

注意：电容的阻抗也是一个纯虚数。

假设电压相量为

$$\mathbf{V}_C = V_m \angle\theta$$

那么电流相量为

$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_C}{Z_C} = \frac{V_m \angle\theta}{(1/\omega C)\ \angle -90^\circ} = \omega C V_m \angle\theta + 90^\circ$$

$$\mathbf{I}_C = I_m \angle\theta + 90^\circ$$

其中 $I_m = \omega C V_m$。纯电容元件电压与电流的相量图如图 5.9(a)所示，其波形如图 5.9(b)所示。注意：对于纯电容，电流相位超前电压 90°。(另一方面，电感的电流滞后于电压。L 和 C 分别表示电感和电容，I 表示电流。)

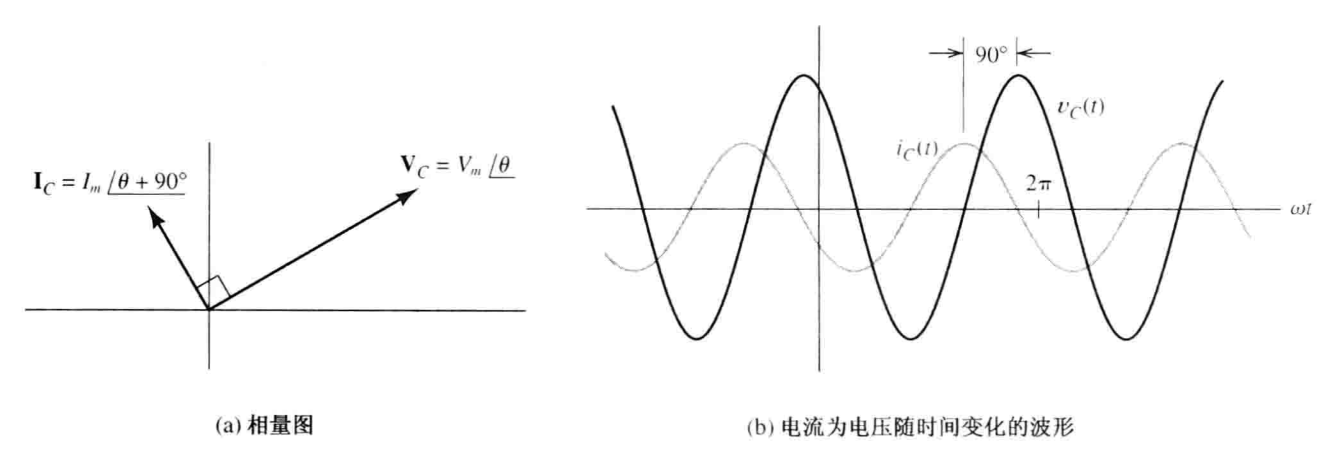


图 5.9 纯电容的电流超前电压 90°

5.3.3 电阻

对于电阻元件，其电流和电压的相量关系为

$$\mathbf{V}_R = R\mathbf{I}_R \tag{5.49}$$

由于电阻是一个实数，其电压与电流同相，相量图和波形图如图 5.10 所示。

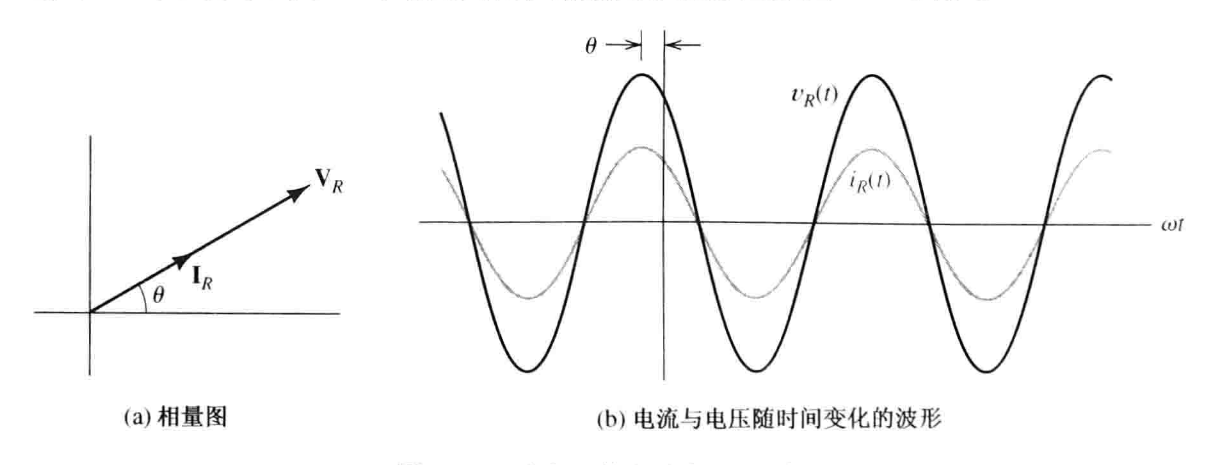


图 5.10 纯电阻的电流与电压同相

应用实例 5.1 我在哪里？现在是什么时间？(相位测量的应用之一)

有几种无线系统是基于从几个无线发射机接收到的信号相位不同的原理，它们已经在导航、测量和时间传播方面得到广泛应用。

这种系统早期称为 LORAN(long-range navigation，远距离无线电导航系统)。对接收机来

说，该系统的目的是确定目标的纬度和经度。最简单的 LORAN 系统由 3 个发射机构成(一个主机，两个从机)，它们不断发出 10 个频率为 100 kHz、具有精确相位差的正弦波。由于信号以光速传播，从每个发射机接收到信号的相移量与发射机和接收机之间的距离成正比。

从第 1 个发射机(主机)接收到的信号作为相位参考信号，接着，测量两个从机发出的信号的相位，接收机就可以确定主机和每个从机的延迟时间差。主机和一个从机之间的延迟时间差值可由图 PA5.1 所示的定位线来测量。例如，如果主机和 1 号从机发出信号的延迟时间相等(即延迟时间差为零)，那么定位线就位于主机和 1 号从机之间的垂直平分(中垂)线上。如果主机发出信号的延迟时间小一些，那么定位线成为靠近主机的双曲线。

接收机位于两个从机定位线的交点，如图 PA5.2 所示。LORAN 系统能够确定几百米内的位置。

目前的全球定位系统(GPS)更加先进也更加复杂，信号从 24 颗卫星构成的网络发出。通过比较接收信号的相位，接收机(包含一个专用计算机)的定位可以精确到几米以内，其内部时钟精度可高达约 0.01μs。这种接收机大约值几百美元，被飞行员、航海员和徒步旅行者广泛采用。

采用几个高质量的 GPS 接收机，在测量中可使被测距离足够精确。例如，研究员为了遥测格陵兰冰盖对全球变暖产生的影响，以一个位于地平面的 GPS 作为参考点，其位置和高度是已知的。在飞越冰盖上方的飞机中安装另一个 GPS 来计算与参考点之间的相对位置和相对高度，最后用一个雷达测量飞机与冰盖之间的距离。很明显，通过对冰盖高度进行重复测量，可使其精度在几厘米内。

涉及相位关系概念的应用系统对平民、土木工程师和科学家也是很有用的。

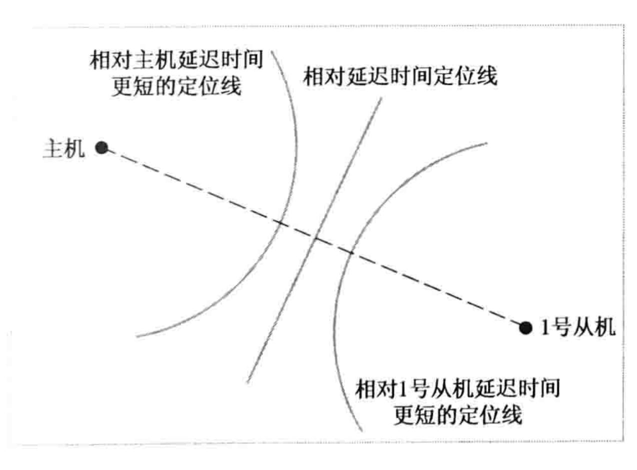


图 PA5.1

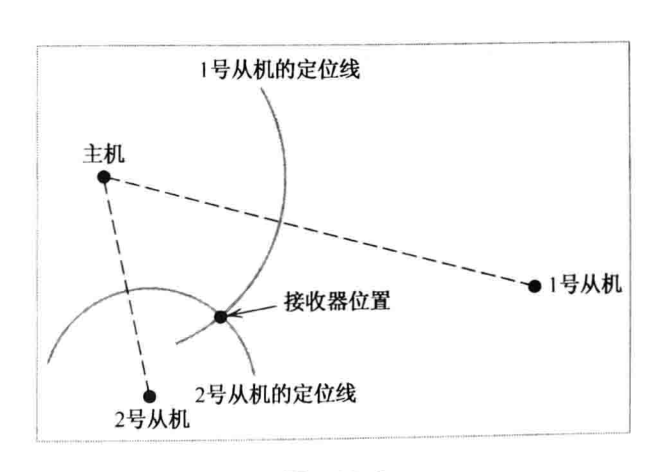


图 PA5.2

练习 5.6　一个电压 $v_L(t) = 100\cos(200t)$ 加在 0.25 H 的电感两端(注意到 $\omega = 200$)。(a)试求电感的阻抗、电流和电压相量。(b)画出相量图。

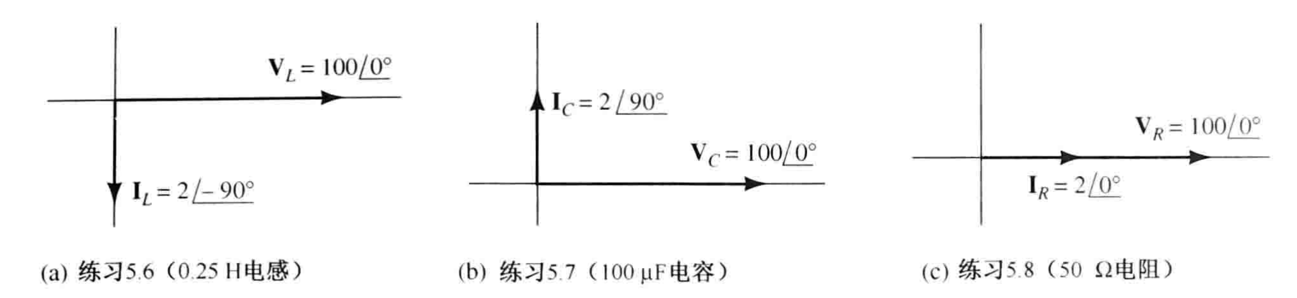
答案: (a) $Z_L = \mathrm{j}50 = 50\angle 90^\circ$, $\mathbf{I}_L = 2\angle -90^\circ$, $\mathbf{V}_L = 100\angle 0^\circ$；(b)相量图如图 5.11(a)所示。

练习 5.7　一个电压 $v_C(t) = 100\cos(200t)$ 加在 100 μF 的电容两端。(a)试求电容的阻抗、电流和电压相量。(b)画出相量图。

答案: (a) $Z_C = -\mathrm{j}50 = 50\angle -90^\circ$, $\mathbf{I}_C = 2\angle 90^\circ$, $\mathbf{V}_C = 100\angle 0^\circ$；(b)相量图如图 5.11(b)所示。

练习 5.8　一个电压 $v_R(t) = 100\cos(200t)$ 加在 50 Ω 的电阻两端。(a)试求电流和电压相量。(b)画出相量图。

答案: (a) $\mathbf{I}_R = 2\angle 0^\circ$, $\mathbf{V}_R = 100\angle 0^\circ$；(b)相量图如图 5.11(c)所示。



(a) 练习5.6（0.25 H电感） (b) 练习5.7（100 μF电容） (c) 练习5.8（50 Ω电阻）

图 5.11 练习 5.6、练习 5.7 和练习 5.8 的答案。为了使电流相量可见，已将其比例放大了

5.4 用相量和复阻抗进行电路分析

5.4.1 基尔霍夫定律的相量形式

回顾对基尔霍夫电压定律(KVL)的描述，电路中任何闭合回路电压的代数和为零。其典型表达式为

$$v_1(t) + v_2(t) - v_3(t) = 0 \tag{5.50}$$

如果电压都是正弦量，则可以用相量表示。则上式变为

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3 = 0 \tag{5.51}$$

因此，可以直接列写相量的 KVL，即任何闭合回路电压的相量和等于零。

类似地，基尔霍夫电流定律(KCL)也可以写成电流的相量形式，流入一个节点的电流相量和一定等于流出该节点电流的相量和。

5.4.2 用相量和复阻抗进行电路分析

我们已经知道电流和电压相量由复阻抗联系起来，基尔霍夫定律也可以用相量表示。除了电压、电流和阻抗为复数之外，正弦交流电路的方程形式与电阻电路完全一致。

对正弦交流电路进行稳态分析的步骤为：

1. 将时域表达式的电压源和电流源用相量代替(所有电源的频率必须相同)。
2. 将电感用复阻抗 $Z_L = j\omega L = \omega L \angle 90°$ 代替，将电容用复阻抗 $Z_C = 1/j\omega C = (1/\omega C)\angle -90°$ 代替，电阻的阻抗就是其本身。
3. 运用第 2 章学过的各种方法进行电路分析，进行复数运算。

例 5.4 串联电路的交流稳态分析。

试求图 5.12(a)所示电路的电流稳态值，同时，求出每个元件的电压相量，并画出相量图。

解： 从给定电压源 $v_s(t)$ 的表达式可知，其峰值电压为 100 V，角频率 $\omega = 500$，相位为 30°，则电压源的相量为

$$\mathbf{V}_s = 100\angle 30°$$

电感和电容的复阻抗为

$$Z_L = j\omega L = j500 \times 0.3 = j150\ \Omega$$

和

$$Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{500 \times 40 \times 10^{-6}} = -j50\ \Omega$$

如图 5.12(b)所示电路的相量形式，所有 3 个元件为串联连接。因此，将 3 个元件的阻抗

相加，得电路的等效阻抗为

$$Z_{eq} = R + Z_L + Z_C$$

代入每个复阻抗：

$$Z_{eq} = 100 + j150 - j50 = 100 + j100$$

将其转换为极坐标形式，有

$$Z_{eq} = 141.4 \angle 45^\circ$$

现在，将电压相量除以等效阻抗，得电流相量：

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{Z} = \frac{100 \angle 30^\circ}{141.4 \angle 45^\circ} = 0.707 \angle -15^\circ$$

电流的时域表达式为

$$i(t) = 0.707 \cos(500t - 15^\circ)$$

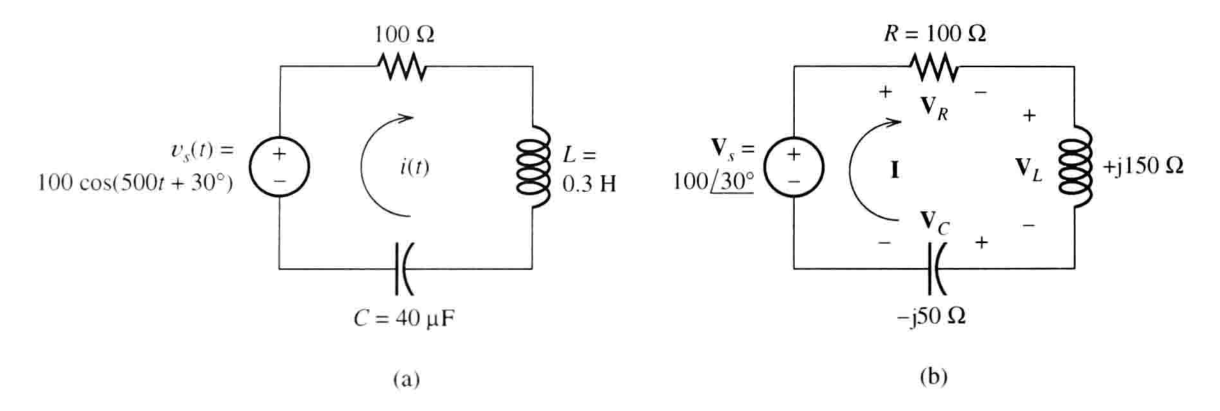


图 5.12　例 5.4 的电路

这里，将电流相量乘以每个元件的阻抗可得其电压相量：

$$\mathbf{V}_R = R \times \mathbf{I} = 100 \times 0.707 \angle -15^\circ = 70.7 \angle -15^\circ$$

$$\mathbf{V}_L = j\omega L \times \mathbf{I} = \omega L \angle 90^\circ \times \mathbf{I} = 150 \angle 90^\circ \times 0.707 \angle -15^\circ$$
$$= 106.1 \angle 75^\circ$$

$$\mathbf{V}_C = -j\frac{1}{\omega C} \times \mathbf{I} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ \times \mathbf{I} = 50 \angle -90^\circ \times 0.707 \angle -15^\circ$$
$$= 35.4 \angle -105^\circ$$

电压和电流的相量图如图 5.13(a) 所示。注意到电流 **I** 滞后电压源 $\mathbf{V}_s$ 45°。正如预期，电阻电压 $\mathbf{V}_R$ 与电流 **I** 同相，电感电压 $\mathbf{V}_L$ 超前电流 **I** 90°，电容电压 $\mathbf{V}_C$ 滞后电流 **I** 90°。

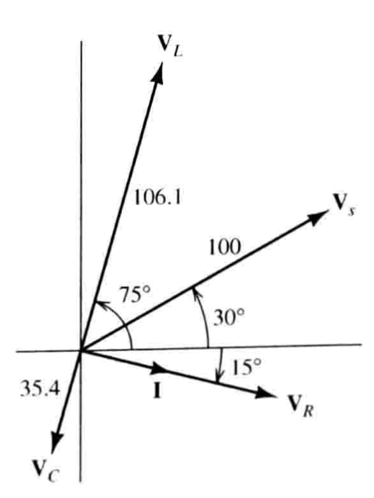


图 5.13　例 5.4 的相量图

例 5.5　复阻抗的串/并联合并。

如图 5.14(a) 所示电路，试求电压 $v(t)$ 的稳态值，并计算每个元件的电流相量，画出电流和电源电压的相量图。

解：电压源的相量为 $\mathbf{V}_s = 10 \angle -90^\circ$。[注意：$v_s(t)$ 是正弦函数而不是余弦函数，因此有必要将相位减去 90°。] 其角频率 $\omega = 1000$。电感和电容的复阻抗为

$$Z_L = j\omega L = j1000 \times 0.1 = j100\ \Omega$$

和

$$Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{1000 \times 10 \times 10^{-6}} = -j100\ \Omega$$

电路的相量形式如图 5.14(b) 所示。

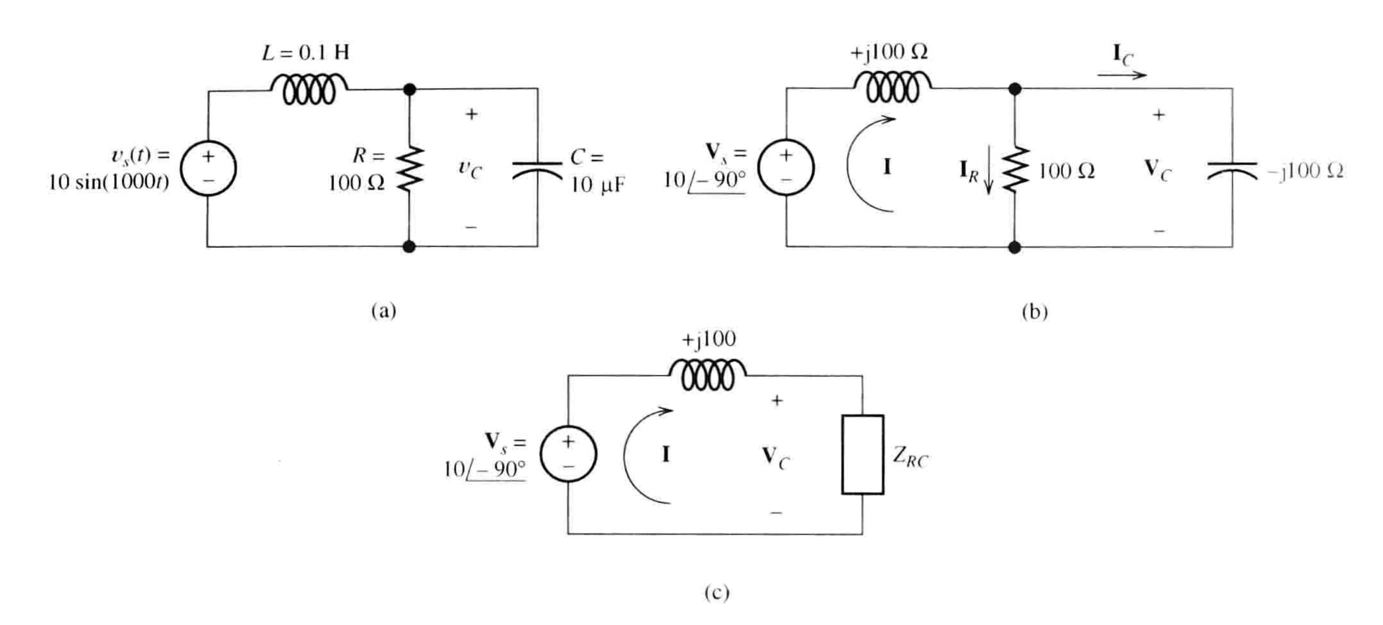


图 5.14　例 5.5 的电路

为了求得 $\mathbf{V}_C$，首先将并联的电阻和电容进行合并。接着，运用分压公式获得 RC 并联部分的电压。RC 并联部分的阻抗为

$$Z_{RC}=\frac{1}{1/R+1/Z_C}=\frac{1}{1/100+1/(-\mathrm{j}100)}$$

$$=\frac{1}{0.01+\mathrm{j}0.01}=\frac{1\ \angle 0^\circ}{0.01414\ \angle 45^\circ}=70.71\ \angle -45^\circ$$

将其转换为矩形形式可得

$$Z_{RC}=50-\mathrm{j}50$$

并联简化后的等效电路如图 5.14(c)所示。

现在，由分压公式可得

$$\mathbf{V}_C=\mathbf{V}_s\frac{Z_{RC}}{Z_L+Z_{RC}}=10\ \angle -90^\circ\ \frac{70.71\ \angle -45^\circ}{\mathrm{j}100+50-\mathrm{j}50}$$

$$=10\ \angle -90^\circ\ \frac{70.71\ \angle -45^\circ}{50+\mathrm{j}50}=10\ \angle -90^\circ\ \frac{70.71\ \angle -45^\circ}{70.71\ \angle 45^\circ}$$

$$=10\ \angle -180^\circ$$

将电压相量转换为时域表达式，可得

$$v_C(t)=10\cos(1000t-180^\circ)=-10\cos(1000t)$$

最后，可得每个元件的电流为

$$\mathbf{I}=\frac{\mathbf{V}_s}{Z_L+Z_{RC}}=\frac{10\ \angle -90^\circ}{\mathrm{j}100+50-\mathrm{j}50}=\frac{10\ \angle -90^\circ}{50+\mathrm{j}50}$$

$$=\frac{10\ \angle -90^\circ}{70.71\ \angle 45^\circ}=0.1414\ \angle -135^\circ$$

$$\mathbf{I}_R=\frac{\mathbf{V}_C}{R}=\frac{10\ \angle -180^\circ}{100}=0.1\ \angle -180^\circ$$

$$\mathbf{I}_C=\frac{\mathbf{V}_C}{Z_C}=\frac{10\ \angle -180^\circ}{-\mathrm{j}100}=\frac{10\ \angle -180^\circ}{100\ \angle -90^\circ}=0.1\ \angle -90^\circ$$

其相量图如图 5.15 所示。

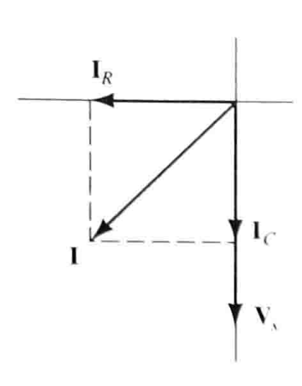


图 5.15　例 5.5 的相量图

5.4.3　节点电压分析

我们可以用相量表示节点电压来分析第 2 章所用的一个例子。

例 5.6　节点电压法分析交流稳态响应

用节点电压法求图 5.16(a) 所示电路中 $v_1(t)$ 的稳态值。

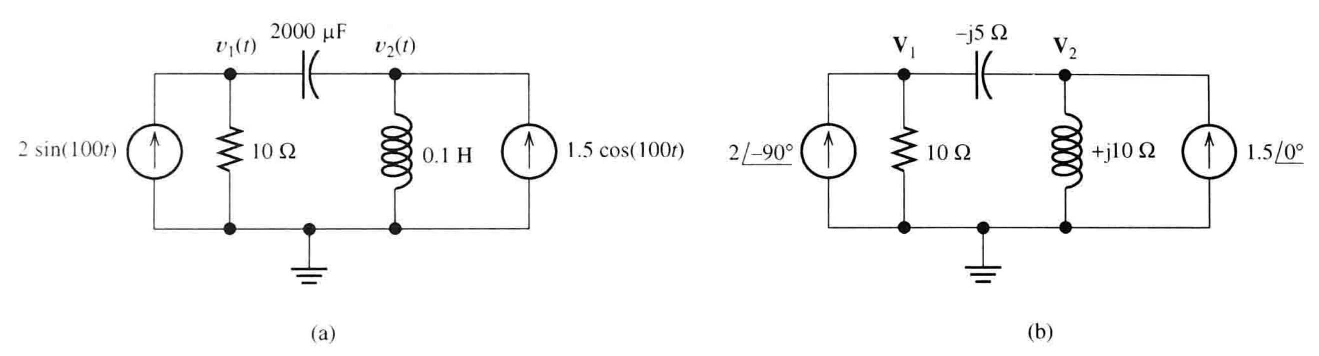


图 5.16　例 5.6 的电路

解： 转换后的网络如图 5.16(b) 所示，在节点 1 和节点 2 运用基尔霍夫电压定律可以得到两个等式：

$$\frac{\mathbf{V}_1}{10} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{-\mathrm{j}5} = 2\ \angle -90^\circ$$

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathrm{j}10} + \frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{-\mathrm{j}5} = 1.5\ \angle 0^\circ$$

这些等式可以写成

$$(0.1 + \mathrm{j}0.2)\mathbf{V}_1 - \mathrm{j}0.2\mathbf{V}_2 = -\mathrm{j}2$$

$$-\mathrm{j}0.2\mathbf{V}_1 + \mathrm{j}0.1\mathbf{V}_2 = 1.5$$

求得

$$\mathbf{V}_1 = 16.1\ \angle 29.7^\circ$$

现在，我们把这个相量转化为时域函数，可得

$$v_1(t) = 16.1\cos(100t + 29.7^\circ)$$

5.4.4　网孔电流分析

用相量分析电路的网孔电流，练习 5.11 可以用这种方法进行分析。

练习 5.9　已知如图 5.17(a) 所示电路。(a) 试求 $i(t)$。(b) 画出 3 个电压和电流的相量图。(c) 说明 $v_s(t)$ 和 $i(t)$ 的相位关系。

答案： (a) $i(t) = 0.0283\cos(500t - 135^\circ)$。(b) 相量图如图 5.17(b) 所示。(c) $i(t)$ 滞后 $v_s(t)$ 45°。

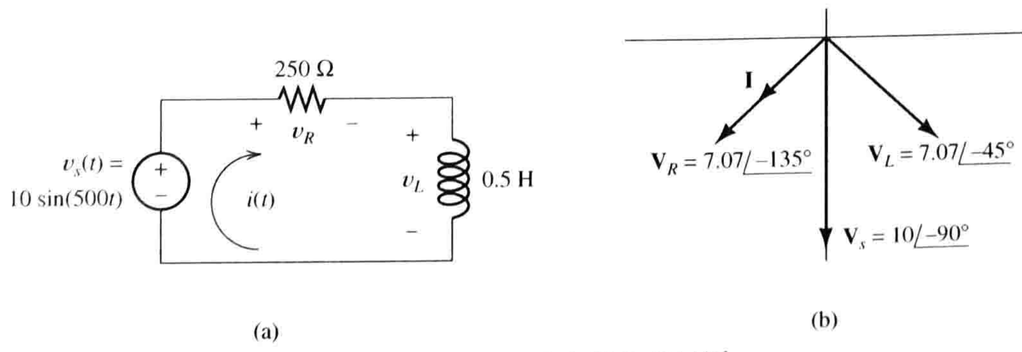


图 5.17　练习 5.9 的电路和相量图

练习 5.10　试求图 5.18 所示电路中每个元件的电压和电流相量。

答案: $\mathbf{V} = 277\angle -56.3^\circ$, $\mathbf{I}_C = 5.55\angle 33.7^\circ$, $\mathbf{I}_L = 1.39\angle -146.3^\circ$, $\mathbf{I}_R = 2.77\angle -56.3^\circ$。

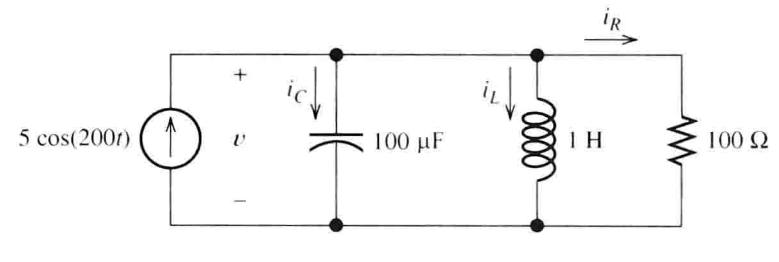


图 5.18　练习 5.10 的电路

练习 5.11　求图 5.19 所示电路中的网孔电流。

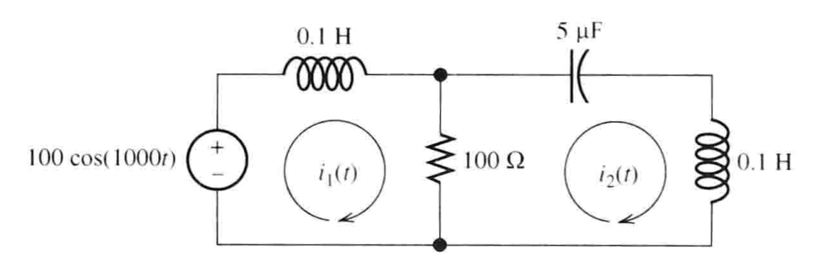


图 5.19　练习 5.11 的电路

5.5　交流电路的功率

如图 5.20 所示,电压 $v(t) = V_m\cos(\omega t)$ 对一个由电阻、电感和电容构成的网络(即 *RLC* 网络)供电,电压源的相量为 $\mathbf{V} = V_m\angle 0^\circ$,该网络的等效阻抗为 $Z = |Z|\angle\theta = R + jX$。则电流相量为

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{Z} = \frac{V_m\angle 0^\circ}{|Z|\angle\theta} = I_m\angle -\theta \tag{5.52}$$

其中,

$$I_m = \frac{V_m}{|Z|} \tag{5.53}$$

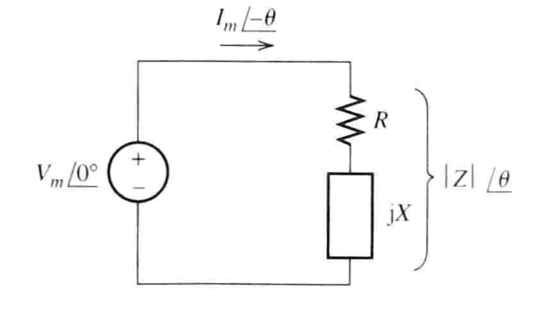


图 5.20　电压源对阻抗为 $Z = R + jX$ 的负载供电

在计算电源对一般负载提供的功率之前,应分别分析负载为纯电阻、纯电感或纯电容的情形。

5.5.1　单个负载的功率

首先已知网络为纯电阻的情形。由 $\theta = 0$,有

$$v(t) = V_m\cos(\omega t)$$

$$i(t) = I_m\cos(\omega t)$$

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m I_m\cos^2(\omega t)$$

这些电量的波形如图 5.21 所示。注意:电流与电压同相(即在相同时刻达到峰值)。因为 $p(t)$ 在任何时刻都为正,说明电源不断地向负载提供能量(电能被转换为热能)。当然,随着电压电流幅值的波动,功率的大小也在随时间波动。

5.5.2 电感负载的电流、电压和功率

已知负载为纯电感的情形，其阻抗 $Z_L = \omega L \angle 90°$。由 $\theta = 90°$，有

$$v(t) = V_m \cos(\omega t)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - 90°) = I_m \sin(\omega t)$$

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m I_m \cos(\omega t)\sin(\omega t)$$

根据三角等式 $\cos(x)\sin(x) = (1/2)\sin(2x)$，则功率的表达式变为

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2}\sin(2\omega t)$$

这些电量的波形如图 5.22(a)所示。注意：电流滞后电压 90°。半个周期的功率为正，表明电感吸收电能并储存在磁场中；另外半个周期的功率为负，表明电感将储存的能量释放给电源；平均功率为零，说明无功功率在电源与负载之间来回流动。

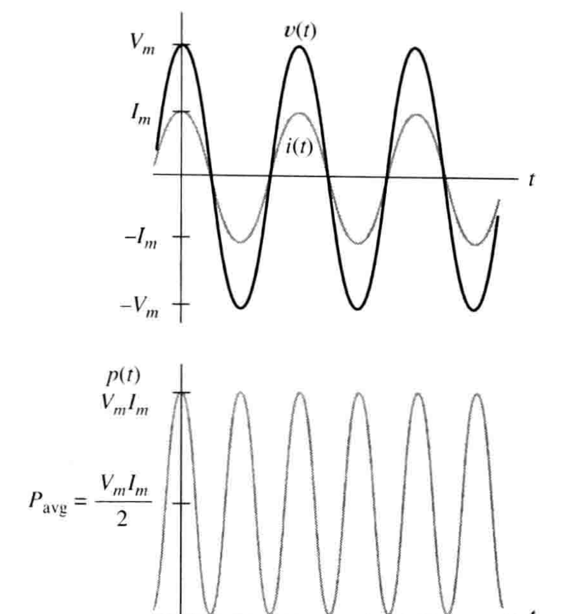
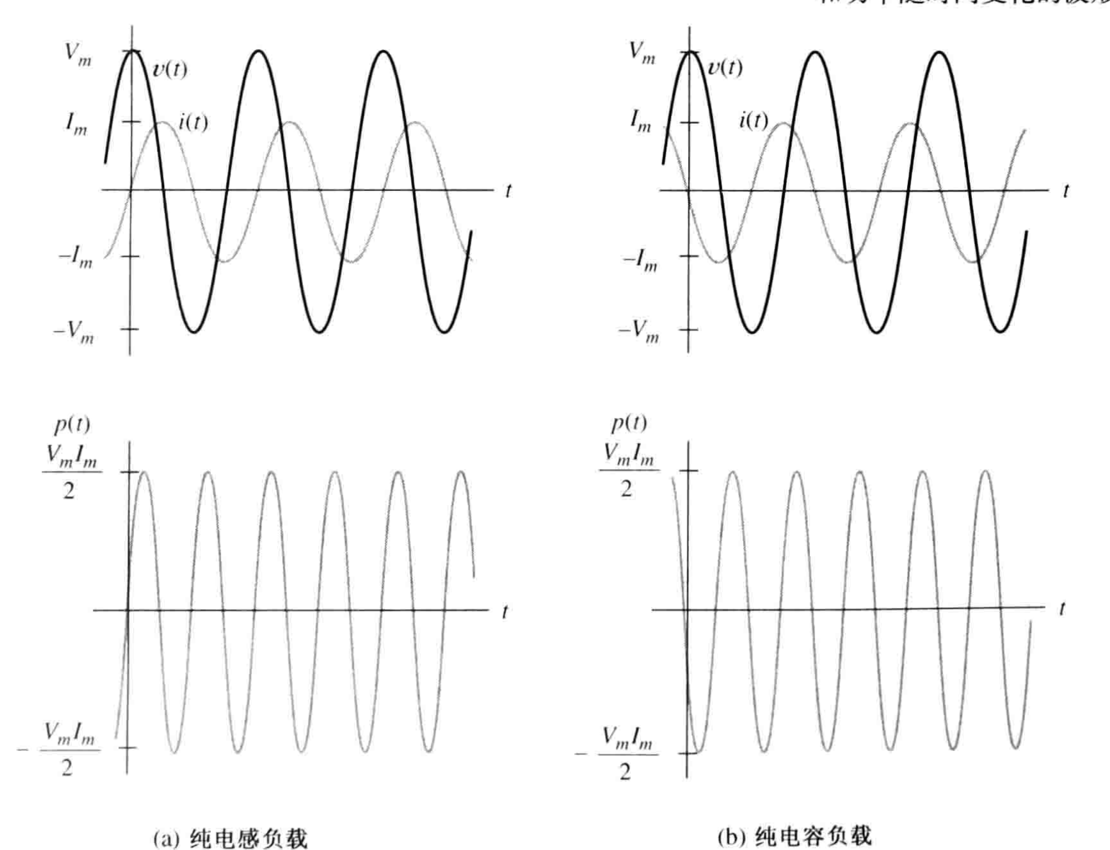


图 5.21　纯电阻负载的电流、电压和功率随时间变化的波形



(a) 纯电感负载　　(b) 纯电容负载

图 5.22　储能元件的电流、电压和功率随时间变化的波形

5.5.3 电容负载的电流、电压和功率

分析已知负载为纯电容的情形，其阻抗 $Z = (1/\omega C) \angle -90°$。由 $\theta = -90°$，有

$$v(t) = V_m \cos(\omega t)$$
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + 90°) = -I_m \sin(\omega t)$$
$$p(t) = v(t)i(t) = -V_m I_m \cos(\omega t)\sin(\omega t)$$
$$= -\frac{V_m I_m}{2}\sin(2\omega t)$$

这些电量的波形如图5.22(b)所示。同样，电容的平均功率也为零，即无功功率在电源与负载之间来回流动。注意：电容功率的极性正好与电感的相反。因此，约定电感的无功功率为正，电容的无功功率为负。如果负载中既有电感又有电容，而且无功功率的大小相等，那么总的无功功率则被相互抵消。

5.5.4 无功功率的重要性

虽然储能元件(电感或电容)不消耗平均功率，电气工程师仍然在关注无功功率，这是因为传输线、变压器、熔断器以及其他元件都要承受与无功功率相关的大电流。如果负载中包含有储能元件，即使负载不消耗无功功率，但是导线中的大电流也会要求提高导线的额定值或选用高质量的导线。因此，供电公司对工业用户既要对总电量收取费用，同时对无功功率也要收取一定费用(较低的比例)。

5.5.5 一般负载功率的计算

现在来计算一般 *RLC* 负载的电压、电流和功率，负载的相位 θ 可以为 ±90°之间的任何值，有

$$v(t) = V_m \cos(\omega t) \tag{5.54}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - \theta) \tag{5.55}$$

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t)\cos(\omega t - \theta) \tag{5.56}$$

应用如下的三角等式：

$$\cos(\omega t - \theta) = \cos(\theta)\cos(\omega t) + \sin(\theta)\sin(\omega t)$$

则式(5.56)可转换为

$$p(t) = V_m I_m \cos(\theta)\cos^2(\omega t) + V_m I_m \sin(\theta)\cos(\omega t)\sin(\omega t) \tag{5.57}$$

再运用等式

$$\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega t)$$

和

$$\cos(\omega t)\sin(\omega t) = \frac{1}{2}\sin(2\omega t)$$

则式(5.57)可写为

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta)[1 + \cos(2\omega t)] + \frac{V_m I_m}{2}\sin(\theta)\sin(2\omega t) \tag{5.58}$$

注意：含有 $\cos(2\omega t)$ 和 $\sin(2\omega t)$ 两部分的平均值为零，因此，平均功率为

$$P = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta) \tag{5.59}$$

再应用关系式 $V_{rms} = V_m/\sqrt{2}$ 和 $I_{rms} = I_m/\sqrt{2}$，则平均功率的表达式为

$$P = V_{rms} I_{rms}\cos(\theta) \tag{5.60}$$

功率的单位为瓦特(W)。

5.5.6 功率因数

$\cos(\theta)$称为功率因数(Power Factor, PF):

$$PF = \cos(\theta) \tag{5.61}$$

为了简化分析过程，假设电压的相位为零。通常电压的相位有可能是非零数值，则 θ 为电压相位 θ_v 与电流相位 θ_i 之差，或

$$\theta = \theta_v - \theta_i \tag{5.62}$$

有时，θ 也称为功率角。

通常将功率因数用百分数表示，并且应说明电流是超前(电容性负载)还是滞后(电感性负载)电压。功率因数的典型值是滞后 90%，意味着 $\cos(\theta) = 0.9$，且电流相位滞后于电压。

5.5.7 无功功率

在交流电路中，能量不断从储能元件(电感和电容)中流进和流出。例如，当电容电压的幅值增加时，电容吸收能量；当电压幅值减小时，电容释放能量。类似地，当电流幅值增加时，电流就流入电感。虽然瞬时功率很大，但是一个理想电容或理想电感每个周期吸收的能量为零。

当一个电容和电感并联(或串联)时，能量从一个元件流入的同时又从另一个元件流出。因此，在每个时刻电容的能量趋于与电感的能量相互抵消。

无功功率的大小定义为一般负载中储能元件瞬时功率的峰值，由式(5.58)，有

$$Q = V_{rms} I_{rms} \sin(\theta) \tag{5.63}$$

其中，θ 为由式(5.62)给出的功率角，V_{rms} 为负载电压的有效值(或均方根值)，I_{rms} 为负载电流的有效值(或均方根值)。(注意到，对于纯电阻负载，其 $\theta = 0$ 和 $Q = 0$。)

无功功率的量纲也是瓦特。然而，为了强调 Q 并不代表为电路提供的有效能量，其单位通常为电抗性伏安(VAR，乏)。

5.5.8 视在功率

这里还有一种电量称为视在功率，定义为电压有效值和电流有效值的乘积，即

$$\text{视在功率} = V_{rms} I_{rms}$$

其单位为伏安(VA)。

由式(5.60)和式(5.63)可得

$$P^2 + Q^2 = (V_{rms} I_{rms})^2 \cos^2(\theta) + (V_{rms} I_{rms})^2 \sin^2(\theta)$$

由 $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$，得

$$P^2 + Q^2 = (V_{rms} I_{rms})^2 \tag{5.64}$$

5.5.9 单位

通常，这几个电量的单位可以决定它们是否是功率(W)、无功功率(VAR)或视在功率(VA)。例如，如果我们说一个 5 kW 的负载，意味着 $P = 5$ kW。另一方面，如果我们有一个 5 kVA的负载，则表示 $V_{rms} I_{rms} = 5$ kVA。如果我们说一个负载吸收了 5 kVAR，则 $Q = 5$ kVAR。

5.5.10　功率三角形

有功功率 P、无功功率 Q、视在功率 $V_{rms}I_{rms}$ 和功率角 θ 之间的关系可由功率三角形来表示。图 5.23(a)所示为电感性负载的功率三角形，其中 θ 和 Q 为正；图 5.23(b)所示为电容性负载的功率三角形，其中 θ 和 Q 为负。

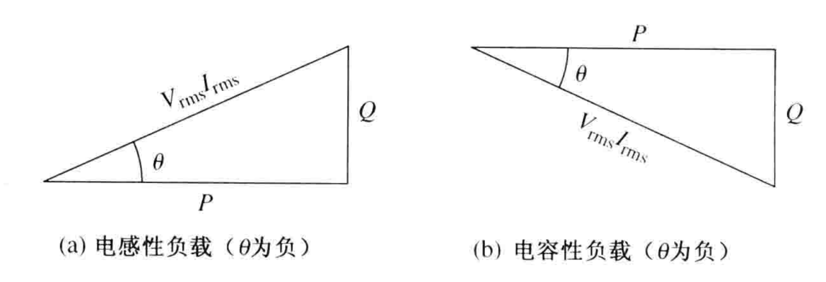


图 5.23　电感性和电容性负载的功率三角形

5.5.11　其他功率关系

对于阻抗 Z：

$$Z = |Z| \angle\theta = R + \mathrm{j}X$$

其中，R 为负载的电阻，X 为电抗，关系如图 5.24 所示，可得

$$\cos(\theta) = \frac{R}{|Z|} \tag{5.65}$$

和

$$\sin(\theta) = \frac{X}{|Z|} \tag{5.66}$$

将式(5.65)代入式(5.59)，得

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \times \frac{R}{|Z|} \tag{5.67}$$

然而，由式(5.53)有 $I_m = V_m/Z$，代入上式

$$P = \frac{I_m^2}{2}R \tag{5.68}$$

再根据 $I_{rms} = I_m/\sqrt{2}$，因此有功功率为



$$P = I_{\mathrm{rms}}^2 R \tag{5.69}$$

图 5.24　复平面上负载阻抗的表示

同理，可得出无功功率的类似结果

$$Q = I_{\mathrm{rms}}^2 X \tag{5.70}$$

在应用式(5.70)时保留了 X 的极性符号。对于电感性负载，X 为正，然而对于电容性负载，X 为负。

在 5.1 节中已知电阻的平均功率为

$$P = \frac{V_{R\mathrm{rms}}^2}{R} \tag{5.71}$$

其中，$V_{R\mathrm{rms}}$ 为电阻电压的有效值。(注意：在图 5.20 中，电源电压没有直接加在电阻上，因为有一个电抗与该电阻串联。)

类似地，我们有

$$Q = \frac{V_{X\text{rms}}^2}{X} \tag{5.72}$$

其中，$V_{X\text{rms}}$ 为电抗电压的有效值。同样，电感性负载 X 的极性为正，电容性负载的 X 极性为负。

5.5.12　复功率

已知图 5.25 所示为某电路的一部分电路。复功率(用 **S** 表示)定义为电压相量 **V** 与电流相量 $\mathbf{I}^*$ 乘积的一半，即

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{VI}^* \tag{5.73}$$

相量 $\mathbf{V} = V_m\angle\theta_v$，$V_m$ 是电压相量的幅值，θ_v 是电压的相位角。此外，相量 $\mathbf{I} = I_m\angle\theta_i$，$I_m$ 是电流幅值，θ_i 是电流的相位角，代入式(5.73)，可得

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{VI}^* = \frac{1}{2}(V_m\angle\theta_v) \times (I_m\angle-\theta_i) = \frac{V_m I_m}{2}\angle\theta_v - \theta_i = \frac{V_m I_m}{2}\angle\theta \tag{5.74}$$

这里，θ 表示功率因数角，把式(5.74)最右边部分写成实部与虚部的形式，则有

$$\mathbf{S} = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta) + \mathrm{j}\frac{V_m I_m}{2}\sin(\theta)$$

上式中，实部表示电路的平均功率，虚部表示无功功率，因此有

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{VI}^* = P + \mathrm{j}Q \tag{5.75}$$

$\mathbf{I} = I_m\angle\theta_i$　+　$\mathbf{V} = V_m\angle\theta_v$　−

图 5.25　该电路元件的复功率为 $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{VI}^*$

这样，知道了复功率，就知道了平均功率、无功功率以及视在功率：

$$P = \mathrm{Re}(\mathbf{S}) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\mathbf{VI}^*\right) \tag{5.76}$$

$$Q = \mathrm{Im}(\mathbf{S}) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2}\mathbf{VI}^*\right) \tag{5.77}$$

$$\text{视在功率} = |\mathbf{S}| = \left|\frac{1}{2}\mathbf{VI}^*\right| \tag{5.78}$$

Re(**S**) 表示 **S** 的实部，Im(**S**) 表示 **S** 的虚部。

例 5.7　交流电路功率计算。

计算例 5.5(a)所示电路从电源获得的有功功率和无功功率，并计算每个元件的有功功率和无功功率。为了方便起见，例 5.5 的电路和待计算的电流已显示在图 5.26 中。

解：为了获得电源发出的有功功率和无功功率，首先，由式(5.62)确定功率角：

$$\theta = \theta_v - \theta_i$$

电源电压的相位为 $\theta_v = -90°$，电源提供电流的相位为 $\theta_i = -135°$。因此有

$$\theta = -90° - (-135°) = 45°$$

电源电压和电流的有效值为

$$V_{s\text{rms}} = \frac{|\mathbf{V}_s|}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7.071\ \text{V}$$

$$I_{\text{rms}} = \frac{|\mathbf{I}|}{\sqrt{2}} = \frac{0.1414}{\sqrt{2}} = 0.1\ \text{A}$$

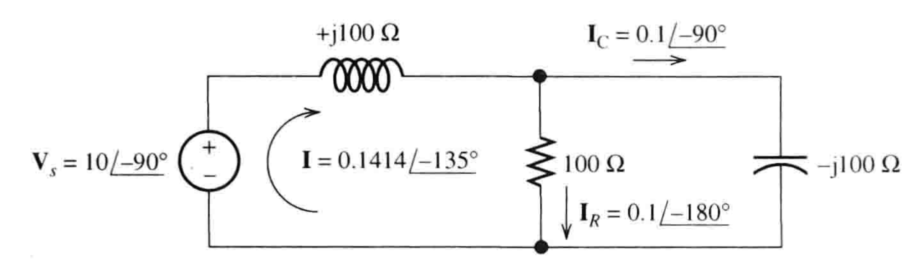


图 5.26 例 5.7 的电路和电流

现在，应用式(5.60)和式(5.63)计算电源发出的有功功率和无功功率：

$$\begin{aligned} P &= V_{s\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta) \\ &= 7.071 \times 0.1 \cos(45^\circ) = 0.5\ \text{W} \\ Q &= V_{s\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(\theta) \\ &= 7.071 \times 0.1 \sin(45^\circ) = 0.5\ \text{VAR} \end{aligned}$$

另一种非传统的更简捷的方法是先求复功率，然后取复功率的虚部和实部，求得 P 和 Q：

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{V}_s\mathbf{I}^* = \frac{1}{2}(10\ \angle{-90^\circ})(0.1414\ \angle{135^\circ}) = 0.707\ \angle{45^\circ} = 0.5 + \text{j}0.5$$

$$P = \text{Re}(\mathbf{S}) = 0.5\ \text{W}$$

$$Q = \text{Im}(\mathbf{S}) = 0.5\ \text{VAR}$$

应用式(5.70)计算电感的无功功率，可得

$$Q_L = I_{\text{rms}}^2 X_L = (0.1)^2(100) = 1.0\ \text{VAR}$$

对于电容，有

$$Q_C = I_{C\text{rms}}^2 X_C = \left(\frac{0.1}{\sqrt{2}}\right)^2(-100) = -0.5\ \text{VAR}$$

注意：这里是用电容电流的有效值进行计算，而且电容电抗 X_C 为负，可见，电容的无功功率为负，电阻的无功功率为零。为了验证计算结果是否正确，可以判断电源发出的无功功率是否等于电感和电容吸收的无功功率之和，即看下式是否成立：

$$Q = Q_L + Q_C$$

电阻上的有功功率为

$$\begin{aligned} P_R = I_{R\text{rms}}^2 R &= \left(\frac{|\mathbf{I}_R|}{\sqrt{2}}\right)^2 R = \left(\frac{0.1}{\sqrt{2}}\right)^2 100 \\ &= 0.5\ \text{W} \end{aligned}$$

电容和电感吸收的有功功率为

$$P_L = 0$$

$$P_C = 0$$

因此，电源发出的有功功率全部被电阻吸收。

在电力供电系统中，功率典型值都非常大，而不像上述算例中数值较小的功率。例如，一个大型电站的功率可能为 1000 MW，工厂中一个 100 马力的电动机在满载情况下吸收的功率大约为 85 kW。

民用电的典型功率峰值在10～40 kW之间。一个家庭(通常仅两个人，也不用电取暖设备)的平均功率大约为600 W。记住家用电器的平均功率损耗和各种用电设备的功率是有用的，这样可以使你有意识地关掉不需要的电灯和计算机等用电设备，以建立节约和环保的意识。

例5.8　功率三角形的应用。

如图5.27所示，电路由一个电压源向两个并联负载供电。试求电源的有功功率、无功功率和功率角，以及电流相量**I**。

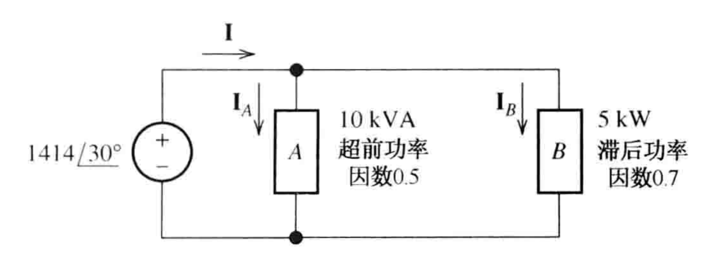


图5.27　例5.8的电路

解：由电路图可知，负载A的视在功率为10 kVA，另一方面，负载B的有功功率为5kW。

同时，负载A的功率因数为超前0.5，意味着电流相位超前于电压，或者说负载A是电容性的。类似地，负载B的功率因数为滞后0.7(电感性)。

首先，求出每个负载的有功功率和无功功率。接着，将这些数值相加以获得电源的有功功率和无功功率。最后，计算功率因数和待求的电流。

由于负载A为超前(电容性)功率因数，则有无功功率Q_A和功率角θ_A都为负。负载A的功率三角形如图5.28(a)所示，其功率因数为

$$\cos(\theta_A) = 0.5$$

有功功率为

$$P_A = V_{\text{rms}} I_{A\text{rms}} \cos(\theta_A) = 10^4(0.5) = 5\text{ kW}$$

根据式(5.64)可求得无功功率为

$$\begin{aligned} Q_A &= \sqrt{(V_{\text{rms}} I_{A\text{rms}})^2 - P_A^2} \\ &= \sqrt{(10^4)^2 - (5000)^2} \\ &= -8.660\text{ kVAR} \end{aligned}$$

注意：直接取Q_A为负值，因为电容性(超前)负载的无功功率为负。

负载A的功率三角形如图5.27(b)所示。由于负载B为滞后(电感性)功率因数，则有无功功率Q_B和功率角θ_B都为正。因此，

$$\theta_B = \arccos(0.7) = 45.57°$$

根据三角公式，可得

$$Q_B = P_B \tan(\theta_B) = 5000\tan(45.57°)$$
$$Q_B = 5.101\text{ kVAR}$$

至此，可求得电源发出的有功功率和无功功率为

$$P = P_A + P_B = 5 + 5 = 10\text{ kW}$$
$$Q = Q_A + Q_B = -8.660 + 5.101 = -3.559\text{ kVAR}$$

因为Q为负，则功率角也为负，因此有

$$\theta = \arctan\left(\frac{Q}{P}\right) = \arctan\left(\frac{-3.559}{10}\right) = -19.59°$$

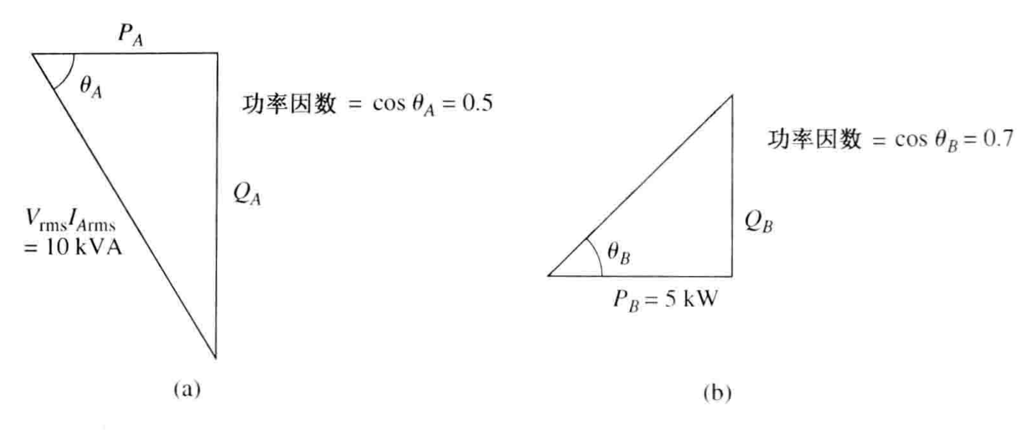


图 5.28 例 5.8 负载 A 和 B 的功率三角形

同时，可求得功率因数为

$$\cos(\theta) = 0.9421$$

电气工程师经常用百分数表示功率因数，因此该电路的功率因数为超前 94.21%。

电源发出的复功率为

$$\mathbf{S} = P + \mathrm{j}Q = 10 - \mathrm{j}3.559 = 10.61 \angle -19.59^\circ \text{ kVA}$$

得

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{V}_s\mathbf{I}^* = \frac{1}{2}(1414 \angle 30^\circ)\mathbf{I}^* = 10.61 \times 10^3 \angle -19.59^\circ \text{ kVA}$$

解得电流相量为

$$\mathbf{I} = 15.0 \angle 49.59^\circ \text{ A}$$

电压和电流的相量图如图 5.29 所示。注意：该电路中电流相位超前于电压。

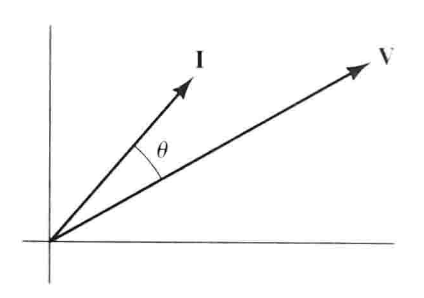


图 5.29 例 5.8 的相量图

5.5.13 功率因数校正

我们已知在平均功率为零的情况下会有大电流流过储能元件(电感和电容)。在重工业系统中，许多负载都是呈电感性的，有大量的无功能量来回流动。这些无功功率将会在输电系统中产生更高的电流，这样使得输电线和变压器相比同一平均功率的纯电阻(100%的功率因数)负载具有更高的额定值。

对企业收取的电费取决于功率因数的大小，功率因数越低，则需要更高的费用支付电能(对于民用电则不考虑功率因数)，所以选择负载使功率因数接近 1 是有利的，通常的方法是采用补偿电容器与电感性负载并联以提高功率因数。

例 5.9 功率因数校正。

一个 50 kW 负载的功率因数为滞后 60%，供电电源的频率为 60 Hz，电压有效值为 10 kV。试求将功率因数提高到滞后 90% 应并联电容量的大小。

解：首先，计算功率角：

$$\theta_L = \arccos(0.6) = 53.13^\circ$$

接着，根据功率三角形求得负载的无功功率：

$$Q_L = P_L\tan(\theta_L) = 66.67 \text{ kVAR}$$

并联电容后，有功功率仍为 50 kW，而功率角变为

$$\theta_{new} = \arccos(0.9) = 25.84°$$

新的无功功率为

$$Q_{new} = P_L \tan(\theta_{new}) = 24.22 \text{ kVAR}$$

因此，电容的无功功率必然为

$$Q_C = Q_{new} - Q_L = -42.45 \text{ kVAR}$$

则电容器的电抗值为

$$X_C = -\frac{V_{rms}^2}{Q_C} = -\frac{(10^4)^2}{42\,450} = -2356\ \Omega$$

由于角频率为

$$\omega = 2\pi 60 = 377.0$$

因此，应并联电容的大小为

$$C = \frac{1}{\omega |X_C|} = \frac{1}{377 \times 2356} = 1.126\ \mu\text{F}$$

练习 5.12　(a)电压源 $\mathbf{V} = 707.1\angle 40°$ 向功率因数为 100% 的 5 kW 负载供电。试求无功功率和电流相量。(b)如果负载功率因数变为滞后 20%，再重复上一问的要求。(c)对于连接电源与负载的导线，哪种功率因数要求更高的额定电流？哪种情况更节省导线费用？

答案：(a)$Q = 0$，$\mathbf{I} = 14.14\angle 40°$；(b)$Q = 24.49$kVAR，$\mathbf{I} = 70.7\angle -38.46°$。(c)(b)中导线的额定电流为(a)中导线的 5 倍。很明显，功率因数为 100% 时更节省导线。

练习 5.13　有效值为 1 kV、频率为 60 Hz 的电压源向两个并联负载供电。第一个负载为 10 μF的电容器，第二个负载的视在功率为 10 kVA、功率因数为滞后性 80%。试求总的有功功率和无功功率，以及电源的功率因数和电流的有效值。

答案：$P = 8$ kW，$Q = 2.23$ kVAR，PF = 96.33% 滞后，$I_{rms} = 8.305$ A。

5.6 戴维南和诺顿等效电路

5.6.1 戴维南等效电路

第 2 章已经讲到，由电源和电阻构成的二端网络的戴维南等效电路由一个电压源和一个电阻串联构成，可以将这种等效方法应用到由多个正弦电源(所有电源的频率一样)、电阻、电感和电容构成的电路中。正弦交流电路的戴维南等效电路由一个电压源相量和一个复阻抗串联构成，其等效电路如图 5.31 所示。已知相量和复阻抗仅适用于正弦稳态分析，因此正弦交流电路的戴维南等效电路也仅对稳态分析是有效的。

在电阻电路中，戴维南电压等于二端网络的开路电压。在交流电路中应用相量分析法，则戴维南电压为

$$\mathbf{V}_t = \mathbf{V}_{oc} \tag{5.79}$$

将所有独立源置零，然后从两个端子看进去的等效阻抗即为戴维南阻抗 Z_t。回顾一下以前所学，对电压源置零时，应用短路代替；对电流源置零时，应用开路代替。但是要记住，不能对受控源置零。

计算戴维南阻抗的另一种方法是先计算出短路电流相量 $\mathbf{I}_{sc}$ 和开路电压相量 $\mathbf{V}_{oc}$，则戴维南阻抗由下式给出：

$$Z_t = \frac{\mathbf{V}_{oc}}{\mathbf{I}_{sc}} = \frac{\mathbf{V}_t}{\mathbf{I}_{sc}} \tag{5.80}$$

因此，除了采用相量和复阻抗之外，交流稳态戴维南等效电路的概念和分析方法与电阻电路相同。

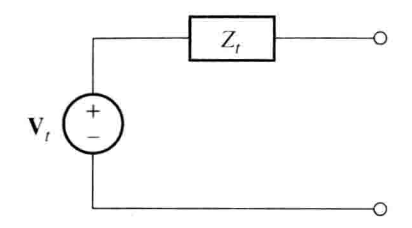


图 5.30 交流电路的戴维南等效电路由一个电压源相量 $\mathbf{V}_t$ 和一个复阻抗 Z_t 串联构成

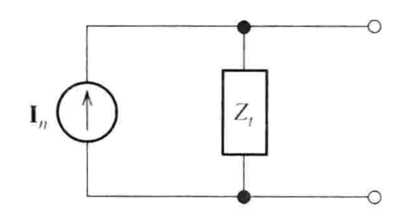


图 5.31 交流电路的诺顿等效电路由一个电流源相量 $\mathbf{I}_n$ 和一个复阻抗 Z_t 并联构成

5.6.2 诺顿等效电路

二端交流稳态电路的另一种等效电路是诺顿等效电路，如图 5.32 所示，由一个电流源相量 $\mathbf{I}_n$ 和戴维南阻抗并联构成。诺顿电流等于原电路的短路电流：

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_{sc} \tag{5.81}$$

例 5.10 戴维南和诺顿等效电路。

试求图 5.32(a)所示电路的戴维南和诺顿等效电路。

解： 首先计算 3 个电量 $\mathbf{V}_{oc}$、$\mathbf{I}_{sc}$ 或 Z_t 中的任何两个。通常选取工作量最小的两个电量进行计算。这样，首先对独立电源置零求得 Z_t，然后再计算短路电流。

将独立电源置零后获得的电路如图 5.32(b)所示。从 a、b 端看进去的阻抗为戴维南阻抗，为电阻和电容阻抗的并联等效结果。

因此，有

$$\begin{aligned} Z_t &= \frac{1}{1/100 + 1/(-\mathrm{j}100)} \\ &= \frac{1}{0.01 + \mathrm{j}0.01} \\ &= \frac{1}{0.01414 \angle 45^\circ} \\ &= 70.71 \angle -45^\circ \\ &= 50 - \mathrm{j}50\,\Omega \end{aligned}$$

现在，将 a、b 端短路以获得其短路电流，电路如图 5.32(c)所示。当 a、b 端短路时，电容两端的电压为零，所以 $\mathbf{I}_C = 0$。电源电压 $\mathbf{V}_s$ 正好加在电阻两端，可得

$$\mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{V}_s}{100} = \frac{100}{100} = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$$

再根据 KCL：

$$\mathbf{I}_{sc} = \mathbf{I}_R - \mathbf{I}_s = 1 - 1 \angle 90^\circ = 1 - \mathrm{j} = 1.414 \angle -45^\circ \text{ A}$$

根据式(5.74)求得戴维南电压：

$$\mathbf{V}_t = \mathbf{I}_{sc} Z_t = 1.414 \angle -45^\circ \times 70.71 \angle -45^\circ = 100 \angle -90^\circ \text{ V}$$

最后，戴维南和诺顿等效电路如图 5.33 所示。

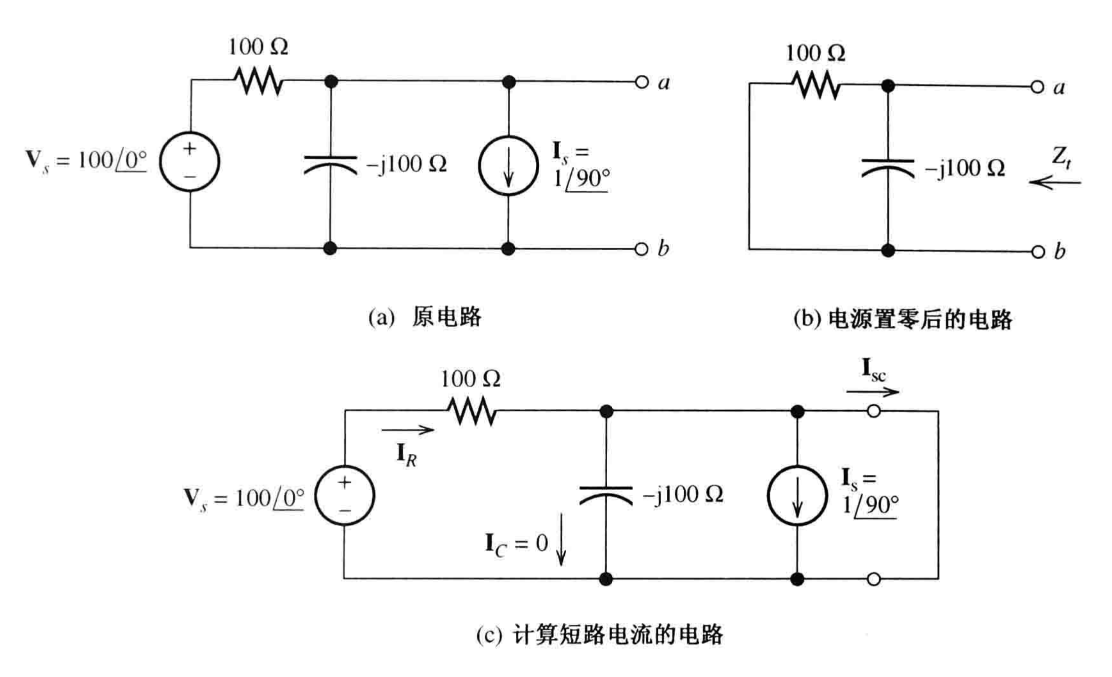


图 5.32　例 5.10 的电路

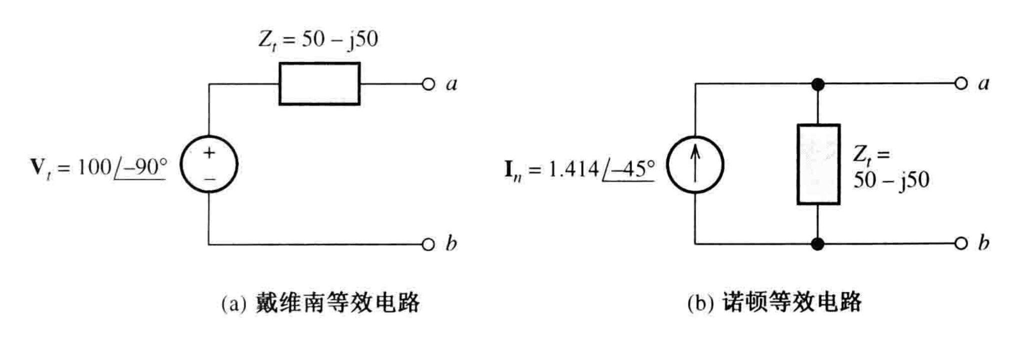


图 5.33　图 5.32(a)所示电路的戴维南和诺顿等效电路

5.6.3　最大功率传输

有时我们需要调节负载阻抗以从二端电路获得最大平均功率。电路如图 5.34(a)所示，其中，二端电路用戴维南等效电路来表示。显然，负载获得的功率取决于负载的阻抗。当负载短路时，其功率为零，这是因为负载两端的电压为零。同理，当负载开路时，其电流为零，所以负载获得的功率也为零。再有，纯电抗负载(电感或电容)获得的功率也为零，因为负载的功率因数为零。

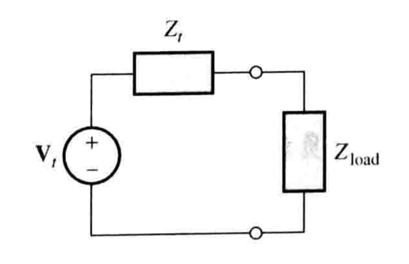


图 5.34　二端电路的戴维南等效电路向负载阻抗供电

接下来讨论两种有意义的情形。第一，假设负载阻抗为任何复数，则当负载阻抗为戴维南阻抗的复共轭时，负载获得最大功率：

$$Z_{load} = Z_t^*$$

现在来证明该结论的正确性。假设二端电路的戴维南阻抗为

$$Z_t = R_t + jX_t$$

那么，最大功率传输时的负载阻抗为

$$Z_{load} = Z_t^* = R_t - jX_t$$

显然，与戴维南电源相连接的总阻抗等于戴维南阻抗与负载阻抗相加：

$$\begin{aligned} Z_{\text{total}} &= Z_t + Z_{\text{load}} \\ &= R_t + \text{j}X_t + R_t - \text{j}X_t \\ &= 2R_t \end{aligned}$$

因此，负载电抗与二端网络的内电抗相互抵消了。对于给定的负载电阻，当获得最大功率时，电流也达到最大。在电阻一定的情况下，选择恰当的电抗使总阻抗的模最小，使电流达到最大值。显然，在电阻保持不变的情况下，只有总电抗为零才使得阻抗模最小。

由于总电抗为零，原电路变为了电阻电路。根据第 2 章所学过的电阻电路分析方法，只有当 $R_{\text{load}} = R_t$ 时，才发生最大功率传输。

第二，假设负载只能为纯电阻。在这种情形下，要使负载功率获得最大值，应使负载电阻等于戴维南阻抗的模：

$$Z_{\text{load}} = R_{\text{load}} = |Z_t|$$

例 5.11 最大功率传输。

在图 5.32(a) 所示的二端电路中，试分别计算以下两种情形下负载获得的最大功率：(a) 负载可取任何复数值；(b) 负载只能为纯电阻。

解： 在例 5.10 中已经获得了该电路的戴维南等效电路，如图 5.33(a) 所示，其戴维南阻抗为

$$Z_t = 50 - \text{j}50\ \Omega$$

(a) 当负载获得最大功率时，负载的复阻抗为

$$Z_{\text{load}} = Z_t^* = 50 + \text{j}50$$

图 5.35(a) 所示为戴维南等效电路接入该负载的电路，负载电流为

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_a &= \frac{\mathbf{V}_t}{Z_t + Z_{\text{load}}} \\ &= \frac{100\ \angle -90^\circ}{50 - \text{j}50 + 50 + \text{j}50} \\ &= 1\ \angle -90^\circ\ \text{A} \end{aligned}$$

负载电流的有效值为 $I_{\text{arms}} = 1/\sqrt{2}$。可得负载的功率为

$$P = I_{\text{arms}}^2 R_{\text{load}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (50) = 25\ \text{W}$$

(b) 负载获得最大功率时的纯电阻值为

$$\begin{aligned} R_{\text{load}} &= |Z_t| \\ &= |50 - \text{j}50| \\ &= \sqrt{50^2 + (-50)^2} \\ &= 70.71\ \Omega \end{aligned}$$

图 5.35(b) 所示为戴维南等效电路接入纯电阻负载的电路，负载电流为

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_b &= \frac{\mathbf{V}_t}{Z_t + Z_{\text{load}}} \\ &= \frac{100\ \angle -90^\circ}{50 - \text{j}50 + 70.71} \\ &= \frac{100\ \angle -90^\circ}{130.66\ \angle -22.50^\circ} \\ &= 0.7654\ \angle -67.50^\circ\ \text{A} \end{aligned}$$

此时负载的功率为

$$\begin{aligned} P &= I_{b\mathrm{rms}}^2 R_{\mathrm{load}} \\ &= \left(\frac{0.7653}{\sqrt{2}}\right)^2 70.71 \\ &= 20.71\ \mathrm{W} \end{aligned}$$

注意：纯电阻负载获得的功率小于复阻抗负载获得的功率。

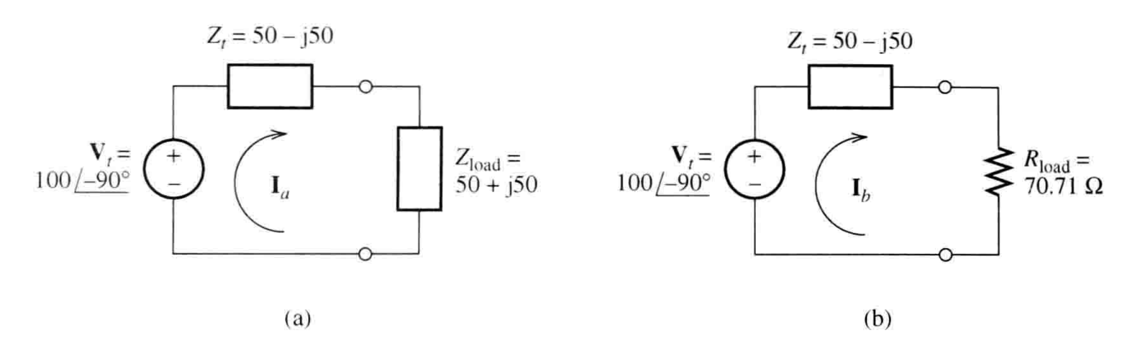


图 5.35　例 5.11 的戴维南等效电路和负载

练习 5.14　试求图 5.36(a)所示电路的戴维南等效阻抗、戴维南等效电压和诺顿电流。

答案： $Z_t = 100 + j25\Omega$，$\mathbf{V}_t = 70.71\angle -45°$，$\mathbf{I}_n = 0.686\angle -59.0°$。

练习 5.15　在图 5.36 所示的二端电路中，试分别计算以下两种情形负载获得的最大功率：(a)负载可取任何复数值；(b)负载只能为纯电阻。

答案： (a) 6.25 W；(b) 6.16 W。

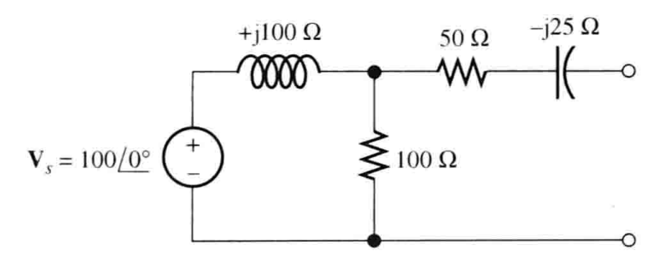


图 5.36　练习 5.14 和练习 5.15 的电路

5.7　三相对称电路

在电能生产和输配电系统中，采用不同相位的多个电源会明显体现多相输电的优越性。现在已知一种最普遍的情况为 3 个大小相等、相位互差 120°的交流电源，这就是三相对称电源，图 5.37(a)所示为三相电源电路的实例。[回顾一下电压的双下标表示方法，其中第一个下标为参考极性的正极。因此，$v_{an}(t)$为节点 a 与节点 n 之间的电压，节点 a 为参考极性的正极。]在第 17 章将介绍三相电压是怎样产生的。

图 5.37(a)中的三相电源称为 Y 连接。本章还将介绍三相电源的另一种连接方式，即 Δ 连接。

图 5.37(b)中 3 个电压的表达式分别为

$$v_{an}(t) = V_Y \cos(\omega t) \tag{5.82}$$

$$v_{bn}(t) = V_Y \cos(\omega t - 120°) \tag{5.83}$$

$$v_{cn}(t)=V_Y\cos(\omega t+120°) \tag{5.84}$$

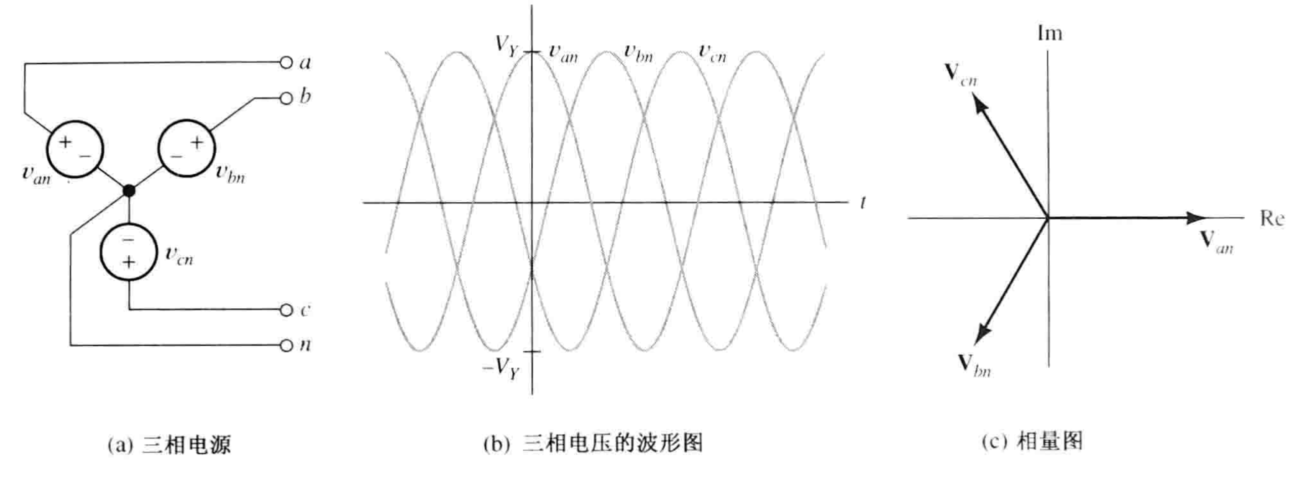
其中，V_Y为三相 Y 连接中每个电源的幅值。每个电压对应的相量为

$$\mathbf{V}_{an}=V_Y\ \angle 0° \tag{5.85}$$

$$\mathbf{V}_{bn}=V_Y\ \angle -120° \tag{5.86}$$

$$\mathbf{V}_{cn}=V_Y\ \angle 120° \tag{5.87}$$

图 5.37(c)为它们的相量图。



(a) 三相电源　　(b) 三相电压的波形图　　(c) 相量图

图 5.37　一种三相对称电压源

5.7.1　相序

一组三相电压若依次按照 $a-b-c$ 的顺序达到最大值，则称为正相序。从图 5.37(c)可知，v_{an}超前 v_{bn}，然后 v_{bn}超前 v_{cn}(回忆本章以前学过的内容，在判断相位关系时令相量逆时针旋转)。如果将 b、c 相交换，此时相序为负，即按照 $a-c-b$ 的顺序达到最大值。

相序对于三相电路的分析和研究是非常重要的。例如，对于三相电动机，两种不同的相序对应于电动机不同的转向。为了改变电动机的转向，只需要交换 b、c 两相即可(三相电动机是一种在工业生产中非常普遍的设备，可知该方法是很有用的)。对于两种相序而言，其分析方法都是类似的，因此，在后面的内容中如果没有事先交待，分析的三相电路的相序都为正。

5.7.2　Y-Y 连接

图 5.38 所示为三相电源与三相对称负载相连接的电路。其中，导线 $a-A$、$b-B$ 和 $c-C$ 称为相线，导线 $n-N$ 称为中线。这种连接方式称为有中线的 Y-Y 连接。所谓对称负载是指每相负载的复阻抗相等(本书只研究对称负载的情况)。

还有其他几种有用的连接方式。例如，中线 $n-N$ 被去掉的情况，以及电源和负载连接为 Δ 形。几种连接方式中电流、电压和功率都可以通过等效为 Y-Y 的电路结构来计算。因此，三相电路分析的关键在于分析 Y-Y 连接的电路结构。

“相”是指相应的电源或负载，因此，A 相电源为 $v_{an}(t)$，A 相负载为连接在 A 点与 N 点之间的复阻抗。称 V_Y为相电压或 Y 形连接的电源中相线与中线之间的电压(电气工程师通常是用有效值而不是峰值来表示相电压。除非另有说明，相量大小都等于正弦量的峰值而不是其有效值)。另外，$\mathbf{I}_{aA}$、$\mathbf{I}_{bB}$和 $\mathbf{I}_{cC}$称为线电流(回顾一下电流的双下标表示方法，其参考方向是从第一个下标指向第二个下标，即电流 $\mathbf{I}_{aA}$的参考方向是从节点 a 指向节点 A，如图 5.38 所示)。

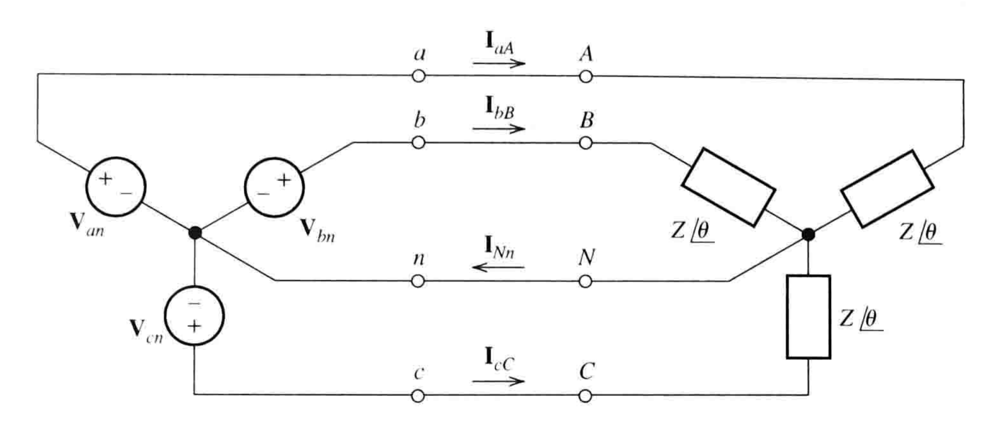


图 5.38 有中线的三相 Y-Y 连接

A 相负载的电流为

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{Z \angle\theta} = \frac{V_Y \angle 0^\circ}{Z \angle\theta} = I_L \angle -\theta$$

其中，$I_L = V_Y/Z$ 为线电流的幅值。负载是对称的，因此，所有线电流除了相位以外都是相同的，因此，各个线电流的表达式为

$$i_{aA}(t) = I_L \cos(\omega t - \theta) \tag{5.88}$$

$$i_{bB}(t) = I_L \cos(\omega t - 120^\circ - \theta) \tag{5.89}$$

$$i_{cC}(t) = I_L \cos(\omega t + 120^\circ - \theta) \tag{5.90}$$

在图 5.38 中的中线电流为

$$i_{Nn}(t) = i_{aA}(t) + i_{bB}(t) + i_{cC}(t)$$

其相量式为

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{Nn} &= \mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{cC} \\
&= I_L \angle -\theta + I_L \angle -120^\circ - \theta + I_L \angle 120^\circ - \theta \\
&= I_L \angle -\theta \times (1 + 1 \angle -120^\circ + 1 \angle 120^\circ) \\
&= I_L \angle -\theta \times (1 - 0.5 - \mathrm{j}0.866 - 0.5 + \mathrm{j}0.866) \\
&= 0
\end{aligned}$$

因此，三个大小相等、相位互差 120°的相量之和为零。

可见，在三相对称电路中中线电流为零。因此，如果去掉中线也不会对任何电压或电流造成影响，那么可以只用 3 根导线实现三相电源对三相负载供电。

三相系统与单相系统相比其中一个重要的优越性在于所用的输电导线更少。如图 5.39 所示，如果将 3 个单相电源分别对 3 个负载供电则需要 6 根导线，如果采用三相系统对相同的负载供电仅需 3 根导线（加上中线才 4 根导线）。

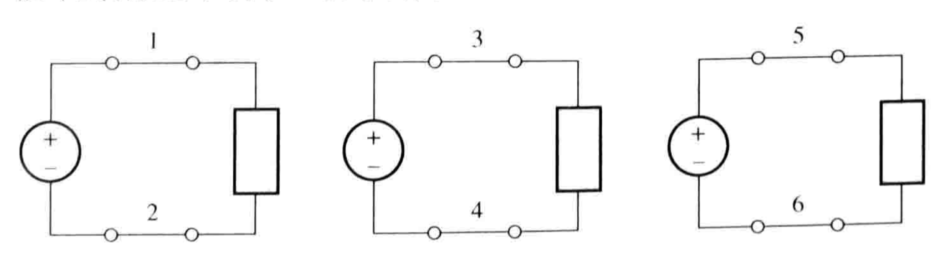


图 5.39 3 个单相电源对 3 个负载供电需要 6 根导线。如果采用三相系统对相同的负载供电仅需 3 根导线

5.7.3 三相功率

与单相系统相比，三相系统的另外一个优越性是总功率是常数(与时间无关)，而非脉动量(图5.2所示单相系统的功率为脉动量)。为了说明图5.38中对称Y-Y连接系统的功率为常数，可求出总功率的表达式。A相负载吸收的功率为$v_{an}(t)i_{an}(t)$。同理，每相负载吸收的功率为电压与电流的乘积，因此，总功率为

$$p(t) = v_{an}(t)i_{aA}(t) + v_{bn}(t)i_{bB}(t) + v_{cn}(t)i_{cC}(t) \tag{5.91}$$

将式(5.82)、式(5.83)及式(5.84)中的电压和式(5.88)、式(5.89)及式(5.90)中的电流代入上式，可得

$$\begin{aligned} p(t) = {} & V_Y \cos(\omega t) I_L \cos(\omega t - \theta) \\ & + V_Y \cos(\omega t - 120°) I_L \cos(\omega t - \theta - 120°) \\ & + V_Y \cos(\omega t + 120°) I_L \cos(\omega t - \theta + 120°) \end{aligned} \tag{5.92}$$

应用三角等式:

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\cos(x-y) + \frac{1}{2}\cos(x+y)$$

则式(5.82)可写成

$$\begin{aligned} p(t) = {} & 3\frac{V_Y I_L}{2}\cos(\theta) + \frac{V_Y I_L}{2}[\cos(2\omega t - \theta) \\ & + \cos(2\omega t - \theta - 240°) + \cos(2\omega t - \theta + 480°)] \end{aligned} \tag{5.93}$$

其中，括号中几项之和为

$$\begin{aligned} & \cos(2\omega t - \theta) + \cos(2\omega t - \theta - 240°) + \cos(2\omega t - \theta + 480°) \\ & = \cos(2\omega t - \theta) + \cos(2\omega t - \theta + 120°) + \cos(2\omega t - \theta - 120°) \\ & = 0 \end{aligned}$$

这是本节前面所得的结论，即3个大小相等、相位互差120°的正弦量之和为零。因此，三相总功率为

$$p(t) = 3\frac{V_Y I_L}{2}\cos(\theta) \tag{5.94}$$

注意：三相总功率为常数而与时间无关。这个结论使接有对称负载的三相发电机的驱动转矩为常量即可，同时减弱了发电机的振动。类似地，三相电动机产生的电磁转矩也为常数，然而单相电动机产生的电磁转矩却是脉动量。

每相相电压的有效值为

$$V_{Y\text{rms}} = \frac{V_Y}{\sqrt{2}} \tag{5.95}$$

同理，每相相电流的有效值为

$$I_{L\text{rms}} = \frac{I_L}{\sqrt{2}} \tag{5.96}$$

将式(5.95)和式(5.96)代入式(5.94)，可得

$$P_{\text{avg}} = p(t) = 3V_{Y\text{rms}} I_{L\text{rms}} \cos(\theta) \tag{5.97}$$

5.7.4 无功功率

与单相电路一样，能量也会在电源与三相负载中的储能元件之间来回流动，表征这种能量

交换的物理量即为无功功率。由于无功功率的存在使得导线中的电流更大，以及电力设备的额定值更高。对称三相负载的无功功率为

$$Q = 3\frac{V_Y I_L}{2}\sin(\theta) = 3V_{Y\text{rms}}I_{L\text{rms}}\sin(\theta) \tag{5.98}$$

5.7.5 线电压

前面已经介绍过，在端子 a、b、c 和中点 n 之间的电压称为相电压。另一方面，在 a 与 b、b 与 c 或 c 与 a 之间的电压称为线与线之间的电压，或简称线电压。因此 $\mathbf{V}_{an}$、$\mathbf{V}_{bn}$ 和 $\mathbf{V}_{cn}$ 为相电压，而 $\mathbf{V}_{ab}$、$\mathbf{V}_{bc}$ 和 $\mathbf{V}_{ca}$ 为线电压(为了便于记忆，将下标以 $a-b-c-a$ 的顺序进行循环)。下面将分析线电压和相电压的关系。

在图 5.38 中，根据 KVL 可得如下关系式：

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn}$$

将式(5.85)和式(5.86)代入上式可得

$$\mathbf{V}_{ab} = V_Y \angle 0^\circ - V_Y \angle -120^\circ \tag{5.99}$$

即

$$\mathbf{V}_{ab} = V_Y \angle 0^\circ + V_Y \angle 60^\circ \tag{5.100}$$

线电压和相电压的相量关系如图 5.40(a)所示。根据相量图，由式(5.100)可得

$$\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}V_Y \angle 30^\circ \tag{5.101}$$

将线电压的幅值记为 V_L，线电压的大小为相电压的 $\sqrt{3}$ 倍：

$$V_L = \sqrt{3}V_Y \tag{5.102}$$

因此，可得线电压 $\mathbf{V}_{ab}$ 与相电压 $\mathbf{V}_{an}$ 的关系为

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{an} \times \sqrt{3} \angle 30^\circ \tag{5.103}$$

同理可得

$$\mathbf{V}_{bc} = \mathbf{V}_{bn} \times \sqrt{3} \angle 30^\circ \tag{5.104}$$

及

$$\mathbf{V}_{ca} = \mathbf{V}_{cn} \times \sqrt{3} \angle 30^\circ \tag{5.105}$$

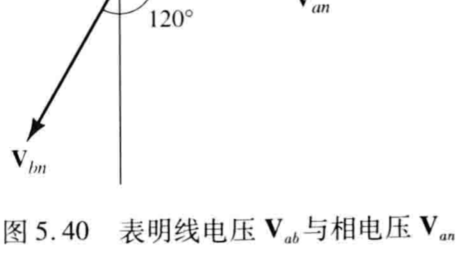


图 5.40　表明线电压 $\mathbf{V}_{ab}$ 与相电压 $\mathbf{V}_{an}$ 和 $\mathbf{V}_{bn}$ 之间关系的相量图

图 5.41 为这些电压之间的相量关系。

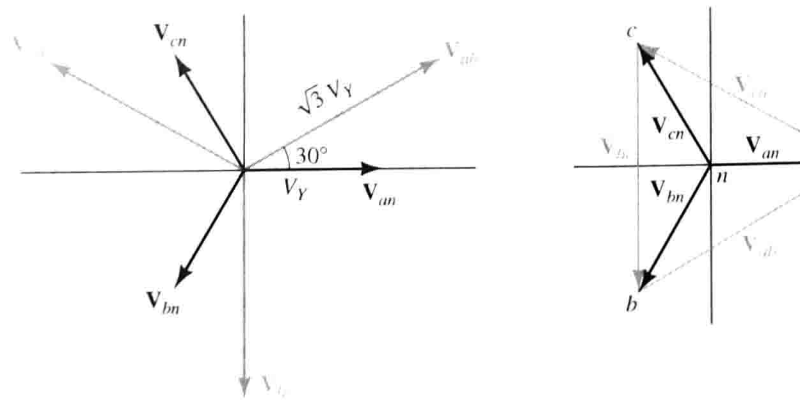


图 5.41　线电压与相电压的相量图

例 5.12 Y-Y 连接系统的分析。

一个正相序 Y 形三相对称电源的频率为 60 Hz，相电压为 $V_Y = 1000$ V。该电源接有 Y 形连接的三相对称负载，每相负载由一个 0.1 H 的电感和一个 50 Ω 的电阻串联而成。试求线电流、线电压以及负载的有功功率和无功功率，并绘制相电压、线电压和线电流的相量图。假设 $\mathbf{V}_{an}$ 的相位为零。

解： 首先计算每相负载的复阻抗，可得

$$Z = R + j\omega L = 50 + j2\pi(60)(0.1) = 50 + j37.70$$
$$= 62.62\ \underline{/37.02^\circ}$$

其次，绘制该电路，如图 5.42(a)所示。在对称 Y-Y 连接系统的分析计算时，可假设 n 与 N 点是相连的(无论中线是否存在，其电流和电压值都相同)。因此，$\mathbf{V}_{an}$ 为 A 相负载的电压，有

$$Z = R + j\omega L = 50 + j2\pi(60)(0.1) = 50 + j37.70$$
$$= 62.62\ \underline{/37.02^\circ}$$

同理可得

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{Z} = \frac{1000\ \underline{/0^\circ}}{62.62\ \underline{/37.02^\circ}} = 15.97\ \underline{/-37.02^\circ}$$

类似地，

$$\mathbf{I}_{bB} = \frac{\mathbf{V}_{bn}}{Z} = \frac{1000\ \underline{/-120^\circ}}{62.62\ \underline{/37.02^\circ}} = 15.97\ \underline{/-157.02^\circ}$$

$$\mathbf{I}_{cC} = \frac{\mathbf{V}_{cn}}{Z} = \frac{1000\ \underline{/120^\circ}}{62.62\ \underline{/37.02^\circ}} = 15.97\ \underline{/82.98^\circ}$$

由式(5.103)、式(5.104)和式(5.105)可得线电压为

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{an} \times \sqrt{3}\ \underline{/30^\circ} = 1732\ \underline{/30^\circ}$$

$$\mathbf{V}_{bc} = \mathbf{V}_{bn} \times \sqrt{3}\ \underline{/30^\circ} = 1732\ \underline{/-90^\circ}$$

$$\mathbf{V}_{ca} = \mathbf{V}_{cn} \times \sqrt{3}\ \underline{/30^\circ} = 1732\ \underline{/150^\circ}$$

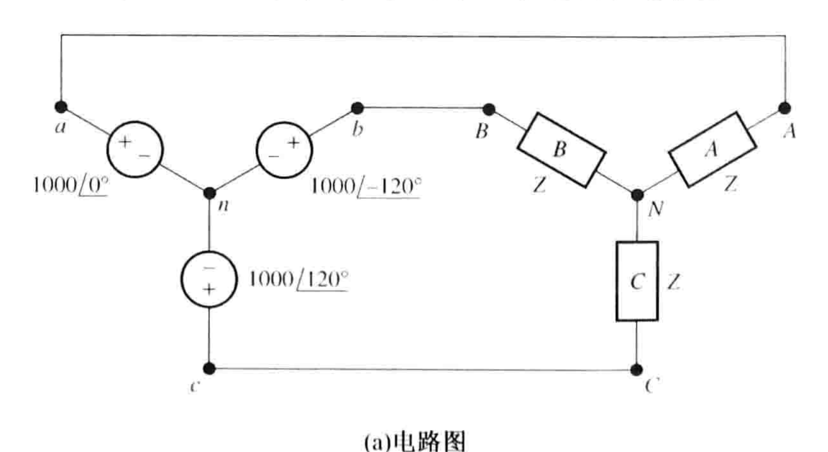
由式(5.94)可得负载的有功功率为

$$P = 3\frac{V_Y I_L}{2}\cos(\theta) = 3\left(\frac{1000 \times 15.97}{2}\right)\cos(37.02^\circ) = 19.13\ \text{kW}$$

由式(5.98)可得负载的无功功率为

$$Q = 3\frac{V_Y I_L}{2}\sin(\theta) = 3\left(\frac{1000 \times 15.97}{2}\right)\sin(37.02^\circ) = 14.42\ \text{kVAR}$$

相量图如图 5.42(b)所示。为了便于绘制，通常情况下电流与电压选取的比例是不一样的。



(a)电路图

$\mathbf{V}_{ca}$ $\mathbf{V}_{cn}$ $\mathbf{I}_{cC}$ $\mathbf{V}_{ab}$ θ $\mathbf{V}_{an}$ $\mathbf{I}_{bB}$ $\mathbf{I}_{aA}$ $\mathbf{V}_{bn}$ $\mathbf{V}_{bc}$

(b) 相量图

图 5.42 例 5.12 的电路和相量图

练习 5.16　一个正相序 Y 形三相对称电源的频率为 60 Hz，线电压为 $V_L = 1000$ V。该电源接有 Y 形连接的三相对称负载，每相负载由一个 0.2 H 的电感和一个 100 Ω 的电阻串联而成。试求相电压、线电流以及负载的有功功率和无功功率。假设 $\mathbf{V}_{an}$ 的相位为零。

答案： $\mathbf{V}_{an} = 577.4\angle 0°$，$\mathbf{V}_{bn} = 577.4\angle -120°$，$\mathbf{V}_{cn} = 577.4\angle 120°$；$\mathbf{I}_{aA} = 4.61\angle -37°$，$\mathbf{I}_{bB} = 4.61\angle -157°$，$\mathbf{I}_{cC} = 4.61\angle 83°$；$P = 3.19$kW；$Q = 2.40$ kVAR。

5.7.6　Δ 形电源

一组三相对称电源也可以连接成为三角形，如图 5.43(a)所示。通常我们应当避免将电压源接成环形。然而在这种情况下，它产生的环形电压之和为零：

$$\mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc} + \mathbf{V}_{ca} = 0$$

因此，三角形中的环形电流也为零。实际上，这只是一种近似的情况。在我们所讨论的电气之外还存在许多奥妙。例如，实际电气的电压不是确切的正弦波，而是由几种谐波分量叠加而成的。对于电源和负载应该选用 Y 形还是 Δ 形，谐波成分的影响成为了一个重要的选择因素。

对于一个给定的 Δ 形电源，根据式(5.103)～式(5.105)可以获得一个与之等效的 Y 形电源(反之亦然)。很明显，Δ 形电源没有中点，因此四线制供电系统只能采用 Y 形电源。

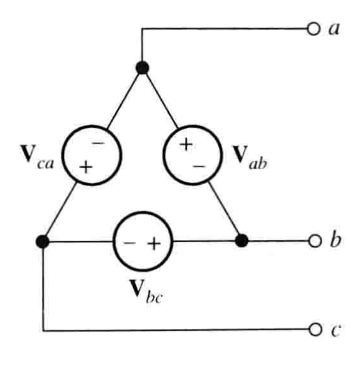


图 5.43　Δ 形三相电源

5.7.7　Y 形和 Δ 形负载

负载阻抗既可以连接成 Y 形，也可以连接成 Δ 形，其连接方式如图 5.44 所示。这两种负载之间的等效关系为

$$Z_\Delta = 3Z_Y \tag{5.106}$$

因此，可以将 Δ 形负载转换为等效的 Y 形负载，反之亦然。

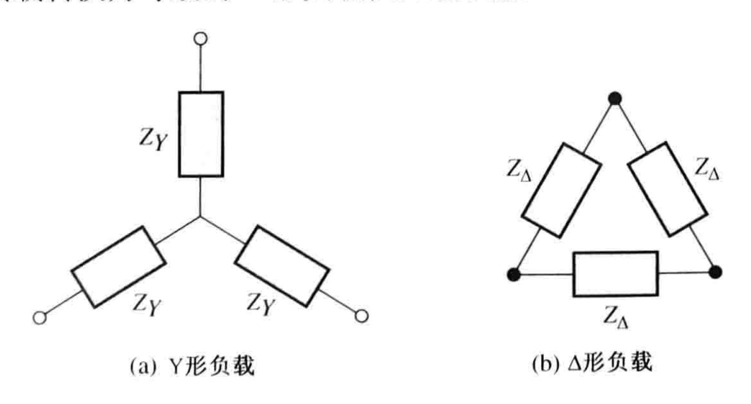


图 5.44　负载既可作 Y 形也可作 Δ 连接

5.7.8　Δ-Δ 连接

图 5.45 所示为 Δ 形电源向 Δ 形负载供电。假设电源电压为

$$\mathbf{V}_{ab} = V_L \angle 30° \tag{5.107}$$

$$\mathbf{V}_{bc} = V_L \angle -90° \tag{5.108}$$

$$\mathbf{V}_{ca} = V_L \angle 150° \tag{5.109}$$

它们的相量图如图 5.41 所示(这里选取的 Δ 形电源的相位与前面讨论的内容是一致的)。

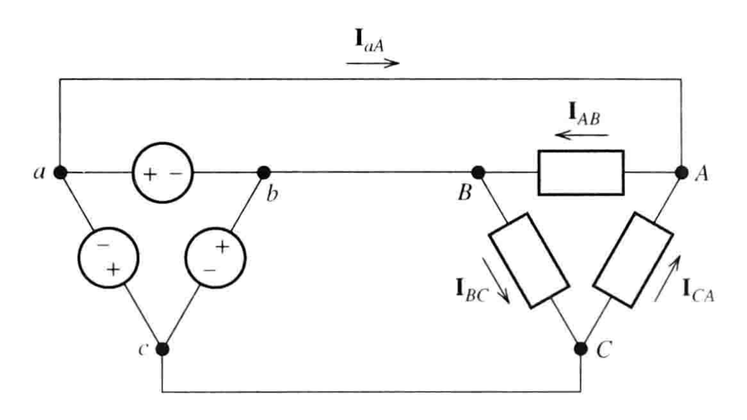


图 5.45 Δ 形电源向 Δ 形负载供电

如果连接导线的阻抗为零，那么负载的线电压应等于电源的线电压。即 $\mathbf{V}_{AB}=\mathbf{V}_{ab}$、$\mathbf{V}_{BC}=\mathbf{V}_{bc}$ 和 $\mathbf{V}_{CA}=\mathbf{V}_{ca}$。

假设每相负载的阻抗为 $Z_\Delta \angle\theta$，那么 AB 相负载的电流为

$$\mathbf{I}_{AB}=\frac{\mathbf{V}_{AB}}{Z_\Delta \angle\theta}=\frac{\mathbf{V}_{ab}}{Z_\Delta \angle\theta}=\frac{V_L \angle 30^\circ}{Z_\Delta \angle\theta}=\frac{V_L}{Z_\Delta}\angle 30^\circ-\theta$$

定义电流的大小为

$$I_\Delta=\frac{V_L}{Z_\Delta} \tag{5.110}$$

因此，

$$\mathbf{I}_{AB}=I_\Delta \angle 30^\circ-\theta \tag{5.111}$$

同理可得

$$\mathbf{I}_{BC}=I_\Delta \angle -90^\circ-\theta \tag{5.112}$$

$$\mathbf{I}_{CA}=I_\Delta \angle 150^\circ-\theta \tag{5.113}$$

$a-A$ 线中的电流为

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{aA}&=\mathbf{I}_{AB}-\mathbf{I}_{CA}\\&=I_\Delta \angle 30^\circ-\theta - I_\Delta \angle 150^\circ-\theta\\&=(I_\Delta \angle 30^\circ-\theta)\times(1-1\angle 120^\circ)\\&=(I_\Delta \angle 30^\circ-\theta)\times(1.5-\mathrm{j}0.8660)\\&=(I_\Delta \angle 30^\circ-\theta)\times(\sqrt{3}\angle -30^\circ)\\&=\mathbf{I}_{AB}\times\sqrt{3}\angle -30^\circ\end{aligned}$$

因此，线电流的大小为

$$I_L=\sqrt{3}I_\Delta \tag{5.114}$$

例 5.13 对称 Δ - Δ 连接系统的分析。

如图 5.46(a)所示电路。一组 Δ 形电源通过阻抗为 $Z_{\text{line}}=0.3+\mathrm{j}0.4\ \Omega$ 的导线向 Δ 形负载供电。负载阻抗为 $Z_\Delta=30+\mathrm{j}6$，电源电压为

$$\mathbf{V}_{ab}=1000\angle 30^\circ$$

$$\mathbf{V}_{bc}=1000\angle -90^\circ$$

$$\mathbf{V}_{ca}=1000\angle 150^\circ$$

试求线电流、负载的线电压、每相负载的电流、负载的有功功率以及输电线上损耗的功率。

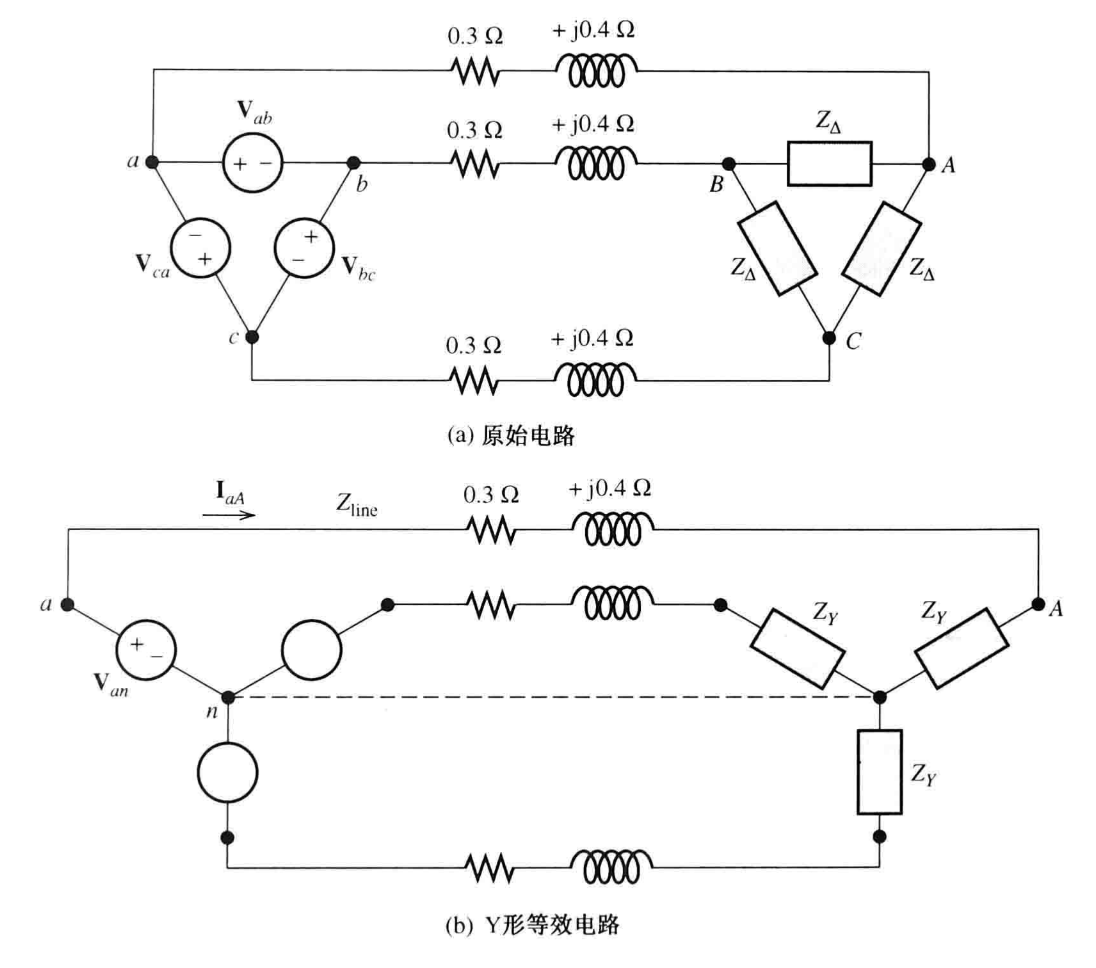
解： 首先，确定等效的 Y 形电源和负载(实际上只需要处理 1/3 电路即可，因为电路的剩余部分除了相位以外其余参数都是相同的)。选取 A 相进行分析计算，从式(5.103)可得 $\mathbf{V}_{an}$ 为

$$\mathbf{V}_{an}=\frac{\mathbf{V}_{ab}}{\sqrt{3}\ \angle 30^\circ}=\frac{1000\ \angle 30^\circ}{\sqrt{3}\ \angle 30^\circ}=577.4\ \angle 0^\circ$$

根据式(5.100)有

$$Z_Y=\frac{Z_\Delta}{3}=\frac{30+\mathrm{j}6}{3}=10+\mathrm{j}2$$

可得如图 5.46(b)所示的 Y 形等效电路。



(a) 原始电路

(b) Y形等效电路

图 5.46　例 5.13 的电路图

在对称负载的 Y-Y 连接系统中，可认为电源与负载的中点是相连的，如图 5.46(b)所示的虚线。这样，可将三相电路分解成为 3 个单相电路。对于如图 5.46(b)中的 A 相，有

$$\mathbf{V}_{an}=(Z_{\text{line}}+Z_Y)\mathbf{I}_{aA}$$

所以，

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{aA}&=\frac{\mathbf{V}_{an}}{Z_{\text{line}}+Z_Y}=\frac{577.4\ \angle 0^\circ}{0.3+\mathrm{j}0.4+10+\mathrm{j}2}\\&=\frac{577.4\ \angle 0^\circ}{10.3+\mathrm{j}2.4}=\frac{577.4\ \angle 0^\circ}{10.58\ \angle 13.12^\circ}\\&=54.60\ \angle -13.12^\circ\end{aligned}$$

负载的相电压为

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{An} &= \mathbf{I}_{Aa}Z_Y = 54.60\ \underline{/-13.12^\circ} \times (10+\mathrm{j}2)\\ &= 54.60\ \underline{/-13.12^\circ} \times 10.20\ \underline{/11.31^\circ}\\ &= 556.9\ \underline{/-1.81^\circ}\end{aligned}$$

则可得负载的线电压为

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{AB} &= \mathbf{V}_{An} \times \sqrt{3}\ \underline{/30^\circ} = 556.9\ \underline{/-1.81^\circ} \times \sqrt{3}\ \underline{/30^\circ}\\ &= 964.6\ \underline{/28.19^\circ}\end{aligned}$$

AB 相负载的电流为

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{AB} &= \frac{\mathbf{V}_{AB}}{Z_\Delta} = \frac{964.6\ \underline{/28.19^\circ}}{30+\mathrm{j}6} = \frac{964.6\ \underline{/28.19^\circ}}{30.59\ \underline{/11.31^\circ}}\\ &= 31.53\ \underline{/16.88^\circ}\end{aligned}$$

AB 相负载的功率为电流有效值的平方乘以电阻:

$$P_{AB} = I_{AB\mathrm{rms}}^2 R = \left(\frac{31.53}{\sqrt{2}}\right)^2 (30) = 14.91\ \mathrm{kW}$$

由于其余两相负载的功率都是相同的，因此三相总功率为

$$P = 3P_{AB} = 44.73\ \mathrm{kW}$$

A 相导线上的功率损耗为

$$P_{\mathrm{line}A} = I_{a\mathrm{Arms}}^2 R_{\mathrm{line}} = \left(\frac{54.60}{\sqrt{2}}\right)^2 (0.3) = 0.447\ \mathrm{kW}$$

由于其余两相导线上的功率损耗是相等的，因此导线上总损耗为

$$P_{\mathrm{line}} = 3 \times P_{\mathrm{line}A} = 1.341\ \mathrm{kW}$$

练习 5.17 Δ 形对称电源的电压为

$$\mathbf{V}_{ab} = 1000\ \underline{/30^\circ}$$

$$\mathbf{V}_{bc} = 1000\ \underline{/-90^\circ}$$

$$\mathbf{V}_{ca} = 1000\ \underline{/150^\circ}$$

该电源向 Δ 形负载供电，每相负载为 50 Ω 的电阻。试求线电流及负载的有功功率。

答案: $\mathbf{I}_{aA} = 34.6\ \underline{/0^\circ}$, $\mathbf{I}_{bB} = 34.6\ \underline{/-120^\circ}$, $\mathbf{I}_{cC} = 34.6\ \underline{/120^\circ}$; $P = 30$ kW。

5.8 用 MATLAB 进行交流分析

本节将说明如何采用 MATLAB 编写程序，完成分析复杂交流电路的过程。事实上，职业工程师已经很少使用计算器，因为用 MATLAB 编程可以轻松进行所有各种各样的工程计算。当然，你可能会需要使用计算器进行课程考试，在参加专业工程师(PE)考试时，只允许携带各种计算器，因此，在参加考试之前，你应该熟练掌握其中的一种。

5.8.1 MATLAB 中的复数数据

在默认情况下，MATLAB 设定 $\mathrm{i} = \mathrm{j} = \sqrt{-1}$。然而，我遇到至少有一个错误是使用 j 代替 i，因此，在使用 MATLAB 或 MATLAB 符号工具箱时强调使用 i 作为虚数单位。在交流电路分析时，需要小心避免 i 用于其他目的。例如，如果用 i 代表一个电流或其他变量，且没有指定它所代表的值时，将会产生错误。

在 MATLAB 中复数应写成直角坐标式(如 3 +4i 或者 3 +i * 4)。

在实际工作中可以用极坐标式表示复数 $M\angle\theta = M\exp(j\theta)$，MATLAB 要求用弧度表示角度，所以用极坐标表示复数时，需要用角度乘以π /180，把角度转换为弧度。例如，我们用如下命令输入 $V_s = 5\sqrt{2}\angle 45°$。

```
>> Vs = 5*sqrt(2)*exp(i*45*pi/180)
Vs =
   5.0000 + 5.0000i
```

可以验证，MATLAB 已经正确地将 $5\sqrt{2}\angle 45°$ 转换成直角坐标形式。

另外，可以用欧拉公式

$$M\angle\theta = M\exp(j\theta) = M\cos(\theta) + jM\sin(\theta)$$

输入，同样要把角度转化为弧度。例如，$V_s = 5\sqrt{2}\angle 45°$ 应这样输入：

```
>> Vs = 5*sqrt(2)*cos(45*pi/180) + i*5*sqrt(2)*sin(45*pi/180)
Vs =
   5.0000 + 5.0000i
```

如果数据已经是极坐标形式，则可以直接输入。例如，输入 $Z = 3 + j4$，用命令

```
>> Z = 3 + i*4
Z =
   3.0000 + 4.0000i
```

如果我们输入

```
>> Ix = Vs/Z
Ix =
   1.4000 - 0.2000i
```

MATLAB 可进行复数的计算，然后把结果用直角坐标形式表示出来。

5.8.2　在 MATLAB 中寻找数据的极坐标形式

通常，我们需要了解 MATLAB 计算结果的极坐标形式，可以用 abs 命令找到数据的幅值，用 angle 命令找到数据相位的弧度值，要获得角度值，则要用弧度值乘以 180/π。因此，为了获得数据的幅值和相位，可以执行如下命令：

```
>> abs(Vs) % Find the magnitude of Vs.
ans =
    7.0711
>> (180/pi)*angle(Vs) % Find the angle of Vs in degrees.
ans =
   45.0000
```

5.8.3　为 MATLAB 添加新函数

由于我们经常需要将数据或结果表示为极坐标形式，如果为 MATLAB 添加两个新的函数将会非常方便。因此，可以编写一个 m-file 函数，命名为 pin. m，功能是将复数的极坐标形式转换为代数形式，然后将其保存在工作文件夹中，在 m-file 中命令为

```
function z = pin(magnitude, angleindegrees)
z = magnitude*exp(i*angleindegrees*pi/180)
```

然后，输入数据 $V_s = 5\sqrt{2}\angle 45°$，通过输入命令：

```
>> Vs = pin(5*sqrt(2),45)
Vs =
   5.0000 + 5.0000i
```

选择用 pin 来命名这段程序的名字，以此来暗示“polar input”，也就是极坐标输入，这个文件保存在 MATLAB 的文件夹中(若参看文件的信息可访问这个文件夹)。

同样，为了得到答案的极坐标形式，可以编写一个应用，叫作 pout(代表“polar out”)，命令如下：

```
function [y] = pout(x);
magnitude = abs(x);
angleindegrees = (180/pi)*angle(x);
y = [magnitude angleindegrees];
```

保存在 m-file 中，命名为 pout. m。然后，要得到一个结果的极坐标形式，可以采用这个函数，例如：

```
>> pout(Vs)
ans =
    7.0711   45.0000
```

还有一个例子：

```
>> pout(i*200)
ans =
    200    90
```

5.8.4 用 MATLAB 求解网络方程

我们可以用 MATLAB 轻松解决节点电压和网孔电流方程以及在交流电路计算中的其他方程，步骤如下：

1. 写节点电压和网孔电流方程
2. 把方程转化成矩阵形式，网孔电流方程表示为 $\mathbf{ZI}=\mathbf{V}$，$\mathbf{Z}$ 表示系数矩阵，$\mathbf{I}$ 是列相量，由待求的网孔电流组成，$\mathbf{V}$ 是列相量，由已知的电压组成。对于节点电压方程，矩阵形式为 $\mathbf{YV}=\mathbf{I}$，$\mathbf{Y}$ 是系数矩阵，$\mathbf{V}$ 是待求的节点电压，$\mathbf{I}$ 是流入节点的电流。
3. 把矩阵输入 MATLAB 中，然后采用逆矩阵的方法计算网孔电流和节点电压。通过 $\mathbf{I}=\text{inv}(\mathbf{Z})\times\mathbf{V}$ 求得网孔电流，通过 $\mathbf{V}=\textbf{inv}(\mathbf{Y})\times\mathbf{I}$ 求得节点电压，inv 表示矩阵的逆矩阵。
4. 利用这些结果计算其他任何感兴趣的电路参数。

例 5.14 用 MATLAB 进行网孔电流相量的分析。

确定图 5.47 所示电路中的网孔电流，电源 $\mathbf{V}_1$ 提供的有功功率，以及无功功率。

解：对每个回路采用基尔霍夫电压定律，可得关于网孔电流的方程式：

$$(5+\mathrm{j}3)\mathbf{I}_1+(50\angle-10^\circ)(\mathbf{I}_1-\mathbf{I}_2)=2200\sqrt{2}$$

$$(50\angle-10^\circ)(\mathbf{I}_2-\mathbf{I}_1)+(4+\mathrm{j})\mathbf{I}_2+2000\sqrt{2}\angle30=0$$

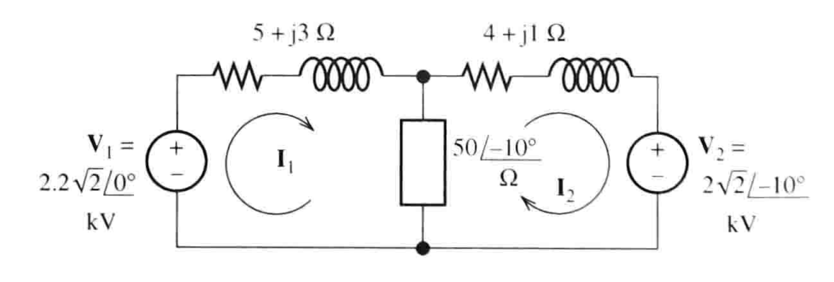


图 5.47 例 5.14 的电路图

写成矩阵形式，上面等式变成

$$\begin{bmatrix}(5+\mathrm{j}3+50\angle-10^\circ) & -50\angle-10^\circ\\ -50\angle-10^\circ & (4+\mathrm{j}+50\angle-10^\circ)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_1\\ \mathbf{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2200\sqrt{2}\\ -2000\sqrt{2}\angle-10^\circ\end{bmatrix}$$

通过这个等式解得 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$，可以计算电源 $\mathbf{V}_1$ 输出的复功率：

$$\mathbf{S}_1=\frac{1}{2}\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^*$$

最后，$\mathbf{S}_1$ 的实部是有功功率，虚部即为无功功率。

我们将系数矩阵 **Z** 和电压矩阵 **V** 输入到 MATLAB 中，输入极坐标形式的数据用前面编写的 pin 函数，然后，计算得到电流矩阵。

```
>> Z = [(5 + i*3 + pin(50,-10)) (-pin(50,-10));...
   (-pin(50,-10)) (4 + i + pin(50,-10))];
>> V = [2200*sqrt(2); -pin(2000*sqrt(2),-10)];
>> I = inv(Z)*V
I =
  74.1634 + 29.0852i
  17.1906 + 26.5112i
```

得到的网孔电流是直角坐标形式的。接下来，应用 pout 函数得到结果的极坐标形式：

```
>> pout(I(1))
ans =
   79.6628   21.4140
>> pout(I(2))
ans =
   31.5968   57.0394
```

所以，求得的电流为 $\mathbf{I}_1=79.66\angle 21.41°$ A，$\mathbf{I}_2=31.60\angle 57.04°$ A，保留两位小数。接下来，计算第一个电源的复功率、有功功率和无功功率。

$$\mathbf{S}_1=\frac{1}{2}\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^*$$

```
>> S1 = (1/2)*(2200*sqrt(2))*conj(I(1));
>> P1 = real(S1)
P1 =
  1.1537e + 005
>> Q1 = imag(S1)
Q1 =
  4.5246e + 004
```

所以，电源 $\mathbf{V}_1$ 的有功功率是 115.37 kW，无功功率是 －45.25 kVAR。

命令出现在 m-file 中，名字是 Example_5_14。

练习 5.18　用 MATLAB 求图 5.48 所示电路中节点电压相量的极坐标形式。

答案： MATLAB 中的命令为

```
clear
Y = [(1/(100+i*30)+1/(50-i*80)) (-1/(50-i*80));...
      (-1/(50-i*80)) (1/(i*50)+1/(50-i*80))];
I = [pin(1,60); pin(2,30)];
V = inv(Y)*I;
pout(V(1))
pout(V(2))
```

结果是 $\mathbf{V}_1=79.98\angle 79.98°$，$\mathbf{V}_2=124.13\angle 116.30°$。

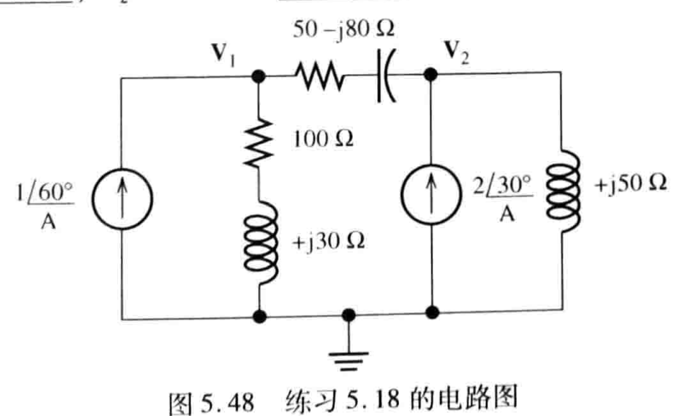


图 5.48　练习 5.18 的电路图

本章小结

1. 一个正弦电压的表达式为 $v(t) = V_m\cos(\omega t+\theta)$，其中 V_m 是电压峰值，ω 是角频率，单位为弧度每秒，θ 是相位。频率 $f=1/T$，这里 T 为周期，并且 $\omega=2\pi f$。
2. 为了统一起见，本书用余弦函数表示正弦量。正弦函数和余弦函数二者的转换关系为 $\sin(z) = \cos(z-90°)$。
3. 周期电压 $v(t)$ 的均方根值为

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

电压 $v(t)$ 为电阻提供的平均功率为

$$P_{\text{avg}} = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R}$$

同理，对于电流 $i(t)$ 有

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

电流 $i(t)$ 流过电阻的平均功率为

$$P_{\text{avg}} = I_{\text{rms}}^2 R$$

对于正弦量，其有效值等于其峰值除以 $\sqrt{2}$。
4. 用相量表示正弦量。相量的模等于正弦量的峰值，相位等于正弦量的相位(假设用余弦函数表示正弦量)。
5. 通过相量的加减实现正弦量的加减。
6. 一个无源电路的电压相量等于电流相量乘以电路的复阻抗。对于电阻，$\mathbf{V}_R = R\mathbf{I}_R$，并且电压和电流同相。对于电感，$\mathbf{V}_L = \mathrm{j}\omega L\mathbf{I}_L$，电压相位超前电流 90°。对于电容，$\mathbf{V}_C = -\mathrm{j}(1/\omega C)\mathbf{I}_C$，电压相位滞后电流 90°。
7. 第 2 章介绍的电阻电路的分析方法可以用来分析正弦电路，只需将电流和电压用相量代替、无源元件用其复阻抗代替即可。例如，复阻抗的串/并联等效与电阻的串/并联等效分析方法是相同(交流电路中要用到复数运算)的；节点电压法、分流和分压公式也可以直接用来分析交流电路。
8. 当已知一个元件的正弦电压电流时，其平均功率为 $P = V_{\text{rsm}}I_{\text{rsm}}\cos(\theta)$，其中 θ 为功率角，等于电压相位减去电流相位(即 $\theta=\theta_v-\theta_i$)，功率因数为 $\cos(\theta)$。
9. 无功功率表明了能量在电源与储能元件(L 和 C)之间来回交换的规模。定义电感的无功功率为正，电容的无功功率为负。每个周期内电路的总无功功率为零。对无功功率的分析研究是很有必要的，因为存在无功功率，则电气设备比无功功率为零时要求更高的额定电流。
10. 视在功率等于电压和电流有效值的乘积。图 5.23 所示的功率三角形反映了有功功率、无功功率、视在功率和功率角之间的关系。
11. 一个由电阻、电感、电容和多个正弦电源(所有电源的频率都相同)构成的交流电路在稳态时都有一个由电压源相量和复阻抗串联构成的戴维南等效电路，其诺顿等效电路由电流源相量和戴维南阻抗并联构成。

12. 二端交流电路向负载提供的功率最大的条件是负载阻抗等于戴维南阻抗的复共轭。如果负载只能选用纯电阻，那么当负载电阻等于戴维南阻抗的模时，输出最大功率。
13. 由于节省导线，三相供电系统比单相供电系统更加经济。对称三相电路的功率是平滑的，不同于单相电路的功率是脉动量。因此，与单相电动机相比，三相电动机具有振动更小的优点。

习题

5.1 节　正弦电流和电压

P5.1　角频率 ω 的单位是什么？频率 f 的单位是什么？两者之间的关系是什么？

P5.2　已知一个正弦函数曲线如图 5.1 所示，以下(a) ~ (e)哪个编号的参数改变会分别导致波形变换如以下选项所描述。(a)减少电压 V_m 的值。(b)增加频率 f 值。(c)增加 θ 值。(d)减少角频率 ω 的值。(e)增加周期。

1. 纵向延伸正弦曲线
2. 纵向压缩正弦曲线
3. 横向延伸正弦曲线
4. 横向压缩正弦曲线
5. 向右平移正弦曲线
6. 向左平移正弦曲线

P5.3　正如其他一些物理量的单位，如 m、kg、C 和 s，弧度的单位是什么？角频率的单位又是什么？

*P5.4　一个电压的表达式为 $v(t) = 10\sin(1000\pi t + 30°)$。首先用余弦函数的形式表示 $v(t)$，然后找到这个电压的角频率、频率、相位角、周期和均方根值。如果用这个电压对一个 50 Ω 电阻供电，则功率是多少？计算 $t = 0$ 时刻之后 $v(t)$ 第一次达到最大值的时间，画出 $v(t)$ 的值关于时间的草图。

P5.5　如果电压为 $v(t) = 12\sin(400\pi t - 120°)$，上题又该如何解答？

*P5.6　一个正弦电压的均方根值是 20 V，周期是 1200 μs，第一次到达正峰值的时间是 20 μs，求电压的表达式。

P5.7　一个正弦电流的均方根值是 10 A，周期是 5 ms，第一次到达正峰值时间是 1 ms，求电流的表达式。

P5.8　一个正弦电压的峰值是 50 V，频率是 1000 Hz，第一次正向穿过零点的时间是 $t = 0.1$ ms。写出电压的表达式。

P5.9　电流 $i(t) = 10\cos(200\pi t)$ 流过一个 100 Ω 的电阻，大致画出 $i(t)$ 和 $p(t)$ 的图像，并找出电源提供的平均功率。

P5.10　电压 $v(t) = 1000\sin(500\pi t)$ 接在一个 500 Ω 电阻的两端。画出 $v(t)$ 和 $p(t)$ 的图像，找出电源提供的平均功率。

P5.11　画出一个正弦曲线对另一个正弦曲线的 Lissajous 图，已知 $x(t) = \cos(\omega_x t)$，$y(t) = \cos(\omega_y + \theta)$，用 MATLAB 对 x 和 y 一秒钟取 100 个值，持续 20 秒，在不同的条件下画出一系列图形。(a) $\omega_x = \omega_y = 2\pi$，$\theta = 90°$。(b) $\omega_x = \omega_y = 2\pi$，$\theta = 45°$。(c) $\omega_x = \omega_y = 2\pi$，$\theta = 0°$。(d) $\omega_x = 2\pi$，$\omega_y = 4\pi$，$\theta = 0°$。

*P5.12　求图 5.12 所示电压波形的有效值。

P5.13　求图 5.13 所示电流波形的有效值。

P5.14　计算图 5.14 所示的半波整流正弦波的有效值。

P5.15　用 MATLAB 计算 $v(t) = A\cos(2\pi t) + B\sin(2\pi t)$ 的有效值。

P5.16 求图 5.16 所示电压波形的有效值。

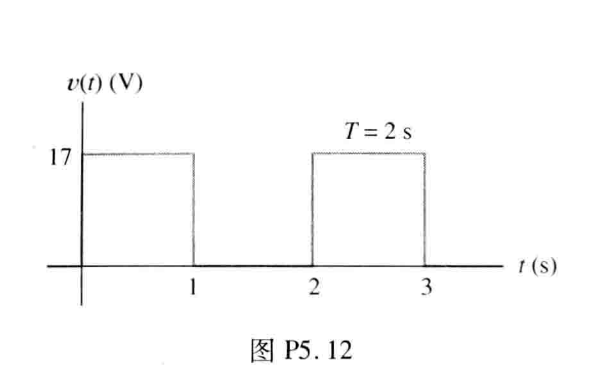


图 P5.12

图 P5.13

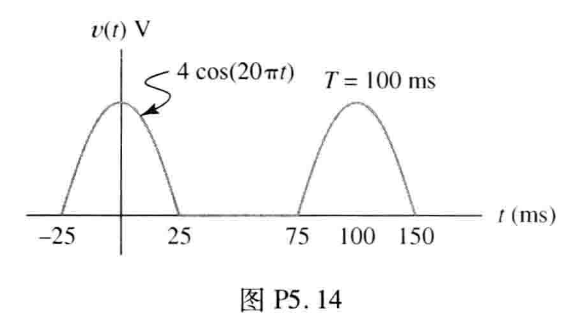


图 P5.14

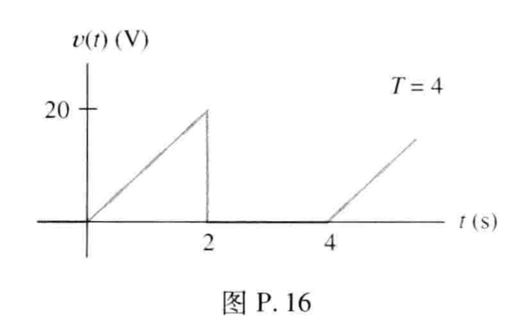


图 P.16

P5.17 计算电压 $v(t) = 15 + 10\cos(20\pi t)$ 的有效值。

P5.18 计算图 5.18 中周期性波形的有效值。

P5.19 一个周期性波形的有效值是否总是等于峰值的平方根？什么条件下有这种关系？

P5.20 用 MATLAB 计算 $v(t)$ 的有效值，$v(t)$ 的周期是 1 s，表达式是 $v(t) = 10\exp(-5t)\sin(20\pi t)$ $V(0 \leqslant t \leqslant 1)$。

5.2 节 相量

P5.21 解释如何确定两个具有相同频率的正弦函数的相位关系。

P5.22 列出进行正弦电压或电流相加的步骤，正弦量必须满足什么条件？

*P5.23 把 $5\cos(\omega t + 75°) - 3\cos(\omega t - 75°) + 4\sin(\omega t)$ 转化成 $V_m\cos(\omega t + \theta)$ 的形式。

*P5.24 设 $v_1(t) = 100\cos(\omega t)$，$v_2(t) = 100\sin(\omega t)$，用相量相加求出两个电压的和 $v_s(t)$，并把结果写成 $V_m\cos(\omega t + \theta)$，画出 V_1、V_2 和 V_S 的相量图，并比较三者的相位关系。

*P5.25 如图 P5.25 所示的两个相量，写出两个相量的时域表达式，形如 $V_m\cos(\omega t + \theta)$，并比较两者的相位关系。

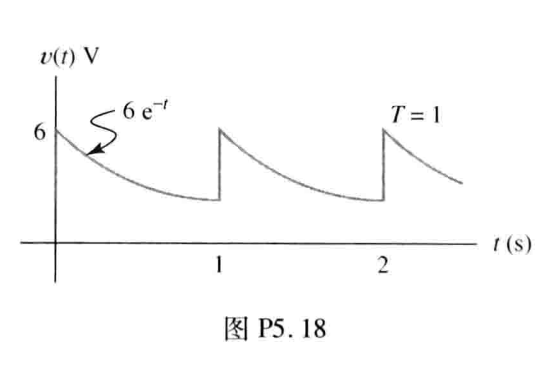


图 P5.18

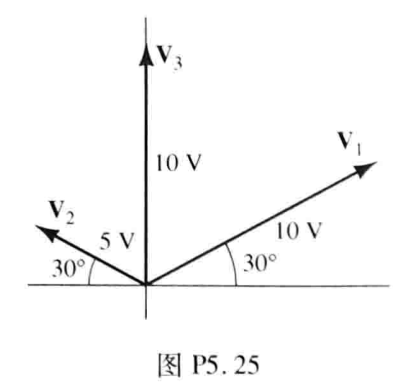


图 P5.25

P5.26 写出图 P5.26 所示形如 $v(t) = V_m\cos(\omega t + \theta)$ 的表达式，指出电压 V_m、ω 和 θ 的值，以及 $v(t)$ 的相位和有效值。

P5.27 已知两个正弦电压有相同的频率，有效值分别为 7 V 和 10 V，相位角未知，那么这两个相量之和的最小值是多少？最大值是多少？证明你的结论。

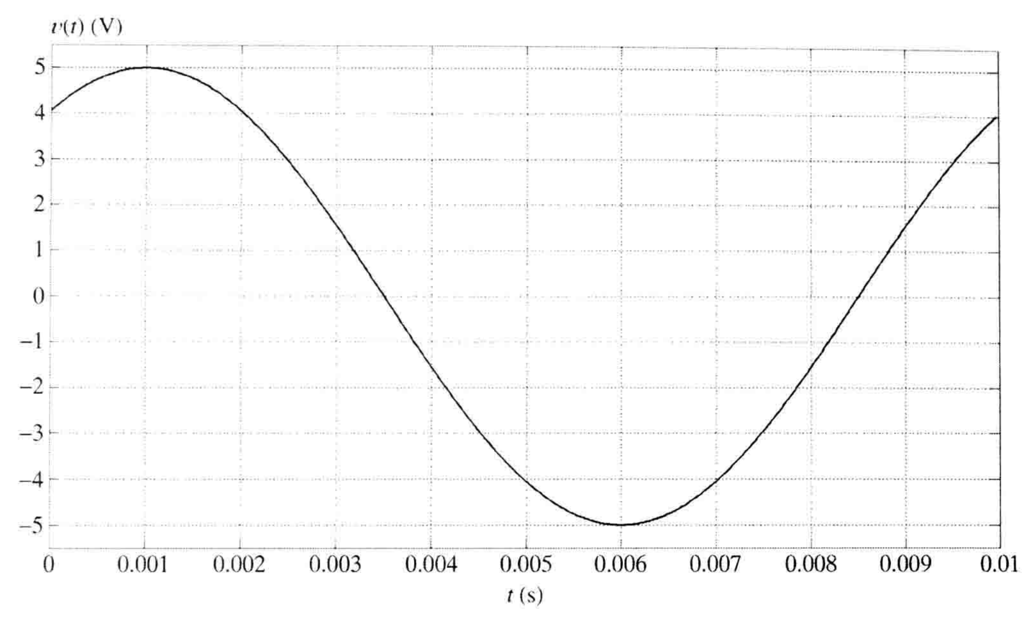


图 P5.26

P5.28　一个正弦电流 $i_1(t)$ 的相位是 60°，$i_1(t)$ 达到正向最大值的时间比 $i_2(t)$ 早 0.25 ms，两个电流的频率都是 500 Hz，试确定电流 $i_2(t)$ 的相位。

P5.29　把

$$15\sin(\omega t-45°)+5\cos(\omega t-30°)+10\cos(\omega t-120°)$$

写成 $v(t)=V_m\cos(\omega t+\theta)$ 的形式。

P5.30　设 $v_1(t)=90\cos(\omega t-15°)$，$v_2(t)=50\sin(\omega t-60°)$，用相量法计算出 $v_s(t)=v_1(t)+v_2(t)$，并把结果写成 $v(t)=V_m\cos(\omega t+\theta)$，比较三者的相位关系。（提示：作出三个电压量的相量图。）

P5.31　已知一个电路的电压为 $v_1(t)=10\cos(\omega t-30°)$，电流的有效值是 10 A，电流相位比电压滞后 40°（电压和电流拥有相同的频率），作出相量图，并写出 $i_1(t)$ 的表达式，形如 $I_m=\cos(\omega t+\theta)$。

P5.32　用 MATLAB 画出 $v(t)=\cos(19\pi t)+\cos(21\pi t)$ 在 t 为 0 ~ 2 s 区间内的波形，解释为什么在这个条件下，表达式不可以表示成相量形式，然后，在复平面上将 $v(t)$ 用两个速度不同的旋转矢量在实轴上的投影相加表示出来。

5.3 节　复阻抗

P5.33　写出电感和电容两端电压和流过的电流之间的关系。

P5.34　电阻两端电压和流过电流的相位关系是什么？电感是什么关系？电容是什么关系？

* P5.35　电压 $v_L(t)=10\cos(2000\pi t)$ 向一个 100 mH 的电感供电，算出相电压和相电流，画出相量图，求电流的时域函数，画出电压和电流的波形图，求得电压和电流的相量关系。

P3.36　一个电路由一个纯电阻、纯电感或纯电容组成，试确定电路的元件的类型和值。电路两端的电压和电流的条件为：(a) $v(t)=100\cos(100t+30°)$ V，$i(t)=2\cos(100t+30°)$ A；(b) $v(t)=100\cos(400t+30°)$ V，$i(t)=3\cos(400t+30°)$ A；(c) $v(t)=100\cos(200t+30°)$，$i(t)=2\cos(200t+30°)$ A。

* P5.37　电压 $v_C(t)=10\cos(200\pi t)$ 对一个电容 10 μF 供电，求电容的复阻抗、电路电压相量和电流相量，画出相量图，写出电流的时域表达式，画出电压和电流的波形，说出电压和电流的相位关系。

P5.38　(a)一个电路的电压和电流的波形如图 P5.38(a)所示，确定电路元件的性质和值。(b)一个电路的电压和电流的波形如图 P5.38(b)所示，确定电路元件的性质和值。

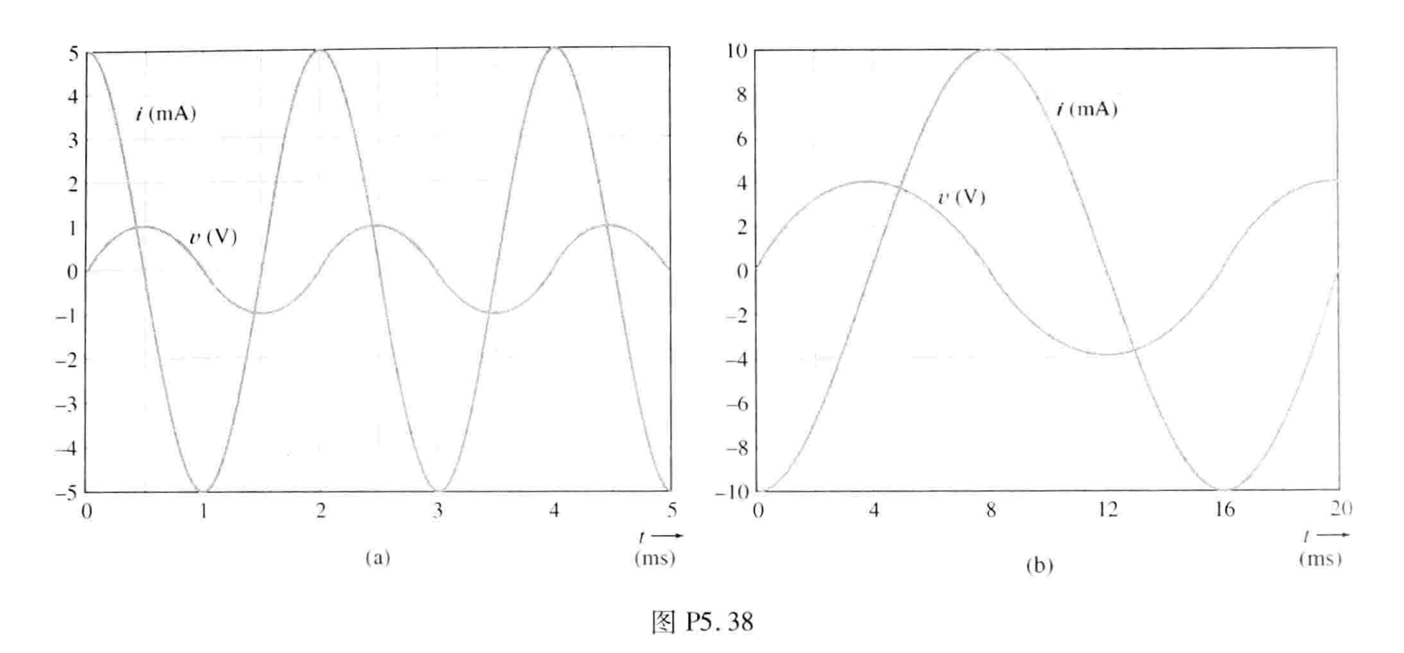


图 P5.38

P5.39 用 MATLAB 或手工画出一个由 10 mH 的电感、10 μF 的电容和 50 Ω 电阻构成的阻抗大小的变化曲线，频率变化规律是 0 ~ 1000 Hz。

P5.40 (a)已知一个电路的电压相量为 $\mathbf{V} = 50\angle 45°$ V，电流相量为 $\mathbf{I} = 10\angle 45°$ A，角频率为 1000 rad/s，确定电路中元件的性质和大小。(b)已知一个电路的电压相量为 $\mathbf{V} = 20\angle -45°$ V，电流相量为 $\mathbf{I} = 15\angle -135°$ A，角频率为 1000 rad/s，确定电路中元件的性质和大小。(c)已知一个电路的电压相量为 $\mathbf{V} = 100\angle 30°$，电流相量为 $\mathbf{I} = 5\angle 120°$ A，角频率为 1000 rad/s，确定电路中元件的性质和大小。

5.4 节 用相量和复阻抗进行电路分析

P5.41 叙述分析电流交流稳态响应的步骤，电源必须要满足何种条件？

*P5.42 求图 P5.42 所示电路中的电压相量和电流相量，画出 $\mathbf{V}_s$、$\mathbf{I}$、$\mathbf{V}_R$、$\mathbf{V}_L$ 的相量图，求得 $\mathbf{V}_s$ 和 $\mathbf{I}$ 的相量关系。

P5.43 如果电感变为 0.3 H，重做习题 P5.42。

*P5.44 求图 P5.44 所示电路中的电压相量和电流相量，画出 $\mathbf{V}_s$、$\mathbf{I}$、$\mathbf{V}_R$、$\mathbf{V}_C$ 的相量图，比较 $\mathbf{V}_s$ 和 $\mathbf{I}$ 的相位关系。

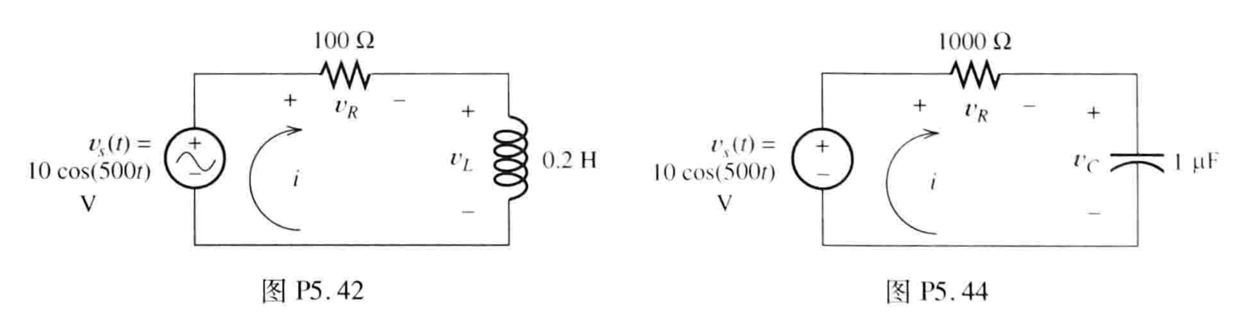


图 P5.42 图 P5.44

P5.45 把电容改成 4 μF，重做习题 P4.44。

*P5.46 求图 P5.46 所示电路中复阻抗的极坐标形式，其中 $\omega = 500$，$\omega = 1000$，$\omega = 2000$。

P5.47 求图 P5.47 所示电路中的复阻抗，ω 分别等于 500、1000、2000，给出复阻抗的极坐标和直角坐标的两种形式。

P5.48 一个 100 μF 的电容与一个由一个电阻 1 Ω 和一个电感 10 mH 组成的支路并联，在 $\omega = 500$，$\omega = 1000$，$\omega = 2000$ 的情况下，计算复阻抗，写成极坐标形式。

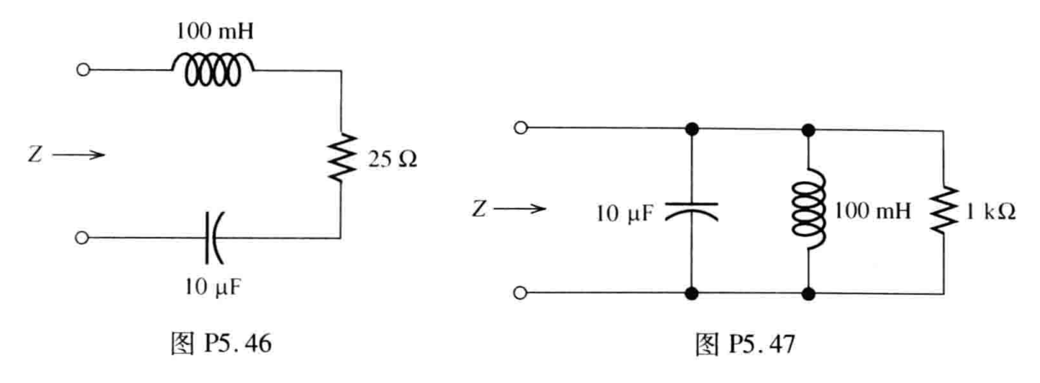


图 P5.46　　　　图 P5.47

*P5.49　一个电路如图 P4.50 所示，求得相量 $\mathbf{I}_s$、$\mathbf{V}$、$\mathbf{I}_R$、$\mathbf{I}_L$、$\mathbf{I}_C$，比较 $i_L(t)$ 和 $i_s(t)$ 的峰值，有什么发现？

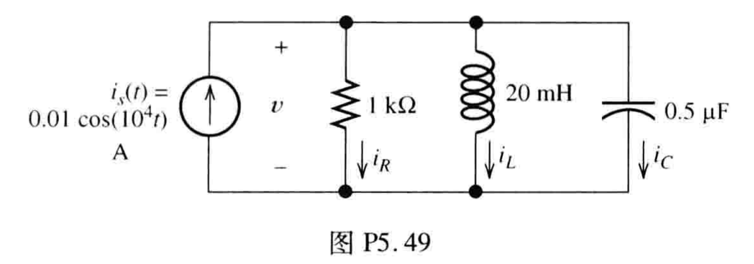


图 P5.49

P5.50　求图 P4.50 所示电路中的电压和电流相量，画出 $\mathbf{I}_s$、$\mathbf{V}$、$\mathbf{I}_R$、$\mathbf{I}_L$ 的相量图，$\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{I}_s$ 的相位关系是什么？

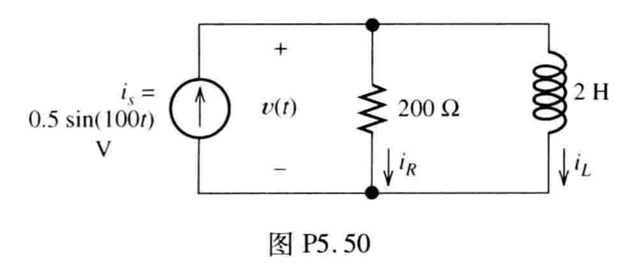


图 P5.50

P5.51　求图 P4.51 所示电路的 $\mathbf{I}_s$、$\mathbf{V}$、$\mathbf{I}_R$、$\mathbf{I}_L$、$\mathbf{I}_C$ 相量，比较 $v_s(t)$ 和 $v_L(t)$ 峰值的大小，有什么发现？解释这种现象。

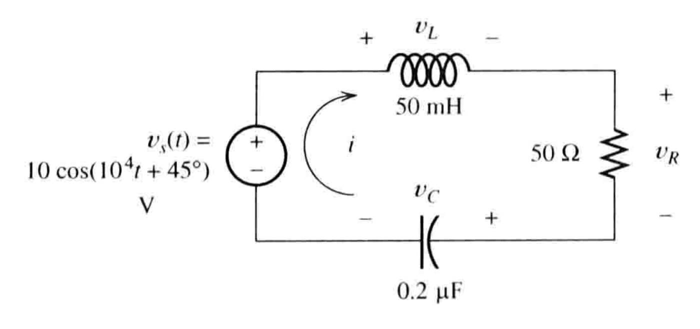


图 P5.51

*P5.52　求图 P5.52 所示电路的电压相量和电流相量，画出 $\mathbf{I}_s$、$\mathbf{V}$、$\mathbf{I}_R$、$\mathbf{I}_C$ 的相量图，相量 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{I}_s$ 相位关系是什么？

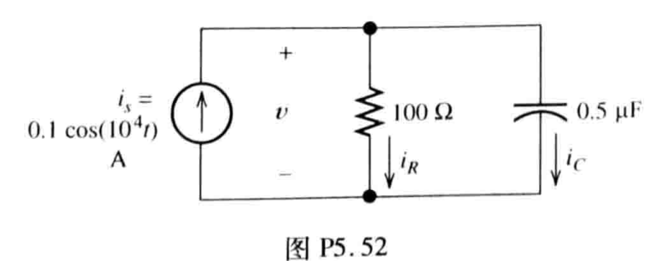


图 P5.52

P5.53 求图 P5.53 所示的电流相量 $\mathbf{I}$、$\mathbf{I}_R$、$\mathbf{I}_C$。

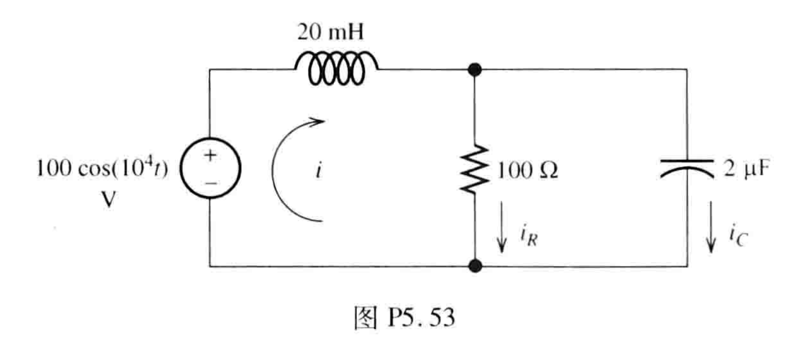


图 P5.53

P5.54 求图 P5.54 所示电路的相量 $\mathbf{V}_1$、$\mathbf{V}_2$、$\mathbf{V}_R$、$\mathbf{V}_L$、$\mathbf{I}$，画出相量图，确定 $\mathbf{I}$、$\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{I}$、$\mathbf{V}_L$ 的相位关系。

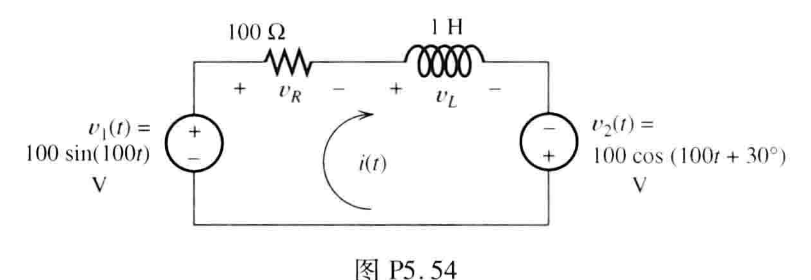


图 P5.54

P5.55 画出或通过计算机编程画出一个 20 mH 电感和一个 50 μF 电容串联的幅频特性，ω 变化范围为 0 ~ 2000 rad/s，虚轴上阻抗大小变化范围为 0 ~ 100 Ω，如果改成并联，则画出幅频特性。

P5.56 画出或通过计算机编程画出一个 20 mH 电感和一个 50 Ω 电阻串联的幅频特性，ω 变化范围为 0 ~ 5000 rad/s，如果改成并联，再画出幅频特性。

P5.57 解出图 P5.57 中的节点电压。

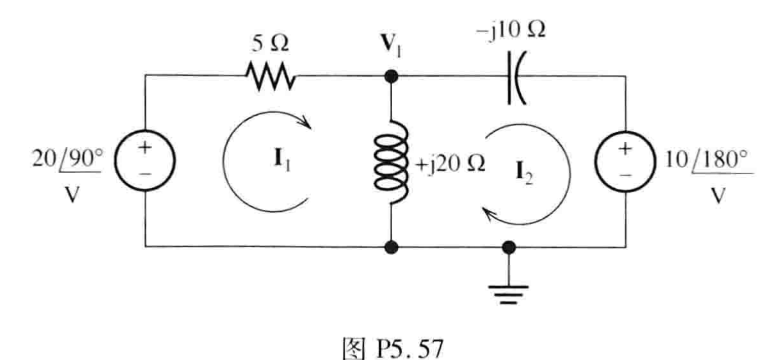


图 P5.57

P5.58 解图 P5.58 中的节点电压。

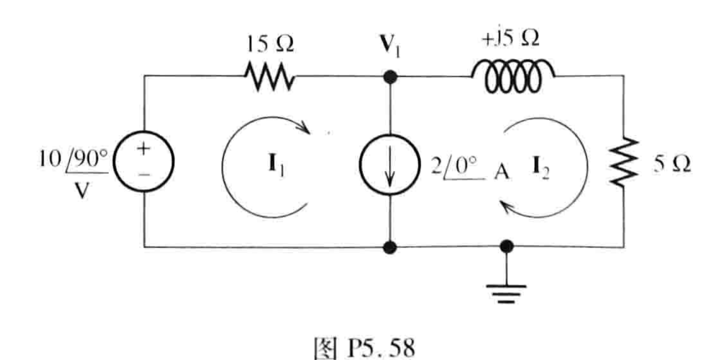


图 P5.58

5.5 节 交流电路的功率

P5.59 功率因数和功率角是怎么联系起来的?

P5.60 有功功率、无功功率、视在功率的单位分别是什么?

P5.61　怎样计算电路的复功率？复功率与电路的有功功率和无功功率有什么关系？

P5.62　一个负载有超前的功率因数，那它是电感性负载还是电容性负载？如果负载有滞后的功率因数，结果又怎样？

P5.63　假设一个非零的电源向一个元件供电，则下列元件的有功功率和无功功率是正的、负的，还是零？(a)纯电阻。(b)纯电感。(c)纯电容

P5.64　什么是功率因数的校正？如果要校正感性支路的功率因数，要在支路两端并联什么性质的元件？

P5.65　画出一个电感元件的功率三角形，并标示出每个边所代表的意义，再标示出功率角。对于一个电容元件，重复上述步骤。

P5.66　讨论为什么发电和配电工程师关注：(a)电路吸收的有功功率；(b)无功功率。

*P5.67　如图 P5.67 所示，求出电流相量 **I**，求出电源的有功功率、无功功率和视在功率，求得功率因数，它是超前还是滞后的？

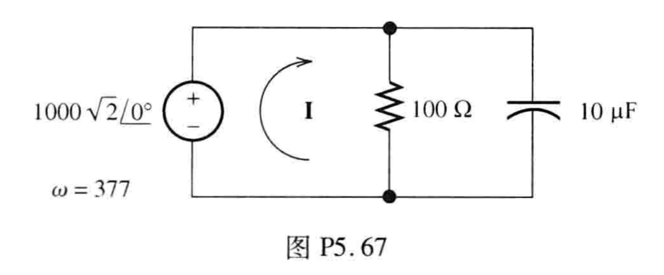


图 P5.67

P5.68　上题中把电容换成 0.5 H 的电感，结果将怎样？

*P5.69　一个电路的阻抗为 $Z = 100 - \mathrm{j}50\ \Omega$，流过电路的电流为 $\mathbf{I} = 15\sqrt{2}\underline{/30°}$ A，这个电路是电感性的还是电容性的？求得功率因数、有功功率、无功功率、视在功率。

P5.70　一个负载两端电压为 $\mathbf{V} = 1500\sqrt{2}\underline{/-120°}$ V，流过电路的电流为 $\mathbf{I} = 15\sqrt{2}\underline{/75°}$ A，电流的参考方向和电压的正方向相同，计算电路的复功率、功率因数、有功功率、无功功率和视在功率，计算负载的阻抗，是超前的还是滞后的？

P5.71　一个负载两端的电压 $\mathbf{V} = 1200\sqrt{2}\underline{/30°}$ V，负载阻抗为 $Z = 40 - \mathrm{j}30\ \Omega$，负载是电感性的还是电容性的？计算负载的功率因数、复功率、有功功率、无功功率和视在功率。

P5.72　一个负载两端的电压为 $v(t) = 10^4\sqrt{2}\cos(\omega t + 75°)$，流过的电流为 $i(t) = 2\sqrt{2}\cos(\omega t + 30°)$，电流参考方向和电压正方向相同，计算复功率、功率因数、有功功率、无功功率和视在功率，负载是电容性的还是电感性的？

P5.73　计算图 P5.73 所示每个元件的有功功率，包括电源，说明每个元件是吸收有功功率还是发出有功功率。

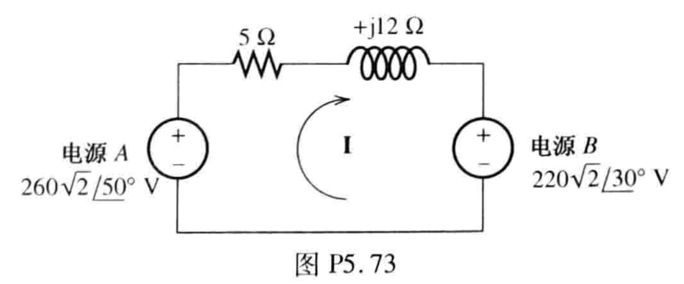


图 P5.73

P5.74　一个非零的电源向电路供电，说明下列各元件的有功功率、无功功率是正的、负的还是零？(a)一个电阻和电感串联。(b)一个电阻和一个电容串联。(c)一个纯电阻。

P5.75　一个非零的电源向电路供电，对于一个由纯电感和纯电容元件串联组成的电路，如何判断电路的有功功率和无功功率是正的、负的还是零？分别已知电容阻抗值大于、等于和小于电感阻抗值时的这三种情况。

P5.76　一个电容和电感并联，上题结果会是怎样？

P5.77　一个频率 50 Hz、有效值为 200 V 的电压向一个由电阻和电容串联的电路供电，有功功率是 2000 W，视在功率是 2500 VA，计算电阻和电容的值。

*P5.78　两个负载 A 和 B，并联连接，由一个频率 60 Hz、有效值 1 kV 的电源供电，负载 A 消耗的功率为 10 kW，功率因数为 90% 且是滞后的，B 的视在功率为 15 kW，功率因数是 80%，是滞后的，计算电源的有功功率、无功功率和视在功率，从电源看进去的功率因数是多少？

P5.79　将上述条件改变为：负载 A 消耗功率 50 kW，功率因数是 60%，滞后；负载 B 消耗功率 75 kW，功率因数是 80%，滞后。上述问题如何解答？

P5.80　计算图 P5.80 所示每个元件的有功功率，包括电源的，说明每个元件是吸收还是发出功率？

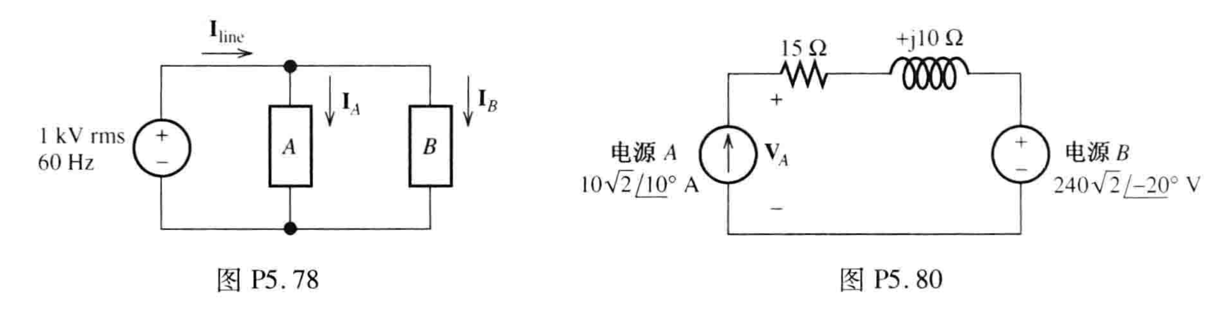


图 P5.78　　　　图 P5.80

P5.81　求如图 P5.81 所示电路的电源发出的有功功率、无功功率、视在功率，求功率因数，是滞后的还是超前的？

P5.82　把上题中的电容、电阻、电阻串联连接，又该如何解答？

*P5.83　如图 P5.83 所示，负载由一个有效值为 1000 V 的电源供电，负载吸收的功率为 1000 kW，功率因数为 25%，且是滞后的。(a)假设电容没有连接在电路中，求出电流相量 **I**。(b)要使功率因数达到 100%，计算需要并联在负载两端的电容值的大小。工程师一般根据电容两端的无功功率来决定用何种电容器来校正功率因数，那么这个并联电容的额定功率是多少？如果这个电容已经连接在电路中，那么电流 **I** 的值是多少？(c)假设电源长距离给负载供电，那么像这样连接电容有什么潜在的优点和缺点？

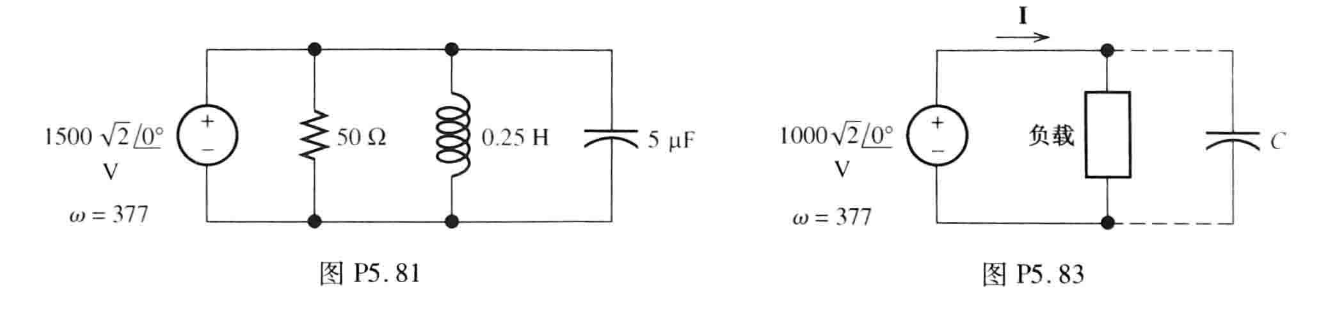


图 P5.81　　　　图 P5.83

5.6 节　戴维南和诺顿等效电路

P5.84　交流稳态电路的戴维南等效电路由哪些部分组成？诺顿等效电路由哪些部分构成？等效电路中的参数是怎么确定的？

P5.85　如果一个电路由一个负载和一个戴维南等效电路连接，那么电阻两端的电压值可能超过戴维南等效电路的电压值吗？如果不可以，解释原因；如果可以，在什么条件下可能实现？

P5.86　为了获得电路的最大输出功率，那么阻抗值要满足什么条件？(a)阻抗为任一复阻抗。(b)阻抗是纯电阻。

*P5.87　(a)求图 P5.87 所示的戴维南和诺顿等效电路。(b)如果负载为任一复阻抗，那么电路输出的最大功率是多少？(c)如果负载是纯电阻，那么最大输出功率是多少？

P5.88　求图 P5.88 所示电路的戴维南电路中的电压源和复阻抗值，以及诺顿电路中电流源的大小。

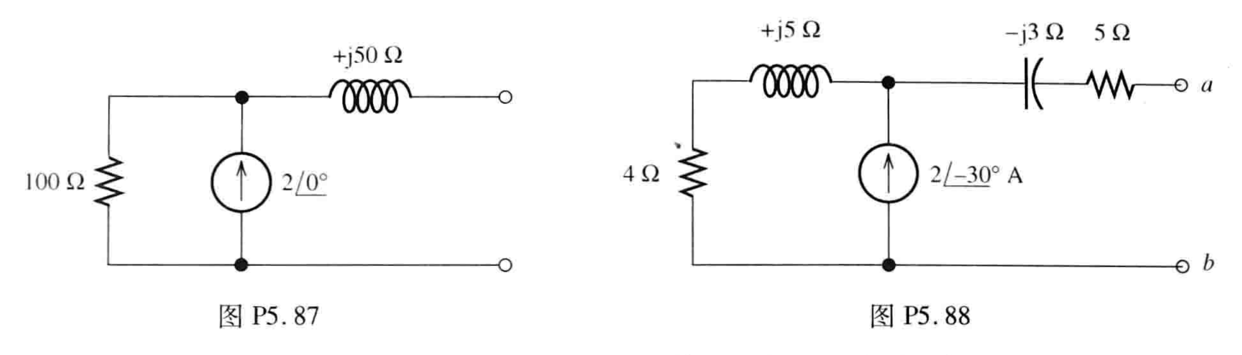


图 P5.87　　图 P5.88

P5.89　求图 5.89 所示电路的戴维南等效电路和诺顿等效电路，如果负载为任一复阻抗，那么电源可以输出的最大功率是多少？如果负载是纯电阻，那么输出的最大功率是多少？

P5.90　画出图 P5.90 所示的戴维南等效电路和诺顿等效电路。

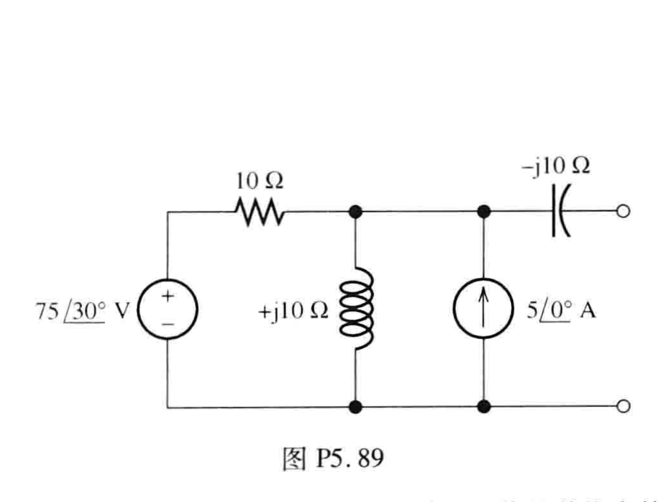


图 P5.89

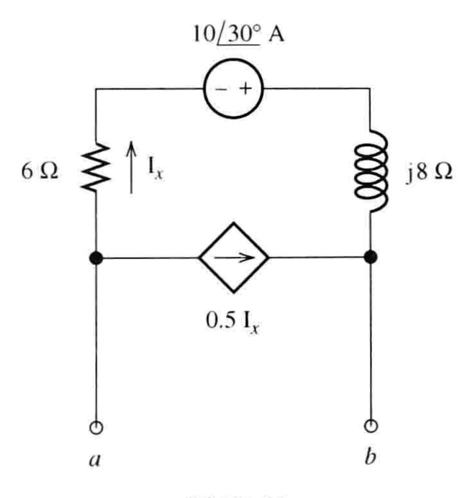


图 P5.90

*P5.91　如图 P5.91 所示为一个二端口网络的戴维南等效电路，电源的频率为 $f=60$ Hz，我们在其两端连接一个由电阻和电容并联构成的负载，要使电源输出的有功功率最小，则电阻和电容的值是多少？

P5.92　如果上题中的负载变成一个电阻和一个电容串联，则又该如何解答？

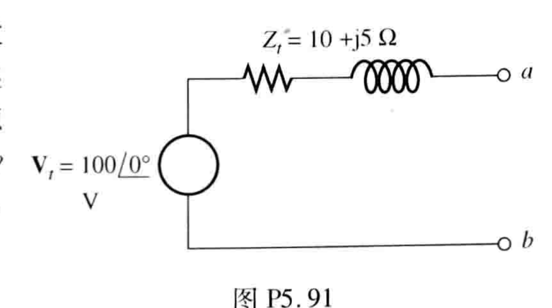


图 P5.91

5.7 节　三相对称电路

P5.93　一个三相电源为

$$v_{an}(t) = 100\cos(\omega t - 60^\circ)\ \text{V}$$
$$v_{bn}(t) = 100\cos(\omega t + 60^\circ)\ \text{V}$$
$$v_{cn}(t) = -100\cos(\omega t)\ \text{V}$$

这是一个正序电源还是负序电源？求 $v_{ab}(t)$、$v_{bc}(t)$、$v_{ca}(t)$ 的时域表达式。

P5.94　有一个正序三相对称电压，其中一项为

$$v_{an}(t) = 120\cos(100\pi t + 75^\circ)\ \text{V}$$

(a) 电源的频率是多少？

(b) 写出 $v_{bn}(t)$ 和 $v_{cn}(t)$ 的时域表达式。

(c) 如果电源是负序的，(b) 该如何解答？

*P5.95　一个 Y 连接的三相负载，每一相由一个 50 Ω 的电阻和一个 100 μF 的电容并联构成，则其转化为等效的三角形连接的每一相负载阻抗是多少？工作频率是 60 Hz。

* P5.96 一个对称的 Y 连接的三相电源，相电压为 440 V，计算相电压的幅值。如果对一个 Y 连接三相负载供电，负载的每一相由一个 30 Ω 的电阻构成，求线电流的有效值和总功率的大小。

P5.97 一个三相对称电源对一个负载供电，它的功率与时间有什么关系？对于单相供电的系统也有这样的规律吗？这是三相供电系统怎样的一个优势？与单相供电系统相比三相供电系统还有一个什么优势？

P5.98 一个三角形连接的电源对一个三角形连接的负载供电，如图 P5.98 所示，线电压的幅值是 440 V，三角形负载每臂的负载阻抗为 $Z_\Delta = 12 + j3\Omega$，算出 $\mathbf{I}_{aA}$、$\mathbf{V}_{AB}$、$\mathbf{I}_{AB}$ 和电源输出的总功率，传输线损耗的功率是多少？

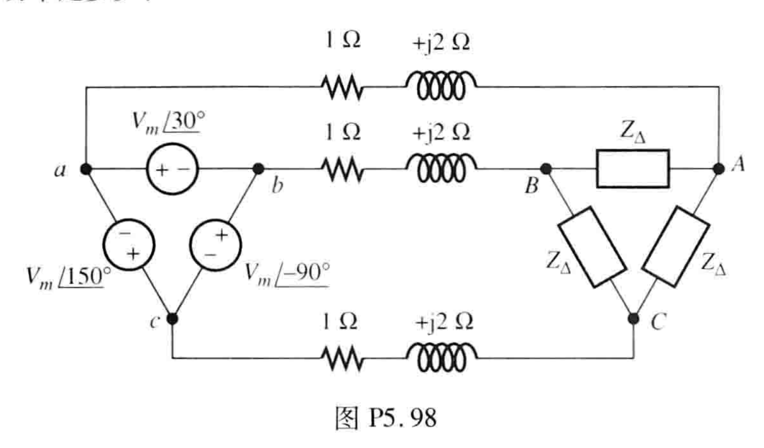


图 P5.98

* P5.99 三相负载每相阻抗变成 $Z_\Delta = 15 - j6\Omega$，则上题该如何解答？

P5.100 一个三相对称 Y 形连接的电源，相电压的有效值为 227 V，计算三相电源的线电压是多少？该电源对一个 Δ 形连接的负载供电，负载每臂由一个 15 Ω 的电阻和 + j30 Ω 的电抗并联组成，计算线电流、功率因数以及总功率。

P5.101 一个负序 Y 形连接的电源，相电压为 $\mathbf{V}_{an} = V_Y\angle 0°$，$\mathbf{V}_{bn} = \mathbf{V}_Y\angle 120°$，$\mathbf{V}_{cn} = \mathbf{V}_Y\angle 120°$，计算线电压，绘制出两种形式的电压相量图，并与图 5.41 进行比较。

P5.102 一个三相对称的正序 Y 形连接的电源，频率为 60 Hz，线电压为 $V_L = 208$ V，电源对一个对称三相 Y 形连接的负载供电，求相电压相量、线电压相量、线电流相量，以及对负载提供的有功功率、无功功率，假设 $\mathbf{V}_{an}$ 的相位为零。

P5.103 本章主要分析了对称负载，但是也可能遇到例如不对称三角形连接转化成星形连接的问题，反之亦然。如图 P5.103 所示，试推导三角形连接转换成星形连接的阻抗关系的一般性公式（提示：首先将两个电路中的任意第三端开路，计算另外两端之间的等效阻抗，例如均断开 C 端，计算等效阻抗 Z_{ab}的两种表达式。然后，根据得到的三个等式，用阻抗 Z_A，Z_B，and Z_C 来分别表示阻抗 Z_a，Z_b，and Z_c 即可。注意区别下标的大小写字母。）

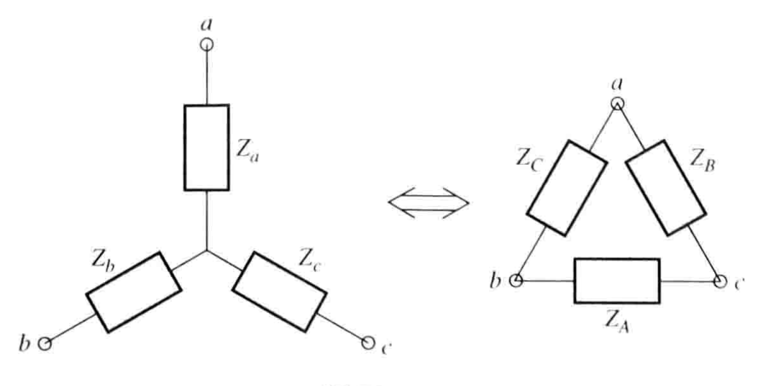


图 P5.103

P5.104 求星形连接转换成三角形连接的阻抗关系的一般性公式。（提示：首先将 Δ 连接电路的元件用导纳 Y 来表示。接下来，将两个电路中的任意两端短路，计算另外一端与短路端之间的等效导

纳，例如均短路 b、c 端，计算 a 与短路端之间的等效导纳 Ya 的两种表达式。然后，根据得到的三个等式，用阻抗 Z_a, Z_b, and Z_c 来分别表示导纳 Y_A、Y_B、Y_C，最终转化为用阻抗 Z_a, Z_b, and Z_c 来分别表示阻抗 Z_A, Z_B, and Z_C 即可。注意区别下标的大小写字母。)

5.8 节　用 MATLAB 进行交流分析

* *P5.105*　用 MATLAB 求解图 P5.105 中的节点电压。

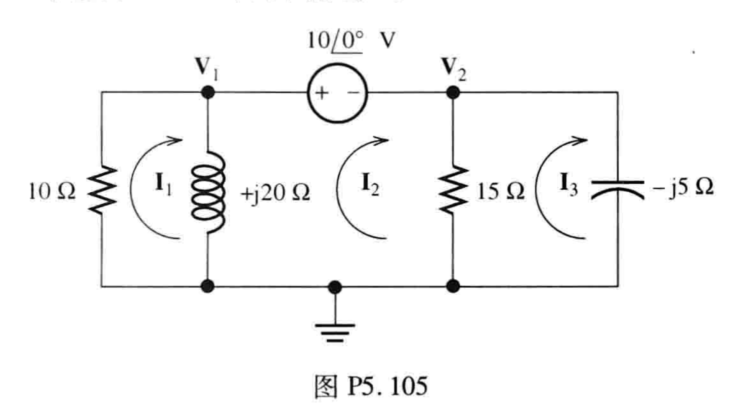


图 P5.105

P5.106　用 MATLAB 求图 P5.105 中的网孔电流。

* P5.107　用 MATLAB 求图 P5.57 中的网孔电流。

P5.108　用 MATLAB 求图 P5.58 中的网孔电流。

P5.109　用 MATLAB 求图 P5.109 中的节点电压。

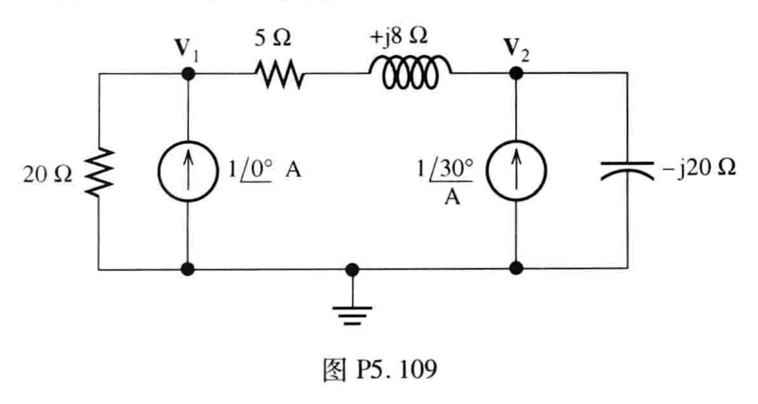


图 P5.109

测试题

下面有一些测试题可供读者检查是否已经掌握了本章的主要知识，答案在附录 E 中可以找到，更加完整的解答请参看学生资源，更多关于学生资源的信息请见附录 F。

T5.1　计算图 T5.1 电压波形的有效值，并算出其对一个 50 Ω电阻供电的平均功率。

T5.2　把 $v(t) = 5\sin(\omega t + 45°) + 5\cos(\omega t - 30°)$ 写成 $V_m\cos(\omega t + \theta)$ 的形式。

T5.3　已知两个电压 $v_1(t) = 15\sin(400\pi t + 45°)$V, $v_2(t) = 5\cos(400\pi t - 30°)$，求：(a) $v_1(t)$ 的有效值。(b)电源的频率。(c)电源的角频率。(d)电源的周期。(e) $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 之间的相位关系。

T5.4　计算图 T5.4 所示的电压相量 $\mathbf{V}_R$、$\mathbf{V}_L$, $\mathbf{V}_C$，用极坐标形式表示。

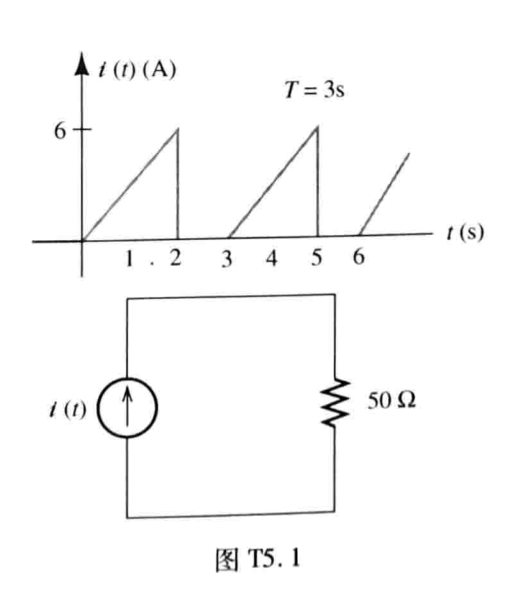


图 T5.1

T5.5 计算图 T5.5 中负载吸收的复功率、有功功率、无功功率以及视在功率，算出负载的功率因数。

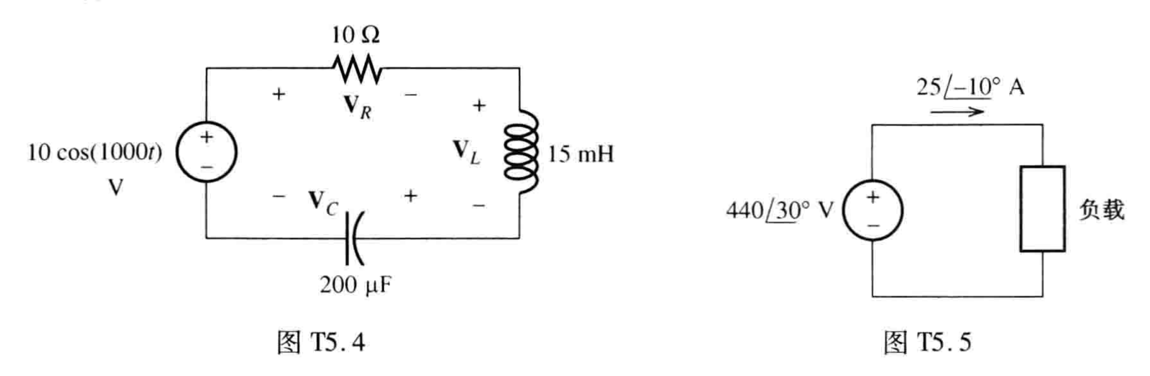


图 T5.4　　图 T5.5

T5.6 计算图 T5.6 中的电流相量 $\mathbf{I}_{aA}$，用极坐标表示，这是一个正序的三相对称系统，其中 $\mathbf{V}_{an} = 208\angle 30°$ V，$Z_\Delta = 6 + \mathrm{j}8\ \Omega$。

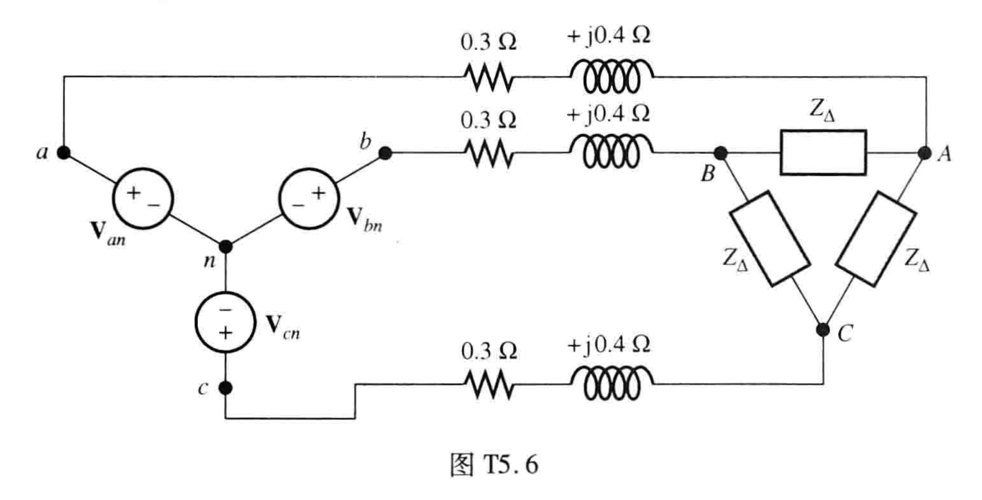


图 T5.6

T5.7 用 MATLAB 计算图 T5.7 中的网孔电流，写出编写的命令，可以使用本章中提到的 pin 和 pout 函数。

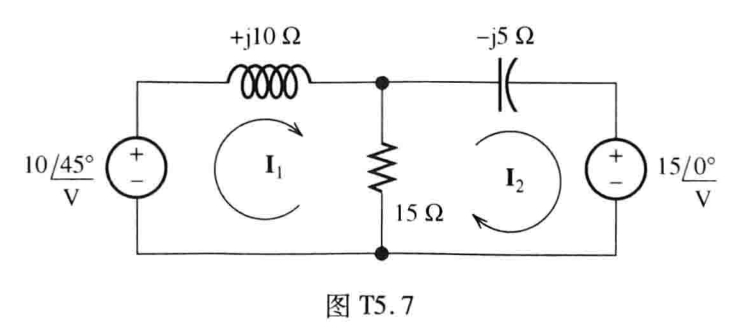


图 T5.7

第 6 章　频率响应、伯德图和谐振

本章学习目标

- 理解傅里叶变换的基本概念
- 掌握滤波器的传递函数，在输入正弦信号时计算其输出信号
- 掌握用电路分析法求解简单的传递函数
- 能设计一阶低通滤波器或高通滤波器，并绘制相应的传递函数
- 理解分贝、对数频率坐标和伯德图的概念
- 能绘制一阶滤波器传递函数的伯德图
- 掌握串联谐振和并联谐振有关参数的计算
- 精选和设计简单滤波器
- 能使用 MATLAB 软件导出和绘制网络函数
- 设计简单的数字信号处理系统

本章介绍

在电气工程中大部分工作都关注于信号，即承载信息的电流和电压。如安装在内燃机上的各种传感器用来提供各类电信号，这些信号表征温度、速度、节流阀位置及曲轴的旋转位置，通过对这些信号的处理来决定每个油缸的最佳点火时刻，由此产生用来点燃每个油缸火花塞的电脉冲。

测量员使用一种测量仪来测量距离，该仪器先发射一束光，光在待测处被镜子反射回测量仪，并被转换为电信号，经过电路处理后用来判断出测量仪和镜子之间的往返延迟时间，最终将时间转换为距离并显示在测量仪器上。

另一个信号处理的例子就是心电图。心电图是反映心脏活动的一系列曲线图，在检测心脏工作状态时，用电路和计算机来获得病人心脏工作的信息。如果病人的心脏有问题，通过心电图可提醒医生和护士引起注意。

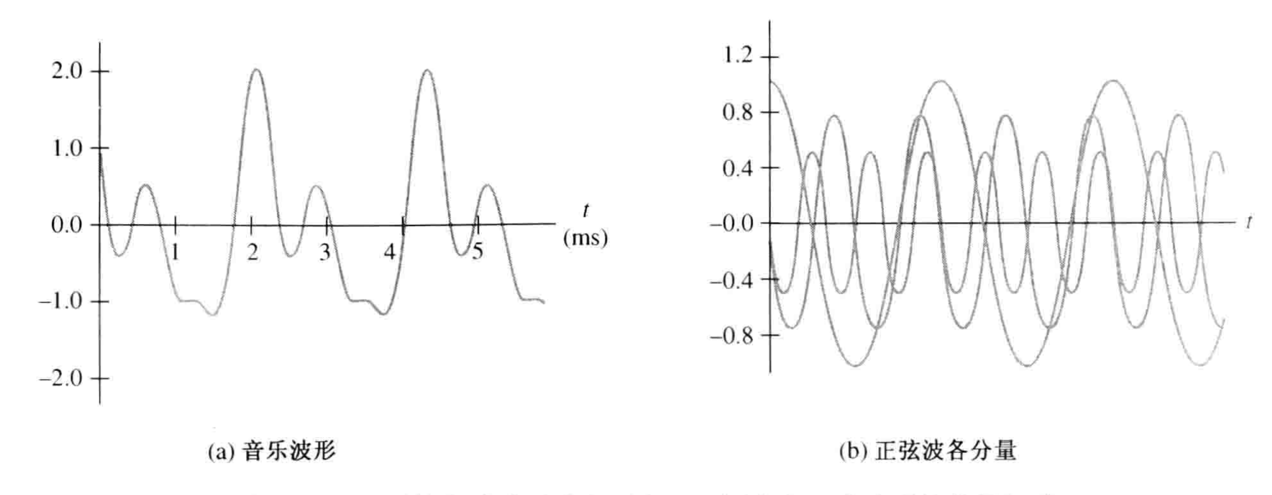
总之，信号处理关注的是采用信号来精确获得信息，并产生其他有用的电信号。深入研究该课题是很重要的。本章将从信号处理角度讨论几个简单有用的电路。

回顾第 5 章，我们已经掌握如何分析含正弦信号源的各种电路，这类正弦电路的激励和响应均为同一个频率，主要应用在电力系统。现实生活中承载信息的绝大多数电信号不是标准的正弦信号，不过，相量的概念在理解电路在非正弦信号源激励下的响应仍然是非常有用的。事实上，一个非正弦信号可以看作是多个频率、幅度和相位各异的正弦信号的总和。

6.1　傅里叶分析、滤波器和传递函数

6.1.1　傅里叶分析

在前言中已强调多数承载信息的信号是非正弦信号，如麦克风采集到的讲演或音乐的波形是一种复杂的不可提前预知的非正弦波形。图 6.1(a) 显示的是音乐信号的一小段波形。



(a) 音乐波形　　(b) 正弦波各分量

图 6.1 (a)图的音乐波形片段可由(b)图中各正弦波形的分量组成

尽管许多被研究的信号不是正弦信号，但是可以分解为一些确定的幅度、频率和相位的正弦信号。如图 6.1(a)所示的非正弦信号由图 6.1(b)的正弦信号叠加而成。在图 6.1(a)中的非正弦信号是相对简单的，仅由 3 个正弦信号构成，而多数的实际非正弦信号可由成千上万个正弦信号构成(理论上，这些正弦信号的个数可以是无穷个)。

当我们听音乐时，耳朵对不同频率的信号会有不同的感受，某些频率和幅度的正弦信号令人愉悦，其他的却令人不舒服。这样，在对音乐信号设计处理电路(例如放大器)时，必须考虑电路对不同频率的正弦信号的响应。

傅里叶分析是一个数学工具，用于将给定的波形分解成多个频率、幅度和相位的正弦波的组合。这里不详细研究该理论，直接引用傅里叶分析的部分结论，其中尤其重要的是：现实生活中的信号都可由多个正弦信号组合构成。而一定条件下构建成的正弦波的频率范围取决于该信号的类型，表 6.1 给出了几种信号的频率范围，例如构建心电图的正弦信号频率范围是从 0.05 Hz到 100 Hz。

表 6.1 几种信号的频率范围

心电图	0.0 5 ~ 100 Hz
可听声音	20 ~ 15 kHz
调幅无线广播	540 ~ 1600 kHz
模拟视频信号(美国标准)	0 ~ 4.2 MHz
调频的无线广播	88 ~ 108 MHz
手机通信	824 ~ 894 MHz 和 1850 ~ 1990 MHz
模拟卫星电视下的频段(C 段)	3.7 ~ 4.2 GHz
数字卫星电视	12.2 ~ 4.2 GHz

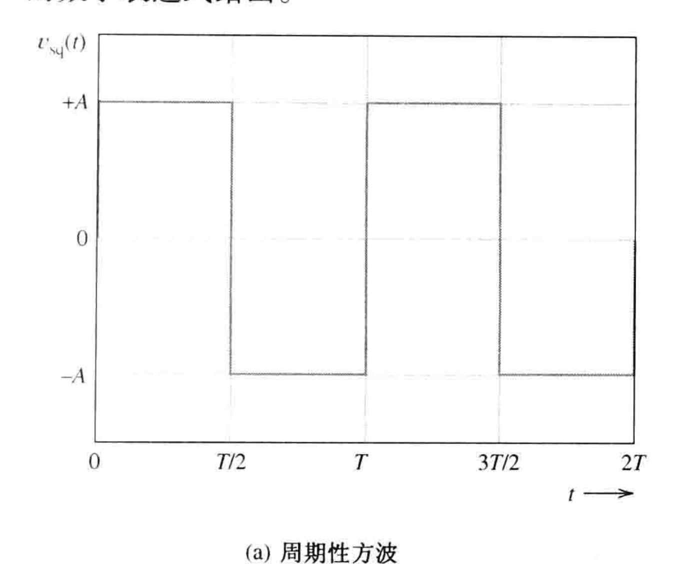
方波信号的傅里叶级数 另一个例子是如图 6.2(a)所示的方波，该方波经傅里叶变换为无限个正弦信号的组合，可以写成下式：

$$v_{\text{sq}}(t) = \frac{4A}{\pi}\sin(\omega_0 t) + \frac{4A}{3\pi}\sin(3\omega_0 t) + \frac{4A}{5\pi}\sin(5\omega_0 t) + \cdots \tag{6.1}$$

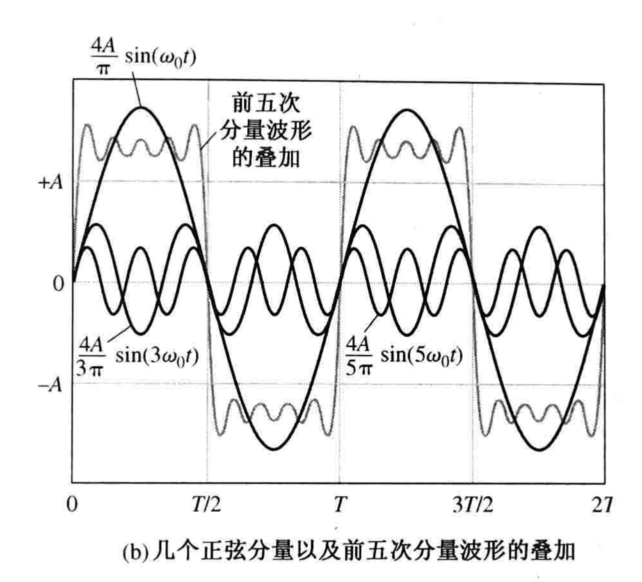
其中，$\omega_0 = 2\pi / T$ 称为方波信号的基频。

图 6.2(b)显示的波形是傅里叶分解为上述系列正弦波中的前三项分量以及由前五项正弦波分量叠加而成的结果。显然，即使只采用前五项正弦波组合而成的波形就已非常接近该方波信号，而且随着项数的增加，近似程度会越好。可见，方波的确可由无穷项的正弦波构建，而各

正弦波的频率是基频的奇数倍，幅度却随着频率的增加而下降，相位都是 - 90°。与方波信号不同的是，构建实际生活中信号的正弦波频率都被约束在有限的范围内，而且幅度无法通过简单的数学表达式给出。



(a) 周期性方波



(b) 几个正弦分量以及前五次分量波形的叠加

图 6.2 方波的波形以及部分正弦分量

有时信号包含有零频率的成分在内，将频率为零代入一般的正弦形式 $A\cos(\omega t + \theta)$ 便成为常数 $A\cos\theta$。我们称恒定的电压为直流，所以零频率成分相当于直流。对于传递函数中 $f = 0$ 的直流部分，可由直流输出除以直流输入信号得到。

总之，电气工程的一个基本概念是所有的电信号都可由多个正弦函数构建。一个给定信号的正弦函数分量的频率、相位和幅度都可由理论分析或实验测量(使用频谱仪分析)获得。对信号处理系统的设计，常要考虑系统如何响应各频率分量的正弦函数。

6.1.2 滤波器

在已知的频率范围内保留一部分频率范围信号而去掉另一部分频率范围信号，完成这种作用的电路称为滤波器(实际上，滤波器有很多种，但这里仅限于讨论几种相对简单的 *RLC* 滤波电路)。

滤波器电路是二端口网络，如图 6.3 所示，将被滤波的信号加在输入端口，而(理想状态下)只有有用频率范围的信号从输出端口获得。例如，调频收音机天线接收到许多发送机发送的电磁波信号，产生感应电压，这些信号电压经过滤波器的作用，保留 88 ~ 108 MHz范围内的信号，其他的则被滤除掉。这样就可接收到调频无线电信号，而去除了干扰音频信息提取过程的其他信号。

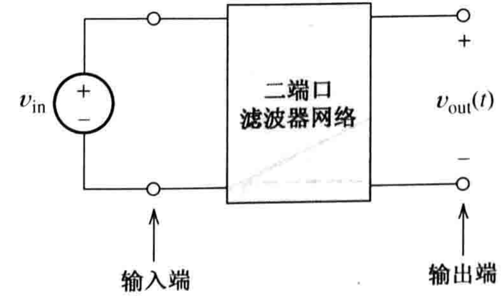


图 6.3 当输入信号 $v_{in}(t)$ 施加至滤波器的输入端时，其部分正弦分量能够通过滤波器，其余分量被抑制。因此，输出信号 $v_{out}(t)$ 中只包含 $v_{in}(t)$ 的部分正弦分量，同时，通过滤波器的正弦分量的幅值和相位有所改变

第 5 章已介绍过容抗和感抗会随着频率的改变而改变，例如感抗为 $Z_L = \omega L\underline{/90^\circ} = 2\pi fL\underline{/90^\circ}$。作用在该电感上的同一电压的高频段成分的等效阻抗比低频段要高，因

此，电路对同一信号的不同频率段具有选择性，这就是 RLC 电路实现滤波的一种方式。本章后面将讨论几种具体的电路。

6.1.3 传递函数

对图 6.3 所示的二端口网络，假设一个频率为 f 的相量 $\mathbf{V}_{in}$ 加在输入端口，在稳定状态下，输出端口也是同频率的正弦量，用相量 $\mathbf{V}_{out}$ 表示。

二端口滤波器的传递函数 $H(f)$ 定义为输出电压相量与输入电压相量之比，是一个以频率为自变量的函数：

$$H(f) = \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} \tag{6.2}$$

因为相量是复数，故传递函数也是一个包含幅度和相位的复数，而且，其幅度和相位都是频率的函数。

传递函数的幅度是输出信号的幅值与输入信号的幅值之比，传递函数的相位是输出信号的相位与输入信号的相位之差。这样，传递函数的幅度表示了滤波器如何影响每个频率成分正弦信号的幅度，同样，传递函数的相位反映了滤波器如何影响每个频率成分正弦信号的相位关系。

例 6.1 用传递函数来计算输出值。

滤波器的传递函数 $H(f)$ 如图 6.4 所示[注意：幅值函数 $H(f)$ 和相位函数 $\angle H(f)$ 分别画在图中]。如果输入信号 $v_{in} = 2\cos(2000\pi t + 40°)$，试写出该滤波器的输出表达式(以时间 t 为自变量)。

解： 已知输入信号的频率为 $f = 1000$ Hz，参照图 6.4，其幅值和相位分别为：

$$H(1000) = 3\angle 30° = \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}}$$

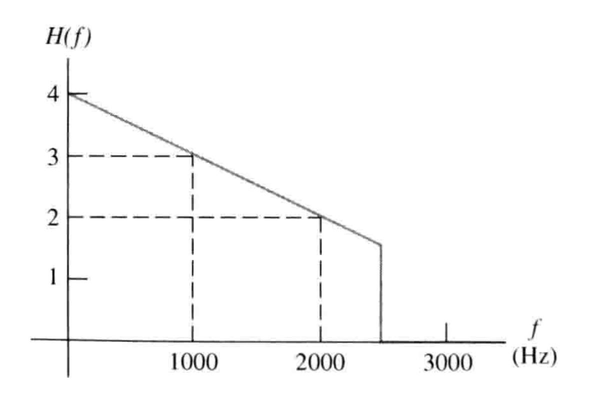
输入信号的相量为 $\mathbf{V}_{in} = 2\angle 40°$，有

$$\mathbf{V}_{out} = H(1000) \times \mathbf{V}_{in} = 3\angle 30° \times 2\angle 40° = 6\angle 70°$$

即输出信号

$$v_{out}(t) = 6\cos(2000\pi t + 70°)$$

在这个例子中，可以看到输入信号经过该滤波器后幅值放大了 3 倍，输出信号的相位偏移了 30°。当然，其依据来自传递函数在 $f = 1000$ Hz 时所具有的幅值和相位。



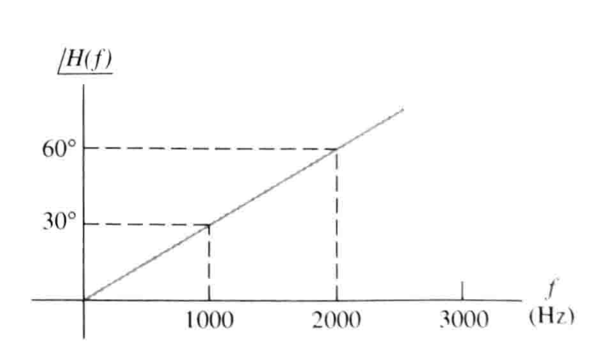


图 6.4 滤波器的传递函数，见例 6.1 和例 6.2

练习 6.1 如例 6.1 所述，假设输入信号为(a) $v_{in}(t) = 2\cos(4000\pi t)$ 和(b) $v_{in}(t) = 1\cos(6000\pi t - 20°)$，试分别写出输出表达式。

答案：(a) $v_{out} = 4\cos(4000\pi t + 60°)$；(b) $v_{out} = 0$。

注意：滤波器对信号的幅值和相位的影响取决于输入信号的频率。

例：图示均衡器。

如果您拥有一台立体声收音机，可知收音机有一个图示均衡器，实际上就是一个传递函数可调的滤波器。通常，均衡器各调节键的位置决定了传递函数的幅值随频率的变化。(实际上，在立体收音机系统中的均衡器包含两个滤波器——一个是左声道，一个是右声道，而且被绑定控制。)用户可以调节传递函数来获得幅值和频率的最佳比值，达到最满意的听觉效果。

6.1.3.1　具有多频率成分的输入信号

如果在滤波器输入信号中含有多个不同频率的成分，可以先单独对每个频率成分的输入信号求相应的输出，然后再把各个输出信号叠加一起，这就是在 2.7 节介绍的叠加法的应用。

对滤波器输入一个含多频率正弦量的信号，求其输出的步骤如下：

1. 写出输入信号每个正弦分量的频率和相量表达式；
2. 对每个正弦分量求相应传递函数的复数值(相量式)；
3. 将每个正弦分量的相量与相应的传递函数相量相乘，得到每个输入信号的每个正弦分量的输出相量；
4. 将每个输出相量转换为各频率下的时域正弦量形式，再将这些时域正弦量叠加起来。

例 6.2　含多个频率正弦分量的输入信号作用于传递函数的计算。

设图 6.4 所示滤波器的输入信号如下：

$$v_{in}(t) = 3 + 2\cos(2000\pi t) + \cos(4000\pi t - 70°)$$

解：先把输入信号分为三部分。

第一部分：

$$v_{in1}(t) = 3$$

第二部分：

$$v_{in2}(t) = 2\cos(2000\pi t)$$

第三部分：

$$v_{in3}(t) = \cos(4000\pi t - 70°)$$

各正弦分量信号频率分别为 0、1000 Hz 和 2000 Hz，参照图 6.4 所示的传递函数，可得

$$H(0) = 4$$

$$H(1000) = 3\angle 30°$$

和

$$H(2000) = 2\angle 60°$$

第一部分的直流输出量：

$$v_{out1} = H(0)v_{in1} = 4 \times 3 = 12$$

其余两部分的输出相量：

$$\mathbf{V}_{out2} = H(1000) \times \mathbf{V}_{in2} = 3\angle 30° \times 2\angle 0° = 6\angle 30°$$

$$\mathbf{V}_{out3} = H(2000) \times \mathbf{V}_{in3} = 2\angle 60° \times 1\angle -70° = 2\angle -10°$$

接下来，把相量转化为时域函数：

$$v_{out1}(t) = 12$$

$$v_{out2}(t) = 6\cos(2000\pi t + 30°)$$

和

$$v_{out3}(t) = 2\cos(4000\pi t - 10°)$$

最后，把各部分的输出叠加，得到输出电压为

$$v_{out}(t) = v_{out1}(t) + v_{out2}(t) + v_{out3}(t)$$

和

$$v_{out}(t) = 12 + 6\cos(2000\pi t + 30°) + 2\cos(4000\pi t - 10°)$$

注意：在例 6.2 中，不能将相量 $\mathbf{V}_{out2}$ 和 $\mathbf{V}_{out3}$ 直接相加，因为相量是用来表征所有同频率的正弦函数。因此，在各成分量相加之前必须把相量转化为时域信号。

实际生活中承载信息的信号包含上千万个正弦分量，原则上，用例 6.2 给出的方法步骤都能求解任一个输入信号的输出，但是，因为项数太多显得烦琐而难以执行。幸运的是没必要这样做，最重要的是理解其原理。总之，线性电路(或者其他系统，只要输入和输出之间的关系能用线性时不变微分方程描述)都可以进行如下处理：

1. 把输入信号分解成各个频率的正弦分量；
2. 各分量因各自的频率不同，通过传递函数改变各自的幅值和相位；
3. 将各单一频率的时域输出值叠加，产生整个输出结果。

该过程如图 6.5 所示。

由于传递函数决定了各部分输入量在各自频率上幅值和相位的改变，所以滤波器的传递函数很重要。

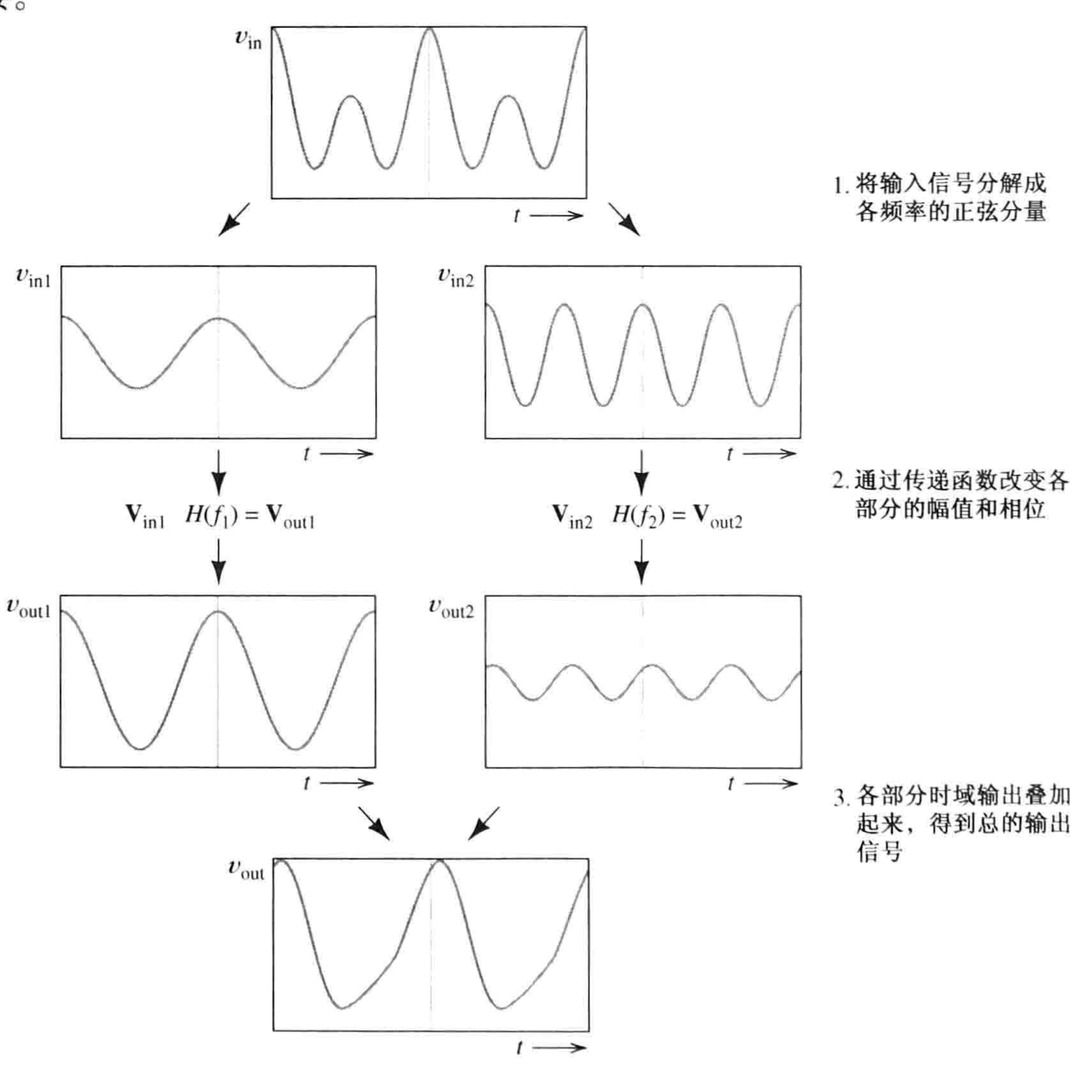


图 6.5　滤波器的工作过程是：将输入信号分解后分别改变各信号分量的幅值和相位。最后，将各分量叠加产生输出信号

6.1.3.2　传递函数的实验测定

为了使用实验方法来确定滤波器的传递函数，将正弦信号源连接到输入端口，测量输出和输入的幅度和相位，再将输出相量除以输入相量，对于每个有意义的频率都重复上述过程。如图 6.6 所示，分别用各种仪器如电压表和示波器来测量幅值和相位。

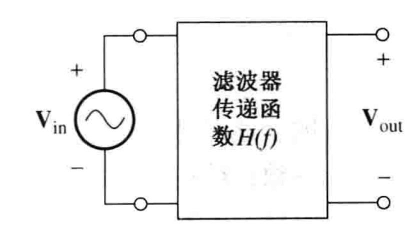


图 6.6　为了使用实验方法来确定滤波器的传递函数，将正弦信号源连接到输入端口，测量输出和输入的幅度和相位，再将输出相量除以输入相量，对于每个有意义的频率都重复上述过程

在本章的后几节中，我们将用数学分析方法计算几个相对简单的电路的传递函数。

练习6.2　已知图 6.4 所示的传递函数，输入信号为 $v_{in}(t)=2\cos(1000\pi t+20°)+3\cos(3000\pi t)$，试求输出信号的表达式。

答案： $v_{out}(t)=7\cos(1000\pi t+35°)+7.5\cos(3000\pi t+45°)$。

练习6.3　已知图 6.4 所示的传递函数，输入信号为 $v_{in}(t)=1+2\cos(2000\pi t)+3\cos(6000\pi t)$，试求输出信号的表达式。

答案： $v_{out}(t)=4+6\cos(2000\pi t+30°)$，注意 3000Hz 的信号分量被滤波器消除了。

实际应用6.1　有源消声器

在飞机或其他飞行物中噪声和颤动令乘客厌烦，在降低噪声级别上传统的消声材料非常有效，但若应用到飞行物中，则因量多、体积大而几乎不实用。另一种可替代的方案就是设计一种消噪声的电子系统，如图 PA6.1 所示。在噪声源（如发动机）附近装一个麦克风，在噪声进入旅客区域前进行采样，转化的电信号通过滤波器，该滤波器由专用的计算机进行连续调节，使之与声音通道的传递函数相匹配。最终，得到一个反相的信号，并送到扬声器（喇叭），而来自扬声器的信号与噪声反相，可消除部分噪声。另一套麦克风装在旅客的头枕中，监视着能被乘客感受到的声音，以便让计算机将滤波器调节到最好的位置来消除噪声。

图 PA6.1

近来，基于以上原理并包含所有该系统成分的消音系统已出现在轻便的头戴耳机中，飞机上的旅客戴上耳机，便可以享受到更安静、舒适的旅行。

要获得更多的信息，可以查看 1994 年 9 月出版的《航天工程》中的“噪声与振动控制”一

文。根据该文报道，该套装置重50～100磅，而用传统的消声材料要达到差不多的效果则需要1000磅重。

资料来源："Anti-noise system，"*Aerospace Engineering*，December 1993，pp. 15-16；L. E. Trego，"Noise and vibration control，"*Aerospace Engineering*，September 1994，pp. 10-12.

6.2 一阶低通滤波器

我们来看图6.7所示电路，该电路有助于通过低频段的信号成分而阻止高频率段的信号（换言之，对低频率信号而言，输出几乎和输入一致；对高频率而言，输出幅值远远小于输入）。在第4章，我们知道可用一阶微分方程来描述该电路，正因如此，该电路被称为一阶低通滤波器。

为得到该电路的传递函数，假设输入一个相量为$\mathbf{V}_{in}$的正弦信号，然后分析在频率为f的信号源函数作用下该电路的工作情况。

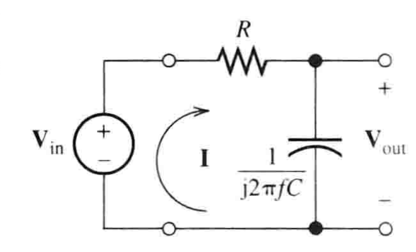


图6.7 一阶低通滤波器

电流相量$\mathbf{I}$等于输入的电压相量除以该电路的复阻抗，得：

$$\mathbf{I}=\frac{\mathbf{V}_{in}}{R+1/j2\pi fC} \tag{6.3}$$

输出的电压相量等于电流相量$\mathbf{I}$乘上电容的复阻抗，得：

$$\mathbf{V}_{out}=\frac{1}{j2\pi fC}\mathbf{I} \tag{6.4}$$

将式(6.3)中的电流$\mathbf{I}$代入式(6.4)，有

$$\mathbf{V}_{out}=\frac{1}{j2\pi fC}\times\frac{\mathbf{V}_{in}}{R+1/j2\pi fC} \tag{6.5}$$

而传递函数是输出相量与输入相量的比值：

$$H(f)=\frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} \tag{6.6}$$

经整理得：

$$H(f)=\frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}}=\frac{1}{1+j2\pi fRC} \tag{6.7}$$

令

$$f_B=\frac{1}{2\pi RC} \tag{6.8}$$

则传递函数为

$$H(f)=\frac{1}{1+j(f/f_B)} \tag{6.9}$$

6.2.1 传递函数的幅值和相位图

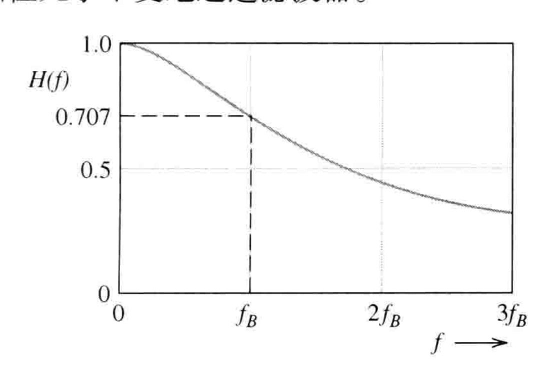
显然，传递函数H(f)是一个具有幅值和相位的复数，由式(6.9)的右式知，H(f)的幅值等于分子的幅值(单位1)除以分母的幅值，而复数的幅值等于实部的平方与虚部的平方之和开平方，所以式(6.9)的幅值为

$$|H(f)|=\frac{1}{\sqrt{1+(f/f_B)^2}} \tag{6.10}$$

由式(6.9)知，该传递函数的相位角等于分子的相位(为 0 度)减去分母的相位，因此有

$$\angle H(f) = -\arctan\left(\frac{f}{f_B}\right) \tag{6.11}$$

如图 6.8 所示传递函数的幅值和相位图，对低频率段(频率 f 接近 0)，幅值大约为 1，相位几乎为 0，意味着在低频段信号的幅值和相位几乎不受滤波器的影响，也就是低频段信号的幅值和相位几乎不变地通过滤波器。



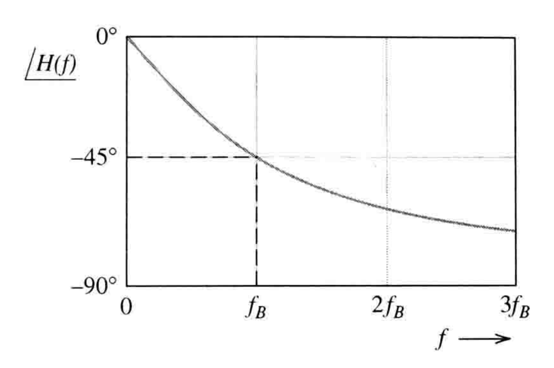


图 6.8　一阶低通滤波器传递函数的幅值和相位图

相反，对高频段信息($f \gg fB$)的传递函数的幅值几乎为零，意味着输出信号的幅值远远小于输入信号的幅值，也就是说高频段的信号被滤波器阻止。另外，在高频段传递函数的相位也接近 - 90°。因此，高频信息不仅幅值上减小，而且也出现相移。

注意：在频率 $f = f_B$ 处，输出信号的幅值等于输入信号的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$(约为0.707)倍，如果电压幅值乘以 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 因子，那么该电压加在已知电阻上所消耗的功率就只有原电压作用下功率的一半(因功率正比于电压的平方)。因此，f_B 被称为截止频率(半功率频率)。

6.2.2　传递函数的应用

由 6.1 节可知，如果滤波器的输入信号包含多个频率的正弦分量，那么应用传递函数分别计算每个正弦分量的输出，然后再把各输出加起来就得到整个输出值。

例 6.3　计算 *RC* 低通滤波器的输出。

将输入信号

$$v_{\text{in}}(t) = 5\cos(20\pi t) + 5\cos(200\pi t) + 5\cos(2000\pi t)$$

加至图 6.9 的输入端，试求输出信号的表达式。

解：该电路构成低通滤波器，其截止频率为

$$f_B = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \times (1000/2\pi) \times 10 \times 10^{-6}} = 100\text{ Hz}$$

第一部分输入信号：

$$v_{\text{in1}}(t) = 5\cos(20\pi t)$$

其相量为 $\mathbf{V}_{\text{in1}} = 5\angle 0°$，角频率 $\omega = 20\pi$，因此 $f = \frac{\omega}{2\pi} = 10\text{ Hz}$，由式(6.9)得电路传递函数为

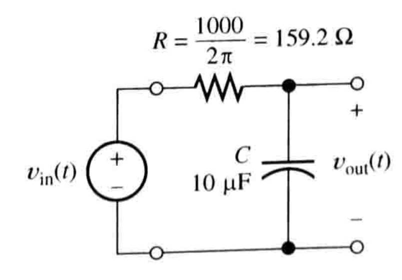


图 6.9　例 6.3 的图。其中，电阻是刻意选择的，以便于求解截止频率

$$H(f)=\frac{1}{1+\mathrm{j}(f/f_B)}$$

将第一个分量的频率 $f=10$ Hz 代入上式，有

$$H(10)=\frac{1}{1+\mathrm{j}(10/100)}=0.9950\angle{-5.71^\circ}$$

得到对应的输出相量：

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{\text{out1}}&=H(10)\times\mathbf{V}_{\text{in1}}\\&=(0.9950\angle{-5.71^\circ})\times(5\angle{0^\circ})=4.975\angle{-5.71^\circ}\end{aligned}$$

即对应的第一部分输出信号为

$$v_{\text{out1}}(t)=4.975\ \cos(20\pi t-5.71^\circ)$$

同理，第二部分的输入信号为

$$v_{\text{in2}}(t)=5\ \cos(200\pi t)$$

其相量为

$$\mathbf{V}_{\text{in2}}=5\angle{0^\circ}$$

频率 $f=100$ Hz：

$$H(100)=\frac{1}{1+\mathrm{j}(100/100)}=0.7071\angle{-45^\circ}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{\text{out2}}&=H(100)\times\mathbf{V}_{\text{in2}}\\&=(0.7071\angle{-45^\circ})\times(5\angle{0^\circ})=3.535\angle{-45^\circ}\end{aligned}$$

得到对应的第二部分输出信号为

$$v_{\text{out2}}(t)=3.535\ \cos(200\pi t-45^\circ)$$

第三部分输入信号为

$$\begin{aligned}v_{\text{in3}}(t)&=5\ \cos(2000\pi t)\\\mathbf{V}_{\text{in3}}&=5\angle{0^\circ}\\H(1000)&=\frac{1}{1+\mathrm{j}(1000/100)}=0.0995\angle{-84.29^\circ}\\\mathbf{V}_{\text{out3}}&=H(1000)\times\mathbf{V}_{\text{in3}}\\&=(0.0995\angle{-84.29^\circ})\times(5\angle{0^\circ})=0.4975\angle{-84.29^\circ}\end{aligned}$$

即对应的第三部分输出信号为

$$v_{\text{out3}}(t)=0.4975\ \cos(2000\pi t-84.29^\circ)$$

最后，把各部分的输出加起来得到总的输出：

$$\begin{aligned}v_{\text{out}}(t)=&\ 4.975\ \cos(20\pi t-5.71^\circ)+3.535\ \cos(200\pi t-45^\circ)\\&+0.4975\ \cos(2000\pi t-84.29^\circ)\end{aligned}$$

可见，该滤波器对不同输入部分的处理效果不一样，对频率 $f=10$ Hz 的部分，几乎不影响其幅值和相位；对频率 $f=100$ Hz 部分，幅值减小到 0.7071 倍，相位滞后 45°；对频率 $f=1000$ Hz 部分，幅值几乎减小为 1/10(一个数量级)。由此，该滤波器极大地阻止了高频成分的通过。

6.2.3 一阶低通滤波器的应用

一阶低通滤波器的一个简单应用就是调幅收音机中的音频控制器，通过调节 RC 电路的电阻，也就是改变滤波器的截止频率来实现。假设我们正收听远方的无线广播站传送的新闻节目，期间也收听到闪电风暴引起的干扰噪声，已知电台声音的信息成分主要集中在音频范围内

的低频段，另一方面，雷电引起的噪声在各个频段都有着同样大小的幅值。在这种情况下，我们可以调节音频控制器来降低截止频率。那么，高频段的噪声成分将被滤除，而绝大部分低频段的声音信息成分将被通过。这样，我们可以提高信噪比，使得收听的新闻更加清晰。

6.2.4 不同频率下的相量用法

已知只有在相同频率下的相量才能合并，这对于理解不同频率的相量不能相加很重要。因此，在前面的例题中，都是先用相量获得各时域函数的输出，再把各输出值相加得到总的输出值的。

练习 6.4 如图 6.10 所示滤波器，试写出传递函数 $H(f) = \dfrac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}}$ 的表达式。设 $f_B = \dfrac{R}{2\pi L}$，试写出形如式(6.9)的表达式。

练习 6.5 如图 6.11 所示，设输入信号为

$$v_{in}(t) = 10\cos(40\pi t) + 5\cos(1000\pi t) + 5\cos(2\pi 10^4 t)$$

试写出输出信号 $v_{out}(t)$ 的表达式。

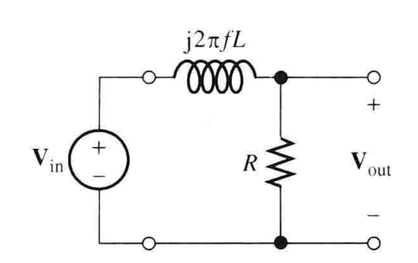


图 6.10　另一种一阶低通滤波器，练习 6.4 的图

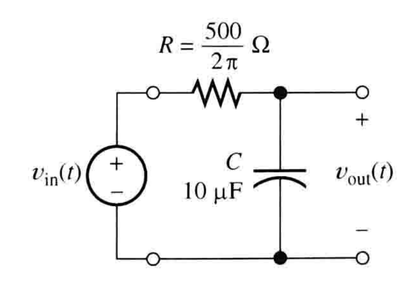


图 6.11　练习 6.5 的图

答案：

$$v_{out}(t) = 9.95\cos(40\pi t - 5.71°) + 1.86\cos(1000\pi t - 68.2°) + 0.100\cos(2\pi 10^4 t - 88.9°)$$

6.3 分贝、级联和对数频率坐标

在比较各种滤波器的性能中，常用分贝(dB)来表示传递函数的幅值。为把传递函数幅值转化为分贝，将传递函数的幅值定义为取以 10 为底的对数再乘以 20，即

$$|H(f)|_{dB} = 20\log|H(f)| \tag{6.12}$$

(传递函数实际是电压的比值，可转化为分贝，即取对数后再乘以 20 倍；另一方面，功率比值转化为分贝是取对数后再乘以 10 倍。)

表 6.2 是用分贝表示的传递函数的幅值，注意：当传递函数的幅值比单位 1 大时，其分贝值为正；若幅值比 1 小，则分贝值为负。

表 6.2 给出了一些选定的传递函数幅值对应的分贝值。注意，当传递函数的幅值大于 1 时，分贝值为正；反之，当幅值小于 1 时，分贝值为负。

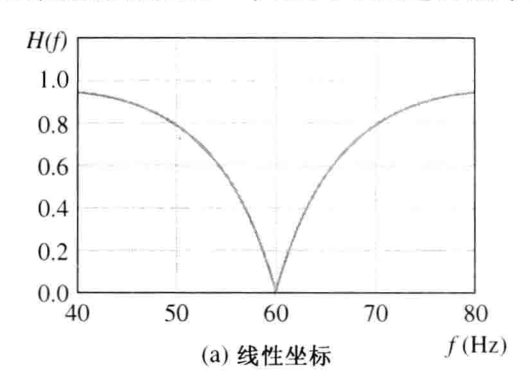
表 6.2　传递函数的幅值及分贝值

$\lvert H(f)\rvert$	$\lvert H(f)\rvert_{dB}$
100	40
10	20
2	6
$\sqrt{2}$	3
1	0
$1/\sqrt{2}$	−3
1/2	−6
0.1	−20
0.01	−40

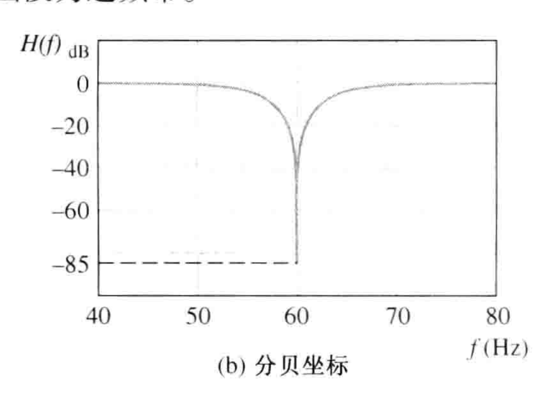
在许多应用中，滤波器对给定频率范围内滤除干扰信号的能力是非常重要的。例如，与声音信号有关的一个普遍问题就是电线上的一个微小交流电压都可能随机加到信号上，当信号送入喇叭时，其中 60 Hz 的干扰成分将产生令人厌烦的嗡嗡声(实际上，当数字技术代替模拟技术后，这个问题已彻底解决)。

通常，解决这个问题的方法是把该干扰工频电压加到想要得到的声音信号的路径消除掉。但是，有时不可能这样做。那么就只有设计出滤波器，阻止 60 Hz 的信号成分而让其他频率成分通过，这类滤波器传递函数的幅值如图 6.12(a)所示。像这样能阻止很窄频率范围内信号通过的滤波器被称为陷波(带阻)滤波器。

已知欲降低幅值较大的60 Hz 工频噪声(如大声激烈的吵闹)，传递函数幅值必须是 -80 dB 或更小，对应 $|H(f)| = 10^{-4}$ 或更小。另外，对于那些应该通过滤波器的有用信号，滤波器传递函数的幅值应该接近于1，定义可通过的频率范围段为通频带。



(a) 线性坐标



(b) 分贝坐标

图 6.12 陷波滤波器用于减少声音信号中的工频(嗡嗡)噪声

如图 6.12(a)所示，如果没有采用分贝坐标而用线性坐标画传递函数幅值图 $|H(f)|$，可以看到在同一幅图上很难清楚地显示 10^{-4} 和 1 这两个值；如果采用该坐标显示通频带信号的幅值，就不能看到在60 Hz 处的信号幅值具体小到什么程度。反之，如果采用该坐标显示60 Hz 处的幅值，则相邻频率的幅值将会超出显示范围。

但是，如果采用分贝坐标，两部分的幅值都很容易观察。图 6.12(b)是图 6.12(a)的等效分贝图。在图 6.12(b)中，可看到通频带的幅值接近 0 dB 而在 60 Hz 处幅值是足够小(不到 -80 dB)。

可见，传递函数分贝图的优点之一是能同时显示很小的幅值和很大的幅值；分贝图的另一个优点是：许多滤波器的分贝图都接近一条直线(因对频率采用了对数坐标)；而且，要理解电气工程中的一些专业术语，也必须熟悉分贝概念。

6.3.1 二端口网络的级联

如果把一个二端口网络的输出端连接到另一个二端口网络的输入端，就构成二端口网络的级联，如图 6.13 所示。第一个二端口网络的输出电压等于第二个二端口网络的输入电压，整个网络的传递函数为

$$H(f) = \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}}$$

其中，级联网络的输出电压等于第二个二端口网络的输出电压($\mathbf{V}_{out} = \mathbf{V}_{out2}$)，而且输入电压等于第一个二端口网络的输入电压($\mathbf{V}_{in} = \mathbf{V}_{in1}$)。

因此有：

$$H(f) = \frac{\mathbf{V}_{out2}}{\mathbf{V}_{in1}}$$

同时乘以和除以 $\mathbf{V}_{\text{out1}}$，得

$$H(f)=\frac{\mathbf{V}_{\text{out1}}}{\mathbf{V}_{\text{in1}}}\times\frac{\mathbf{V}_{\text{out2}}}{\mathbf{V}_{\text{out1}}}$$

再有，第一个二端口网络的输出电压等于第二个二端口网络的输入电压（$\mathbf{V}_{\text{out1}}=\mathbf{V}_{\text{in2}}$），因此，

$$H(f)=\frac{\mathbf{V}_{\text{out1}}}{\mathbf{V}_{\text{in1}}}\times\frac{\mathbf{V}_{\text{out2}}}{\mathbf{V}_{\text{in2}}}$$

得

$$H(f)=H_1(f)\times H_2(f) \tag{6.13}$$

这样，级联网络的传递函数就是单个二端口网络传递函数的乘积，该结论也适用于三个或以上的二端口网络的级联。

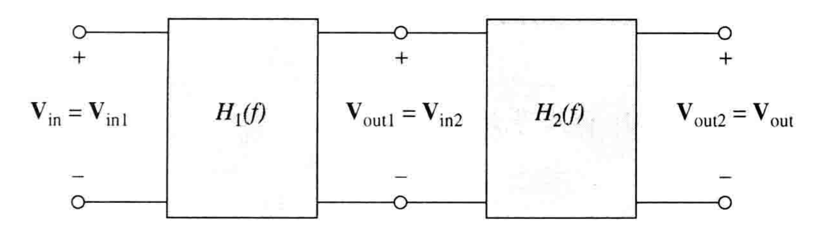


图 6.13　二端口网络的串联

应用式(6.13)的困难之处在于二端口网络的传递函数常取决于与其输出端连接的设备，由此，必须求得连接有第二个二端口网络时的 $H_1(f)$。

对式(6.13)两边幅值求对数，表达为分贝形式，则有

$$20\log|H(f)|=20\log[|H_1(f)|\times|H_2(f)|] \tag{6.14}$$

根据各项乘积的对数等于各项对数之和，得

$$20\log|H(f)|=20\log|H_1(f)|+20\log|H_2(f)| \tag{6.15}$$

表达为分贝形式：

$$|H(f)|_{\text{dB}}=|H_1(f)|_{\text{dB}}+|H_2(f)|_{\text{dB}} \tag{6.16}$$

这样，如果采用分贝表达形式，各部分传递函数的分贝幅值之和即为总级联网络的传递函数的分贝幅值。

6.3.2　对数频率坐标

在画传递函数时常用对数坐标来表示频率。在对数坐标中，坐标值每增加相等长度，表示变量乘以同一个倍数（而在线性坐标中，坐标值每增加相等长度，表示变量增加同一个固定量）。如图 6.14 所示为对数频率坐标。

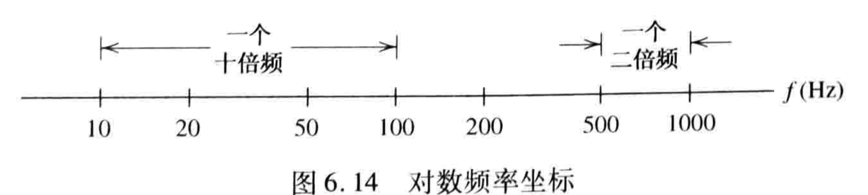


图 6.14　对数频率坐标

十倍频表示最大频率与最小频率之比为 10 倍，频率值区间从 2 Hz 到 20 Hz 是一个十倍频，同理，频率从 50 Hz 到 5000 Hz 的范围就是两个十倍频（50 Hz 到 500 Hz 是一个十倍频，500 Hz 到 5000 Hz 又是一个十倍频）。

另外还有二倍频，如频率从 10 Hz 到 20 Hz 是一个二倍频，频率从 2 Hz 到 16 Hz 有三个二倍频。

假设有频率f_1和f_2，且$f_2 > f_1$，在频率f_1和f_2之间的十倍频数的计算如下：

$$\text{十倍频数} = \log\left(\frac{f_2}{f_1}\right) \tag{6.17}$$

其中，对数以 10 为底。同理，在频率f_1和f_2之间的二倍频数为

$$\text{二倍频数} = \log_2\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = \frac{\log(f_2/f_1)}{\log 2} \tag{6.18}$$

与线性坐标相比，采用对数频率坐标画传递函数的幅值和相位图时，其优点在于从低频段的 10 Hz 到 20 Hz 以及从高频段的 10 MHz 到 20 MHz，幅值和相位的变化都可以清晰地画在同一张图上。但是，若采用线性坐标，则低频率段信息会被严重压缩，或者高频率段信息会超出显示范围。

练习 6.6 设$|H(f)| = 50$，试求等效分贝值。

答案：$|H(f)|_{\text{dB}} = 34\ \text{dB}$。

练习 6.7 (a)设$|H(f)|_{\text{dB}} = 15\ \text{dB}$，试求$|H(f)|$值。(b)如果$|H(f)|_{\text{dB}} = 30\ \text{dB}$，求$|H(f)|$值。

答案：(a)$|H(f)| = 5.62$；(b)$|H(f)| = 31.6$。

练习 6.8 (a)比 1000 Hz 大出两个二倍频的频率是多少？(b)比 1000 Hz 小 3 个二倍频的频率是多少？(c)比 1000 Hz 大两个十倍频的频率是多少？(d)比 1000 Hz 小 1 个十倍频的频率是多少？

答案：(a)4000 Hz；(b)125 Hz；(c)100 kHz；(d)100 Hz。

练习 6.9 (a)在对数频率坐标中，哪一个频率介于 100 Hz 和 1000 Hz 中间？(b)在线性坐标中，哪一个频率介于 100 Hz 和 1000 Hz 中间？

答案：(a)316.2 Hz；(b)550 Hz。

练习 6.10 (a)在频率$f_1 = 20$ Hz 到$f_2 = 15$ kHz（人耳能听到的音频范围）之间有多少个十倍频？(b)在频率$f_1 = 20$ Hz 到$f_2 = 15$ kHz 之间有多少个二倍频呢？

答案：(a)$\text{十倍频数} = \log\left(\frac{15\ \text{kHz}}{20\ \text{Hz}}\right) = 2.87$；

(b)$\text{二倍频数} = \frac{\log(15000/20)}{\log(2)} = 9.55$。

6.4 伯德图

伯德图是指用纵坐标表示二端口网络传递函数幅值的分贝量，横坐标采用对数频率坐标的图形。由于传递函数极大的频率范围，伯德图能在一张图纸上清楚地画出非常大和非常小的幅值，所以伯德图在表示传递函数上特别有用。而且，已知网络函数的伯德图在某些频率范围段内非常接近一条直线，绘图比较容易(实际上，如今采用计算机绘图，此优点已不如从前那么重要了)。与伯德图相关的术语也经常在信号处理方面的文献中遇到，当然，对伯德图的理解也容易对传递函数做出快速判断。

为阐述伯德图的概念，本节讨论一阶低通滤波器，其传递函数见式(6.9)，即

$$H(f)=\frac{1}{1+\mathrm{j}(f/f_B)}$$

其幅值函数如式(6.10)所示，为

$$|H(f)|=\frac{1}{\sqrt{1+(f/f_B)^2}}$$

把幅值函数表达式转化为分贝形式，取对数再乘以 20 倍，即

$$|H(f)|_{\mathrm{dB}}=20\log|H(f)|$$

把幅值函数代入上式，得

$$|H(f)|_{\mathrm{dB}}=20\log\frac{1}{\sqrt{1+(f/f_B)^2}}$$

运用对数性质，有

$$|H(f)|_{\mathrm{dB}}=20\log(1)-20\log\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_B}\right)^2}$$

因单位 1 的对数为 0，因此，

$$|H(f)|_{\mathrm{dB}}=-20\log\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_B}\right)^2}$$

最后，根据 $\log\sqrt{x}=\frac{1}{2}\log(x)$，得

$$|H(f)|_{\mathrm{dB}}=-10\log\left[1+\left(\frac{f}{f_B}\right)^2\right] \tag{6.19}$$

注意：当频率 $f \ll f_B$ 时，根据式(6.19)知其值接近于0。因此，对低频率段而言，传递函数的幅值接近水平直线，如图 6.15 所示的低频渐近线。另外，对于频率 $f \gg f_B$，式(6.19)近似为

$$|H(f)|_{\mathrm{dB}}\approx-20\log\left(\frac{f}{f_B}\right) \tag{6.20}$$

将频率 f 取各个值代入式(6.20)，计算得到如表 6.3 所示的近似值。连接这些值，获得如图 6.15右下方的斜线，即如图所示的高频渐近线。从图中可看到两渐近线的相交点在截止频率 f_B 处，正是由于这个原因，截止频率又叫转折频率或半功率频率。

表 6.3　式(6.20)取部分频率点的近似值

f	$\|H(f)\|_{\mathrm{dB}}$
f_B	0
$2f_B$	-6
$10f_B$	-20
$100f_B$	-40
$1000f_B$	-60

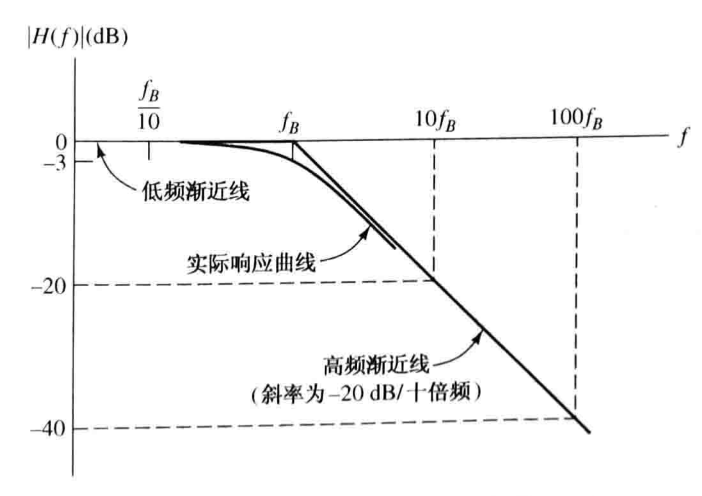


图 6.15　一阶低通滤波器的幅频伯德图

也可以看到高频处渐近线的斜率是每十倍频下降20 dB(这条斜线也可描述为每经一个二倍频幅值就要降下6 dB)。

将$f = f_B$代入式(6.19),得

$$|H(f_B)|_{\mathrm{dB}} = -3\ \mathrm{dB}$$

这样,在转折频率处的渐近线仅存在3 dB的误差。该附近的实际曲线如图6.15所示。

6.4.1 相位图

由式(6.11)可知,一阶低通滤波器传递函数的相位关系如下:

$$\angle H(f) = -\arctan\left(\frac{f}{f_B}\right)$$

由上式可知,在频率非常低处相位角几乎为0,在截止频率处相位角为-45°,在高频处相位角接近-90°。

图6.16画出了相位角随频率变化的关系,可以看到实际曲线和各直线段非常接近:

1. 对于频率$f < f_B/10$的相频特性,为一条接近0度角的水平线;
2. 对于频率介于$f_B/10$和$10f_B$之间的相频特性,实际曲线近似于一条连接0°和-90°的斜线;
3. 对于频率$f > 10f_B$的相频特性,实际曲线接近-90°的一条水平线。

相位的实际曲线非常接近这些直线段,仅有不到6°的误差。因此,用手工绘图,可以直接用直线段近似画出相位图。

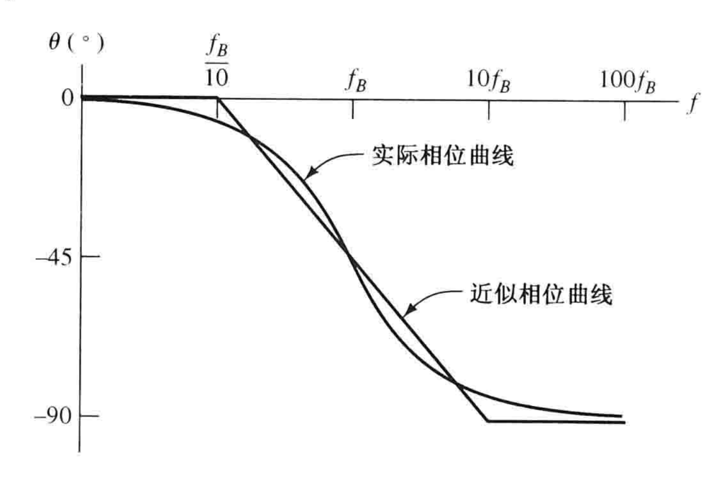


图6.16 一阶低通滤波器的相位伯德图

许多网络函数的图形都可以采用上述介绍的画简单RC低通滤波器电路函数的方法画出,但是,不鼓励广泛采用此方法。因为RLC网络的幅值特性和相频特性伯德图都可以很容易地由计算机程序绘制。介绍手工方法绘图来分析RC低通滤波器的伯德图,主要是为了介绍这些基本概念和专业术语。

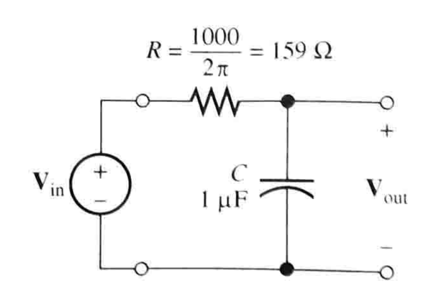


图6.17 练习6.11的电路图

练习6.11 如图6.17所示,用伯德图画出该电路的幅值和相位特性图。

答案: 见图6.18。

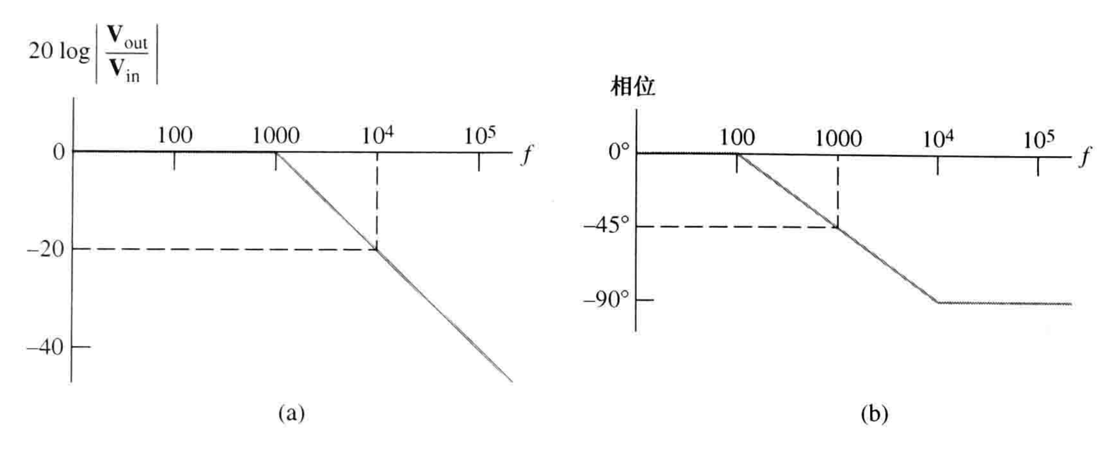


图 6.18　练习 6.11 的答案

6.5　一阶高通滤波器

图 6.19 所示电路为一阶高通滤波器，分析思路与本章前面介绍的一阶低通滤波器类似。该滤波器的传递函数为

$$H(f) = \frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{\mathbf{V}_{\text{in}}} = \frac{\text{j}(f/f_B)}{1+\text{j}(f/f_B)} \tag{6.21}$$

其中，截止频率为

$$f_B = \frac{1}{2\pi RC} \tag{6.22}$$

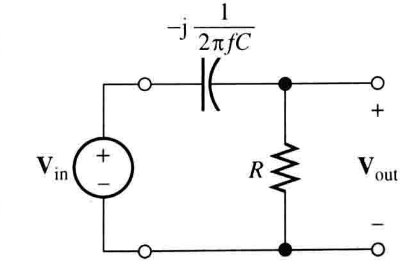


图 6.19　一阶高通滤波器

练习 6.12　用电路分析法求图 6.19 所示的传递函数，对比其传递函数和截止频率是否与式(6.21)和式(6.22)一致。

6.5.1　传递函数的幅频特性和相频特性

传递函数的幅频特性方程为

$$|H(f)| = \frac{f/f_B}{\sqrt{1+(f/f_B)^2}} \tag{6.23}$$

如图 6.20(a)所示，传递函数对直流信号(频率为 0)的对应幅值为 0；对于高频信号($f >> f_B$)，传递函数的幅值接近单位 1。由此，该滤波器阻止低频成分而通过高频成分信号，这就是高通滤波器名字的由来。

高通滤波器有利于通高频阻低频成分。例如，要记录在嘈杂环境中的鸟的鸣叫声，已知鸟鸣叫声的频率在人耳能听见的频段(20 Hz 到 15 kHz 之间)的高频部分主要在 2 kHz 以上。另外，嘈杂噪声集中在低频处，如走在颠簸不平路上的大卡车发出的隆隆声的噪声频率低于 2 kHz。如果在这种噪声环境中录下鸟儿的鸣叫，则高通滤波器非常有用。通过选择电路中的电阻 R 和电容 C 来得到截止频率 f_B，使之接近 2 kHz。这样设计出的滤波器将通过鸟儿的鸣叫而阻止大部分的噪声成分。

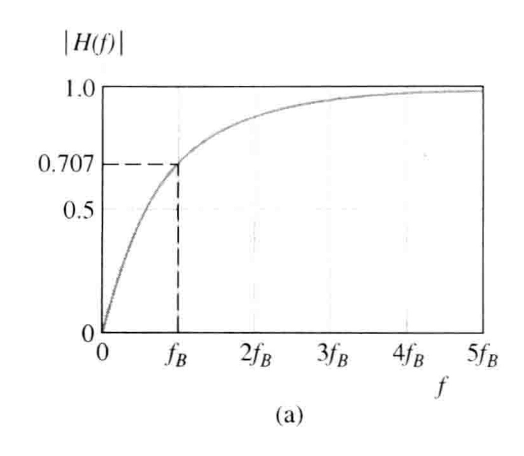
如果将正弦分量的幅值乘以 $1/\sqrt{2}$ 因子，那么该幅值电压加在一个电阻上传递的能量是原

来的一半。在$f=f_B$处，$|H(f)|=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.707$。因此，和低通滤波器一样，$f_B$被称为半功率频率（又称为转折频率、3 dB 频率和截止频率）。

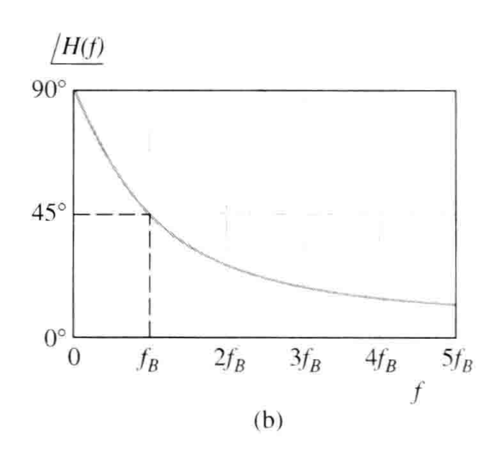
高通滤波器的相频特性方程为

$$\angle H(f)=90°-\arctan\left(\frac{f}{f_B}\right) \tag{6.24}$$

如图6.20(b)所示为相频特性曲线。



(a)



(b)

图6.20　一阶高通滤波器的幅频特性和相频特性

6.5.2　一阶高通滤波器的伯德图

采用伯德图画法来绘制传递函数更为方便，伯德图采用分贝幅值和对数频率坐标，高通滤波器传递函数的幅频特性的分贝形式如下：

$$|H(f)|_{\mathrm{dB}}=20\log\frac{f/f_B}{\sqrt{1+(f/f_B)^2}}$$

也可写成

$$|H(f)|_{\mathrm{dB}}=20\log\left(\frac{f}{f_B}\right)-10\log[1+\left(\frac{f}{f_B}\right)^2] \tag{6.25}$$

对于频率$f<<f_B$，式(6.25)右边第二部分近似为0，因此有

$$|H(f)|_{\mathrm{dB}}\approx 20\log\left(\frac{f}{f_B}\right),\qquad f<<f_B \tag{6.26}$$

对于给定的多个频率点f，由上式可计算出其对应的分贝值，如表6.4所示，连接这些值得到低频处的渐近线，如图6.21(a)左下方所示，该渐近线每经过一个十倍频幅值下降20 dB。

对于频率$f>>f_B$，由式(6.25)可知幅值几乎接近为0 dB。因此有

$$|H(f)|_{\mathrm{dB}}\approx 0,\qquad f>>f_B \tag{6.27}$$

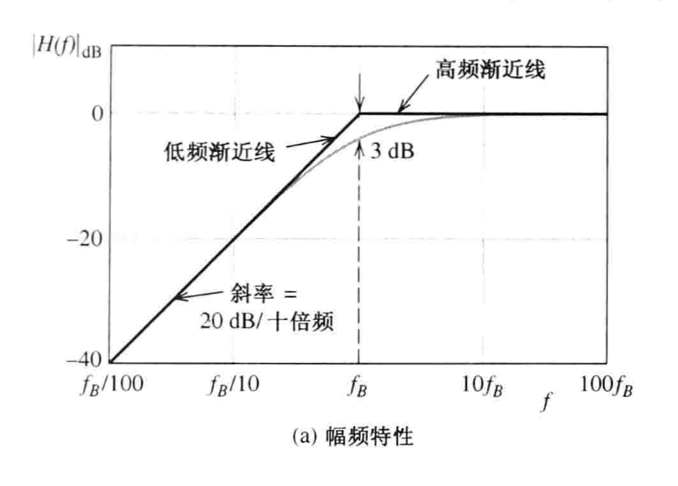
如图6.21(a)所示高频处的渐近线，两渐近线在$f=f_B$处相交（f_B称为截止频率）。

$|H(f)|_{\mathrm{dB}}$的实际曲线也在图6.21(a)中画出，可看出在频率$f=f_B$时，$|H(f)|_{\mathrm{dB}}$

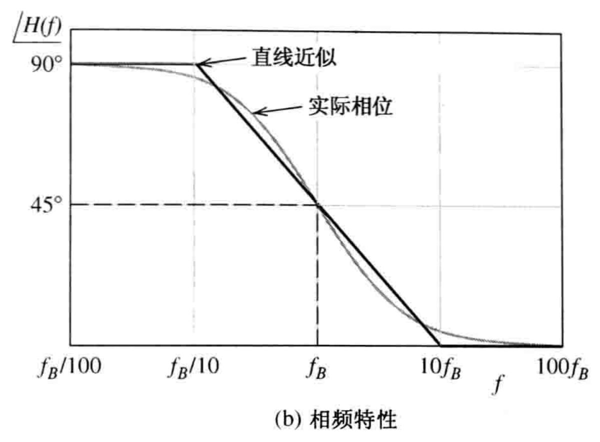
表6.4　由式(6.26)解得的各给定频率的幅度分贝值

f	$\|H(f)\|_{\mathrm{dB}}$
f_B	0
$f_B/2$	-6
$f_B/10$	-20
$f_B/100$	-40

实际值为 -3 dB，仅有 3 dB 的误差；在其他频率处，实际曲线更接近渐近线。图 6.21(b)也画出了接近直线段的相频特性伯德图及实际相位曲线。



(a) 幅频特性



(b) 相频特性

图 6.21　一阶高通滤波器的伯德图

例 6.4　求高通滤波器的截止频率。

已知某一阶高通滤波器的传递函数在频率 $f = 60$ Hz 时幅值为 -30 dB，试求其截止频率。

解： 已知一阶高通滤波器的低频渐近线具有每十倍频下降 20 dB 的斜率，可求得 30 dB 对应的十倍频数为

$$\frac{30\ \text{dB}}{20\ \text{dB/十倍频}} = 1.5\ \text{个十倍频}$$

比 60 Hz 的要大，根据式(6.17)知

$$\log\left(\frac{f_B}{60}\right) = 1.5$$

得

$$\frac{f_B}{60} = 10^{1.5} = 31.6$$

因此有

$$f_B \approx 1900\ \text{Hz}$$

在实际中常需要这样一个滤波器，其传递函数在给定频率处会大幅度减小幅值，而对该频率附近的信号影响很小。前面介绍的一阶滤波器表明，如果要使用其减小给定分量的幅度，选择的截止频率需远离想要阻止通过的信号的频率，但是其他频率信号也会受到影响。要解决这类问题就必须设计更高阶的复杂滤波电路，本章后面将介绍二阶滤波电路。

练习 6.13　如图 6.22 所示电路，如果定义截止频率为 $f_B = \dfrac{R}{2\pi L}$，根据式(6.21)写出该电路的传递函数。

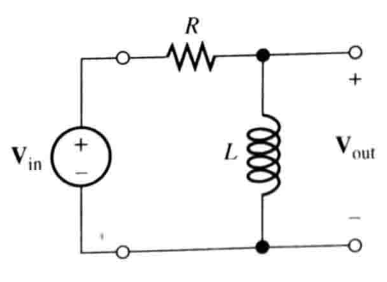


图 6.22　练习 6.13 的电路图

练习 6.14　设计一阶 RC 高通滤波器，假设在频率 1 kHz 处可减小幅值 50 dB，且已知电阻为 1 kΩ，试求该高通滤波器的电容 C 及截止频率。

答案： $C = 503$ pF，$f_B = 316$ kHz

6.6 串联谐振

本节和下一节将讨论谐振电路。以这类电路为基础而形成的滤波器比一阶滤波器具有更佳的性能，通过需要的信号而阻止非常临近的信号。这类滤波器应用在收音机的接收器中，也应用于去除声音信号中的60 Hz工频干扰的陷波滤波器。谐振现象在机械系统和电路中均可观察到，如吉他的弦就是一个机械谐振系统。

将某个频率的正弦电压源输入到谐振电路中，在电路中会产生一个比源电压大得多的电压。一个熟知的故事就是剧院歌唱家的嗓音曾经把酒杯震碎，这是因为酒杯获得外界一个正弦信号(声音)源产生谐振，引起酒杯的振动幅度足够大而碎裂。另外一个例子是塔科马港大桥在1940年的倒塌，因为风力引起大桥谐振而导致倒塌，还有一些音乐器械的丝弦、排钟、管风琴的空气柱以及其他管笛乐器等都是机械谐振系统的例子。

如图6.23所示的串联电路，从电源两端看过去的电路复阻抗为

$$Z_s(f) = \mathrm{j}2\pi fL + R - \mathrm{j}\frac{1}{2\pi fC} \tag{6.28}$$

谐振频率f_0定义为在该频率点处整个电路呈现出纯电阻性(即电抗为0)。由于电抗为0，感抗和容抗必须在数值上相等，因此有

$$2\pi f_0 L = \frac{1}{2\pi f_0 C} \tag{6.29}$$

由此可得到谐振频率f_0：

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{6.30}$$

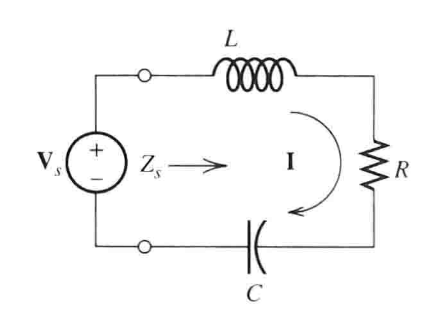


图6.23 串联谐振电路

品质因数Q_s定义为在谐振频率处的感抗与电阻之比值：

$$Q_s = \frac{2\pi f_0 L}{R} \tag{6.31}$$

将式(6.29)的L代入式(6.31)，得

$$Q_s = \frac{1}{2\pi f_0 CR} \tag{6.32}$$

将式(6.30)和式(6.31)代入式(6.28)，可推导出整个电路的复阻抗如下：

$$Z_s(f) = R\left[1 + \mathrm{j}Q_s\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)\right] \tag{6.33}$$

可见，串联谐振电路的特点是由品质因数和谐振频率决定的。

阻抗归一化幅值和相位随归一化频率变化的关系如图6.24所示，可以看到在谐振频率处阻抗最小，随着品质因数的变大，波形变得更陡峭。

6.6.1 串联谐振电路用作带通滤波器

由图6.23，有电路电流：

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{Z_s(f)}$$

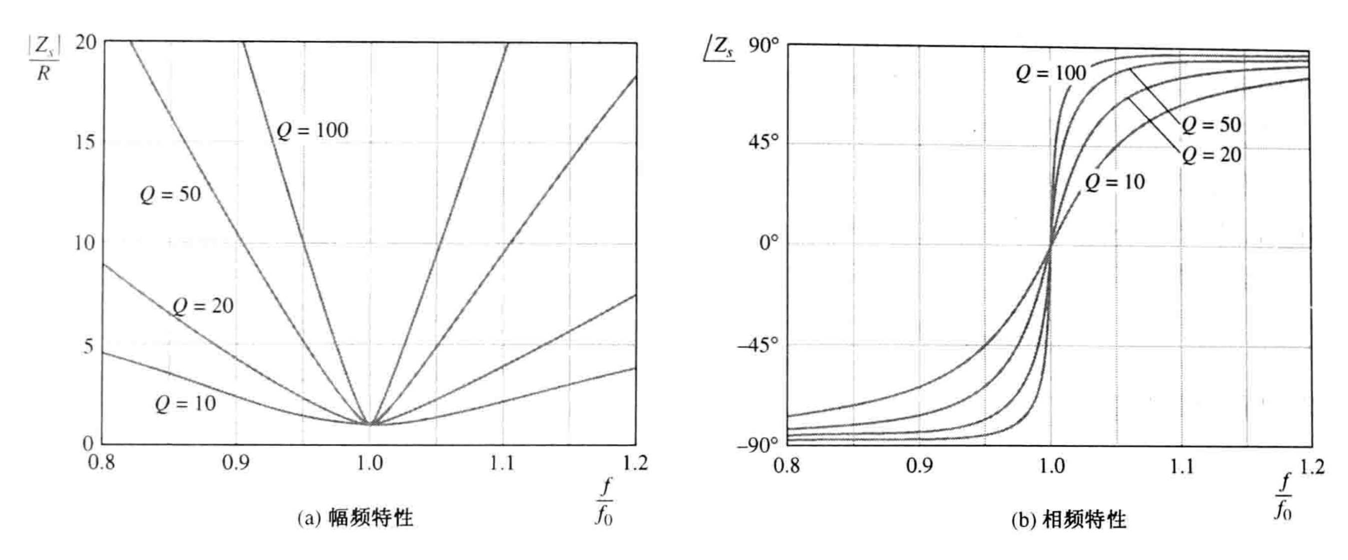


图 6.24　串联谐振电路阻抗的归一化幅频和相频特性曲线

将式(6.33)代入上式，得

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s/R}{1 + \mathrm{j}Q_s(f/f_0 - f_0/f)}$$

可得电阻电压为

$$\mathbf{V}_R = R\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{1 + \mathrm{j}Q_s(f/f_0 - f_0/f)}$$

得传递函数：

$$\frac{\mathbf{V}_R}{\mathbf{V}_s} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}Q_s(f/f_0 - f_0/f)}$$

图 6.25 所示的归一化幅值 $\mathbf{V}_R/\mathbf{V}_S$ 与频率 f 及品质因数的变化关系。

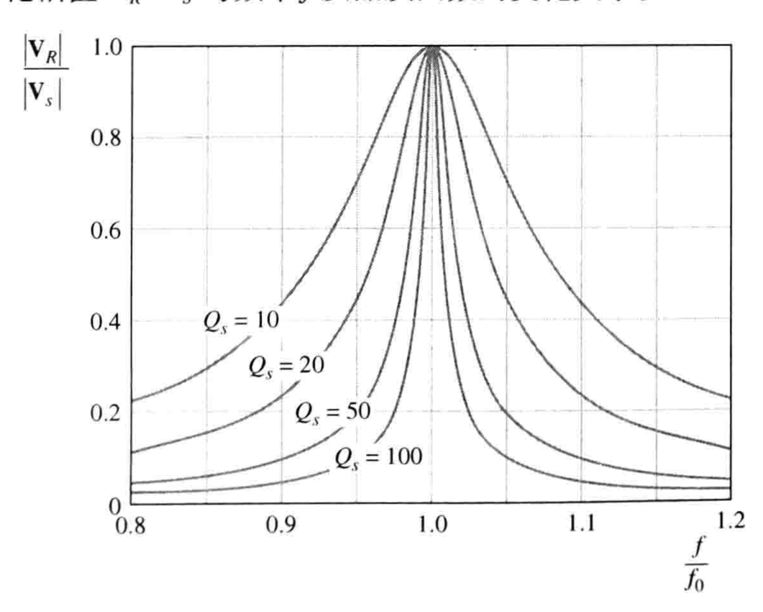


图 6.25　串联谐振带通滤波器的传递函数 $\mathbf{V}_R/\mathbf{V}_S$ 的幅值图

当电源电压的频率变化时，在低频处，谐振电路的容抗非常大，因此电流 **I** 值比较小，此时电阻上的电压比电源电压要小得多；在谐振频率处，总的阻抗最小(因为容抗和感抗相互抵消)，电流 **I** 达到最大值，此时电阻上的电压等于电源电压；在高频处，感抗非常大，电流 **I** 比较小，电阻上的电压比电源电压小得多。

设含有该谐振频率的电压源作用在该电路上，那么在谐振频率附近的这些信号通过该电路电阻时变化不大，可以顺利通过，而远离谐振频率的其他成分信号却急剧下降，被电路阻止。该谐振电路就称为带通滤波器。

截止频率的定义是滤波器的传递函数的幅值下降到$1/\sqrt{2}\approx 0.707$时的频率。对于串联谐振电路，如图 6.26 所示有两个截止频率。

滤波器带宽 B 指两个截止频率的差值：

$$B = f_H - f_L \tag{6.34}$$

对串联谐振电路，有

$$B = \frac{f_0}{Q_s} \tag{6.35}$$

当 $Q_s >> 1$ 时，截止频率分别近似为

$$f_H \approx f_0 + \frac{B}{2} \tag{6.36}$$

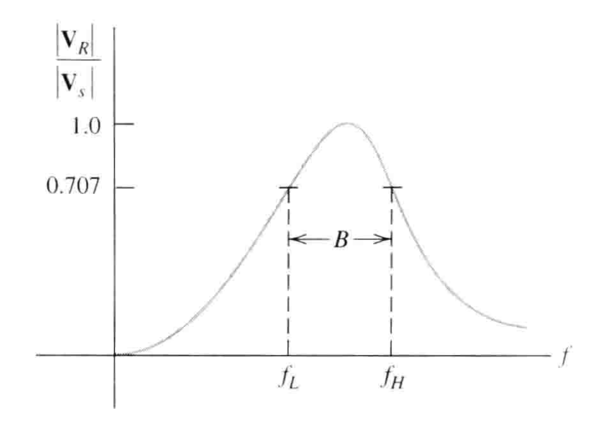


图 6.26 带宽 B 等于两个截止频率之差

和

$$f_L \approx f_0 - \frac{B}{2} \tag{6.37}$$

例 6.5 串联谐振电路。

如图 6.27 所示的串联谐振电路，计算谐振频率、带宽及截止频率。设该电压源的频率与电路的谐振频率一致，求各元件的电压相量并画出相量图。

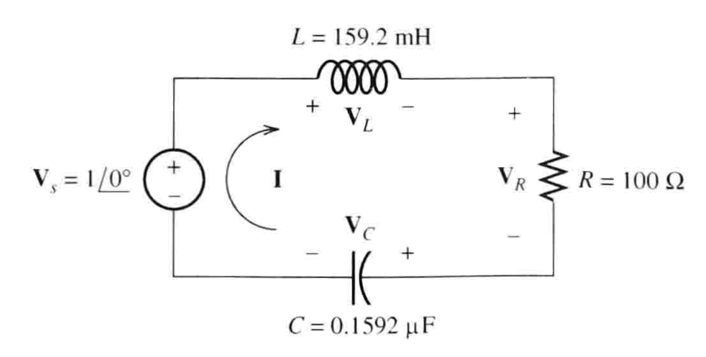


图 6.27 例 6.5 的串联谐振电路(刻意选择元器件值，以便计算的谐振频率和品质因数 Q_s 为整数)

解：首先根据式(6.30)求谐振频率：

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0.1592\times 0.1592\times 10^{-6}}} = 1000\ \text{Hz}$$

由式(6.31)计算品质因数：

$$Q_s = \frac{2\pi f_0 L}{R} = \frac{2\pi\times 1000\times 0.1592}{100} = 10$$

由式(6.35)求带宽：

$$B = \frac{f_0}{Q_s} = \frac{1000}{10} = 100\ \text{Hz}$$

由式(6.36)和式(6.37)求近似截止频率：

$$f_H \approx f_0 + \frac{B}{2} = 1000 + \frac{100}{2} = 1050\ \text{Hz}$$

$$f_L \approx f_0 - \frac{B}{2} = 1000 - \frac{100}{2} = 950\ \text{Hz}$$

在谐振频率处，分别求感抗和容抗：

$$Z_L = \text{j}2\pi f_0 L = \text{j}2\pi \times 1000 \times 0.1592 = \text{j}1000\ \Omega$$

$$Z_C = -\text{j}\frac{1}{2\pi f_0 C} = -\text{j}\frac{1}{2\pi \times 1000 \times 0.1592 \times 10^{-6}} = -\text{j}1000\ \Omega$$

可见，在谐振频率处，感抗和容抗幅值相等。电路的复阻抗为

$$Z_s = R + Z_L + Z_C = 100 + \text{j}1000 - \text{j}1000 = 100\ \Omega$$

电流的相量为

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{Z_s} = \frac{1\angle 0^\circ}{100} = 0.01\angle 0^\circ$$

各元件的电压相量为

$$\mathbf{V}_R = R\mathbf{I} = 100 \times 0.01\angle 0^\circ = 1\angle 0^\circ$$

$$\mathbf{V}_L = Z_L\mathbf{I} = \text{j}1000 \times 0.01\angle 0^\circ = 10\angle 90^\circ$$

$$\mathbf{V}_C = Z_C\mathbf{I} = -\text{j}1000 \times 0.01\angle 0^\circ = 10\angle -90^\circ$$

图 6.28 为各电压的相量图，可以看到电感和电容上的电压要比电源电压在幅值上大得多。不过，电压相量仍然满足基尔霍夫电压定律，因为从图上可看出电容电压和电感电压相位相反、大小相等，从而相互抵消。

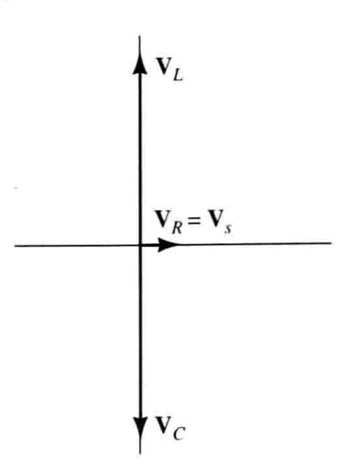


图 6.28　例 6.5 的电压相量图

由例 6.5 可知，电感及电容上的电压是电源电压的 Q_S（品质因数）倍。品质因数越大，电感和电容电压越大，这类似于剧院歌唱家的嗓音导致酒杯玻璃的振幅极大。

练习 6.15　已知 $L = 10\ \mu\text{H}$，$f_0 = 1\ \text{MHz}$，$Q_S = 50$，试求该串联谐振电路的电阻 R 和电容 C 值，以及带宽与近似截止频率。

答案：$C = 2535\ \text{pF}$，$R = 1.257\ \Omega$，$B = 20\ \text{kHz}$，$f_L \approx 990\ \text{kHz}$，$f_H \approx 1010\ \text{kHz}$。

练习 6.16　设频率为 1 MHz 的电压源 $\mathbf{V}_S = 1\angle 0^\circ$ 加在练习 6.15 的电路上，试求电感、电容及电阻元件上的电压相量。

答案：$\mathbf{V}_R = 1\angle 0^\circ$，$\mathbf{V}_C = 50\angle 90^\circ$，$\mathbf{V}_L = 50\angle 90^\circ$。

练习 6.17　已知电容 $C = 470\ \text{pF}$，谐振频率为 5 MHz，带宽为 200 kHz，试求该串联谐振电路的电阻 R 和电感 L 值。

答案：$R = 2.709\ \Omega$，$L = 2.156\ \mu\text{H}$。

6.7　并联谐振

图 6.29 所示为另一种谐振电路——并联谐振电路，该电路的复阻抗为

$$Z_p = \frac{1}{1/R + \text{j}2\pi fC - \text{j}(1/2\pi fL)} \tag{6.38}$$

与串联谐振电路类似，在谐振频率f_0处整个电路呈现纯电阻性。令式(6.38)的虚部为零可得

$$2\pi f_0 C = \frac{1}{2\pi f_0 L} \tag{6.39}$$

解得谐振频率为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{6.40}$$

这与6.6节串联谐振电路的谐振频率的表达式一致。

对并联谐振电路，定义品质因数Q_P为电阻与感抗之比值，即

$$Q_p = \frac{R}{2\pi f_0 L} \tag{6.41}$$

注意：此品质因数Q_p为串联谐振品质因数Q_s的倒数。

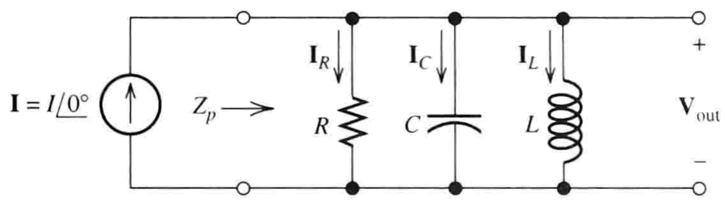


图6.29 并联谐振电路

求式(6.40)的电感L值，并将之代入式(6.41)，得到另一种形式的品质因数：

$$Q_p = 2\pi f_0 CR \tag{6.42}$$

分别求式(6.41)和式(6.42)的电感L值和电容C值，代入式(6.38)，得

$$Z_p = \frac{R}{1 + \mathrm{j}Q_p(f/f_0 - f_0/f)} \tag{6.43}$$

整个并联谐振电路的输出电压为电流相量与电阻的乘积，即

$$\mathbf{V}_{\text{out}} = \frac{\mathbf{I}R}{1 + \mathrm{j}Q_p(f/f_0 - f_0/f)} \tag{6.44}$$

假设电路的电流值为常数而改变频率，则电压幅值是频率的函数，如图6.30所示。由图可知，在谐振频率处输出电压达到最大值$V_{o\max} = RI$，该波形与串联谐振电路的电压传递函数的幅值图类似，如图6.25和图6.26所示。

我们定义截止频率f_L和f_H为：在这两个频率点处电压幅度降为最大值的$1/\sqrt{2}$，则电路的带宽为

$$B = f_H - f_L \tag{6.45}$$

也可推出带宽与截止频率和品质因数的关系式：

$$B = \frac{f_0}{Q_p} \tag{6.46}$$

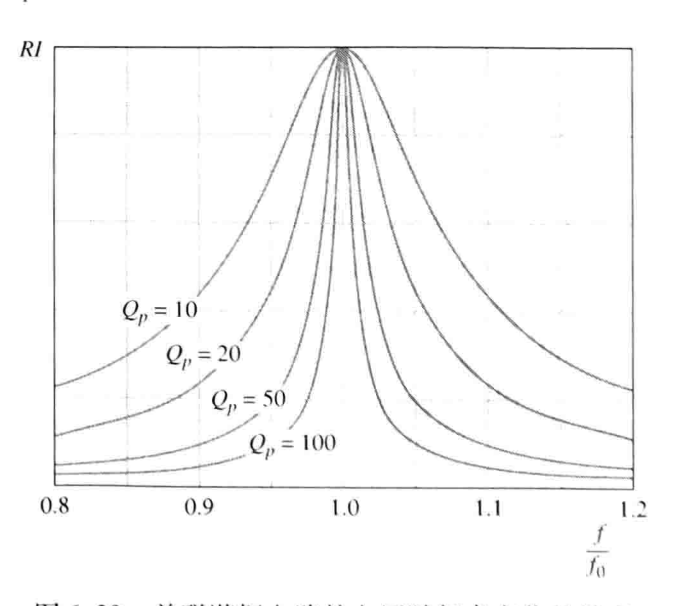


图6.30 并联谐振电路的电压随频率变化的关系

例6.6　并联谐振电路。

已知电阻 $R=10\ \text{k}\Omega$，$f_0=1\ \text{MHz}$，带宽 $B=100\ \text{kHz}$，试求该并联谐振电路的电感 L 和电容 C。设电流源 $\mathbf{I}=10^{-3}\angle 0°$，求电路谐振时各部分的电流相量并画出相量图。

解：根据式(6.46)计算出电路的品质因数：

$$Q_p=\frac{f_0}{B}=\frac{10^6}{10^5}=10$$

将 Q_P 代入式(6.41)和式(6.42)，分别得到电感和电容值：

$$L=\frac{R}{2\pi f_0 Q_p}=\frac{10^4}{2\pi\times 10^6\times 10}=159.2\ \mu\text{H}$$

$$C=\frac{Q_p}{2\pi f_0 R}=\frac{10}{2\pi\times 10^6\times 10^4}=159.2\ \text{pF}$$

谐振时，输出电压相量为

$$\mathbf{V}_{\text{out}}=\mathbf{I}R=(10^{-3}\angle 0°)\times 10^4=10\angle 0°$$

其他电流相量为

$$\mathbf{I}_R=\frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{R}=\frac{10\angle 0°}{10^4}=10^{-3}\angle 0°$$

$$\mathbf{I}_L=\frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{\text{j}2\pi f_0 L}=\frac{10\angle 0°}{\text{j}10^3}=10^{-2}\angle -90°$$

$$\mathbf{I}_C=\frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{-\text{j}/2\pi f_0 C}=\frac{10\angle 0°}{-\text{j}10^3}=10^{-2}\angle 90°$$

图6.31所示为并联谐振电路的各电流相量图，由图可知流过电感和电容的电流远远大于电流源的电流。不过，电感电流和电容电流大小相等、相位相反，因而相互抵消。

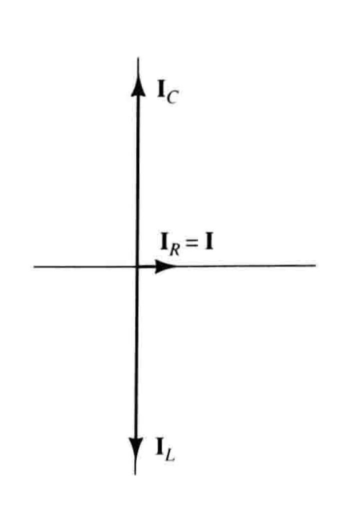


图6.31　例6.6的电流相量图

练习6.18　已知并联谐振电路的电阻 $R=10\ \text{k}\Omega$，$L=100\ \mu\text{H}$，$C=500\ \text{pF}$，试求该电路的谐振频率、品质因数及带宽。

答案：$f_0=711.8\ \text{kHz}$，$Q_P=22.36$，$B=31.83\ \text{kHz}$。

练习6.19　已知并联谐振电路的谐振频率 $f_0=10\ \text{MHz}$，$B=200\ \text{kHz}$，$R=1\ \text{k}\Omega$，试求电感 L 和电容 C。

答案：$L=0.3183\ \mu\text{H}$，$C=795.8\ \text{pF}$。

6.8　理想滤波器和二阶滤波器

6.8.1　理想滤波器

当讨论滤波器的性能时，分析理想滤波器是非常有用的。有用信号能顺利通过理想滤波器且幅值和相位不改变，而干扰信号则被完全抑制。根据滤波器工作的频带，可以把滤波器分为以下几种类型：低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器和带阻滤波器。这4种理想滤波器的传递函数 $H(f)=\mathbf{V}_{\text{out}}/\mathbf{V}_{\text{in}}$ 如图6.32所示。

- 理想低通滤波器（如图6.32(a)所示）通过频率低于其截止频率 f_H 以下的信号，而抑制频率高于 f_H 的信号。
- 理想高通滤波器（如图6.32(b)所示）通过频率高于其截止频率 f_L 以下的信号，而抑制频率低于 f_L 的信号。

- 理想带通滤波器(如图6.32(c)所示)通过频率在其截止频率(f_L和f_H)之间的信号，而抑制此频率范围之外的信号。
- 理想带阻滤波器(如图6.32(d)所示)也叫作陷波滤波器，抑制频率在其截止频率(f_L和f_H)之间的信号，而通过此频率范围之外的信号。

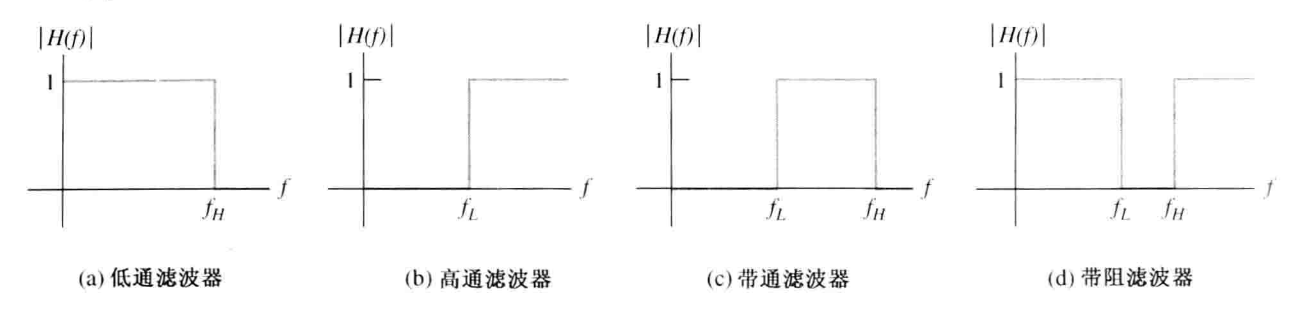


图6.32 理想滤波器的传递函数图

在本章前几节已讨论过，当信号源同时包含一个频率范围内的有用信号和另一个频率范围内的干扰信号时，就需要用到滤波器了。例如，图6.33(a)所示是被高频噪声干扰的1kHz的正弦波，当该信号通过低通滤波器时，噪声信号就被滤除了。

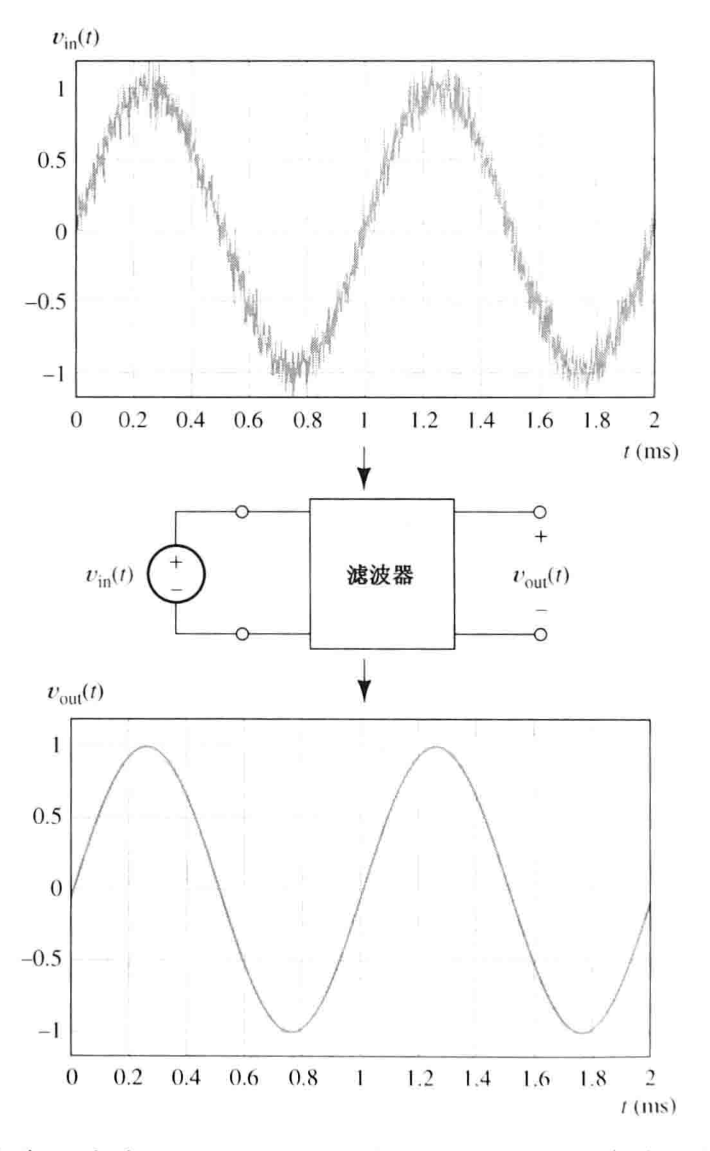


图6.33 输入电路V_{in}包含1 kHz的正弦波和高频噪声。当把V_{in}加在具有合适截止频率的理想低通滤波器上时，正弦波通过了，而高频噪声则被抑制，输出完好的正弦波

遗憾的是，构建一个理想滤波器是不可能的，只能用真实的电路来近似得到理想滤波器。随着滤波电路复杂程度的增加，可以设计出能更好保留有用信号抑制干扰信号的滤波器。因此，二阶电路比本章前几节中讨论的一阶电路性能更佳，更接近理想滤波器。

6.8.2　二阶低通滤波器

如图 6.34(a)所示，一个以 6.6 节中串联谐振电路为基础的二阶低通滤波器，它的特性由其谐振频率 f_0 和品质因数 Q_S 决定，谐振频率 f_0 和品质因数 Q_S 的值分别见式(6.30)和式(6.31)。由此可得电路的传递函数为

$$H(f)=\frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{\mathbf{V}_{\text{in}}}=\frac{-\mathrm{j}Q_S(f_0/f)}{1+\mathrm{j}Q_S(f/f_0-f_0/f)} \tag{6.47}$$

由图 6.34(c)所示传递函数的幅频特性伯德图可见，当 $Q_S \gg 1$ 时，传递函数的幅值在谐振频率附近达到最大值。通常，在设计一个滤波器时，我们希望增益在通频带之间能近似为恒值，所以选择 $Q_S \approx 1$。(事实上，$Q_S = 0.707$ 已经是传递函数的幅值不会在下降之前呈现上升趋势的最大值，此时传递函数的幅频响应图最平坦，也称其为巴特沃思函数，经常用于低通滤波器。)

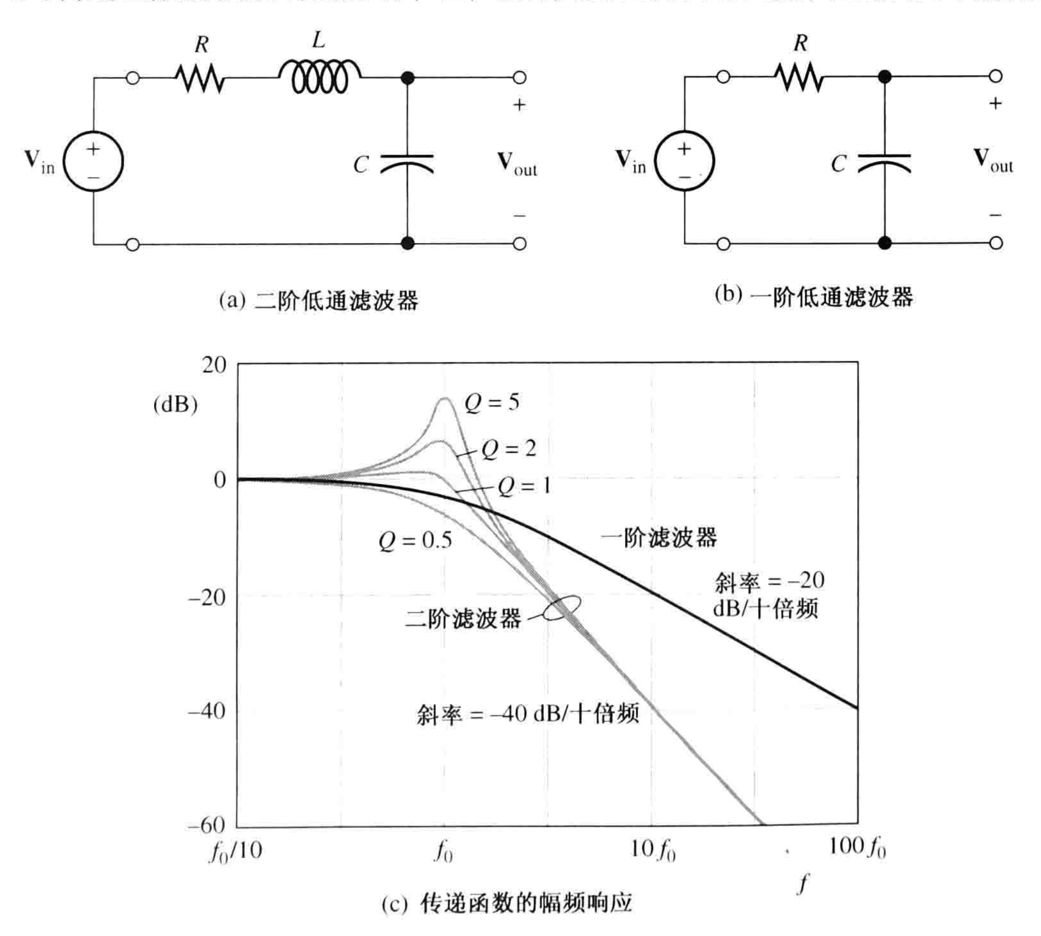


图 6.34　低通滤波器及其传递函数的幅频响应

6.8.3　比较一阶和二阶滤波器

为了便于比较，一阶低通滤波器及其传递函数伯德图分别如图 6.34(b)和图 6.34(c)所示。一阶电路的特性由其截止频率 $f_B = 1/2\pi fRC$ 决定(在比较时，令 $f_B = f_0$)。由此可见，当频率大于 f_0 时，二阶滤波器的传递函数的幅值比一阶滤波器衰减速度快得多(−40 dB/十倍频比 −20 dB/十倍频)。

6.8.4 二阶高通滤波器

图6.35(a)所示是一个二阶高通滤波器，其幅频响应伯德图如图6.35(b)所示。同理，我们通常希望传递函数在通频带处的幅值尽可能恒定，所以选择 $Q_s \approx 1$。(换句话说，我们通常希望设计的滤波器与理想滤波器越接近越好。)

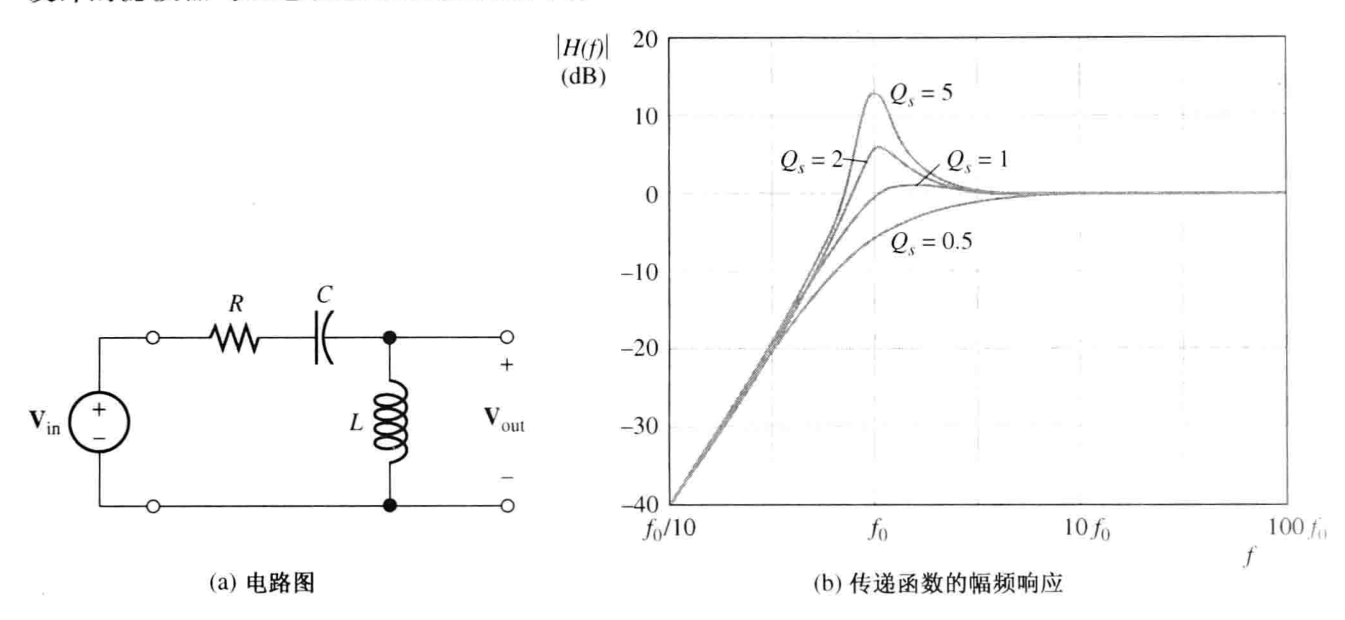


图6.35 二阶高通滤波器和不同 Q_s 下传递函数的幅频响应

6.8.5 二阶带通滤波器

图6.36(a)所示是一个二阶带通滤波器，其幅频响应伯德图如图6.36(b)所示。由式(6.34)和式(6.35)可得带通滤波器的带宽为

$$B = f_H - f_L$$

有

$$B = \frac{f_0}{Q_s}$$

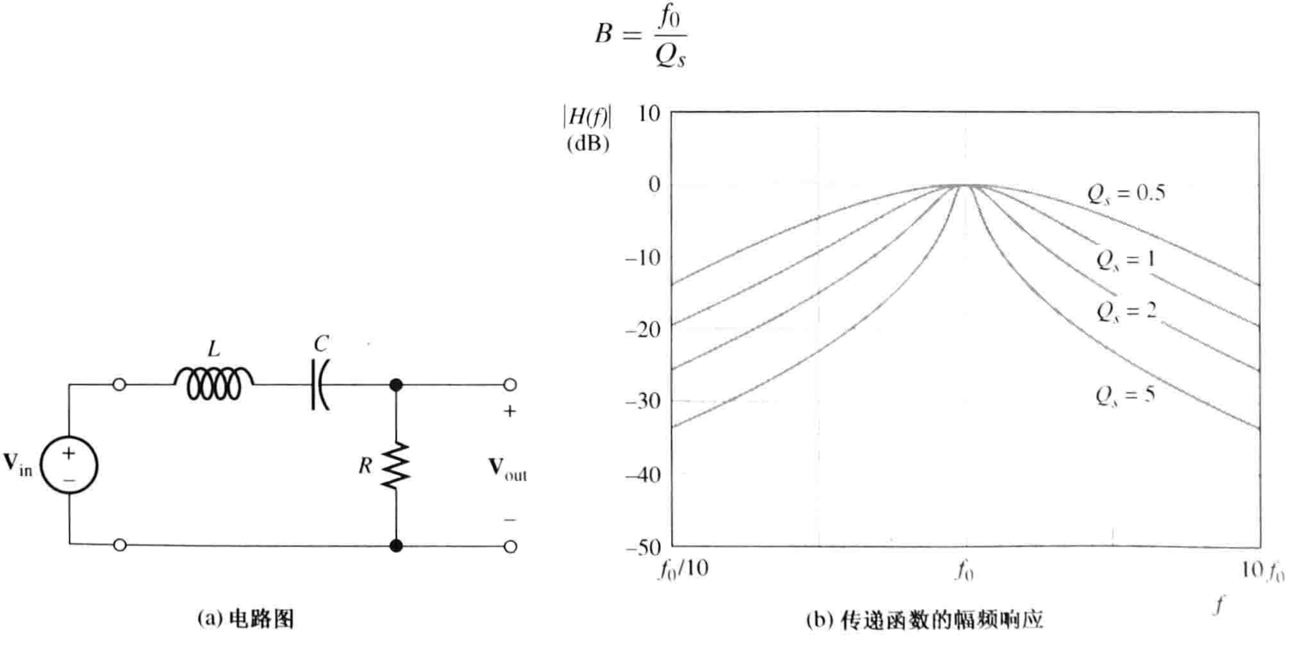


图6.36 二阶带通滤波器和不同 Q_s 下传递函数的幅频响应

6.8.6　二阶带阻(陷波)滤波器

图6.37(a)所示是一个二阶带阻滤波器，其幅频响应伯德图如图6.37(b)所示。理论上，在 $f = f_0$ 处，其传递函数的幅值应该为0；若用分贝值表示，对应为 $|H(f_0)| = -\infty$ dB。然而，由于真实的电感总是包含有电阻，所以在实际电路中频率为 f_0 的分量不可能被完全抑制。

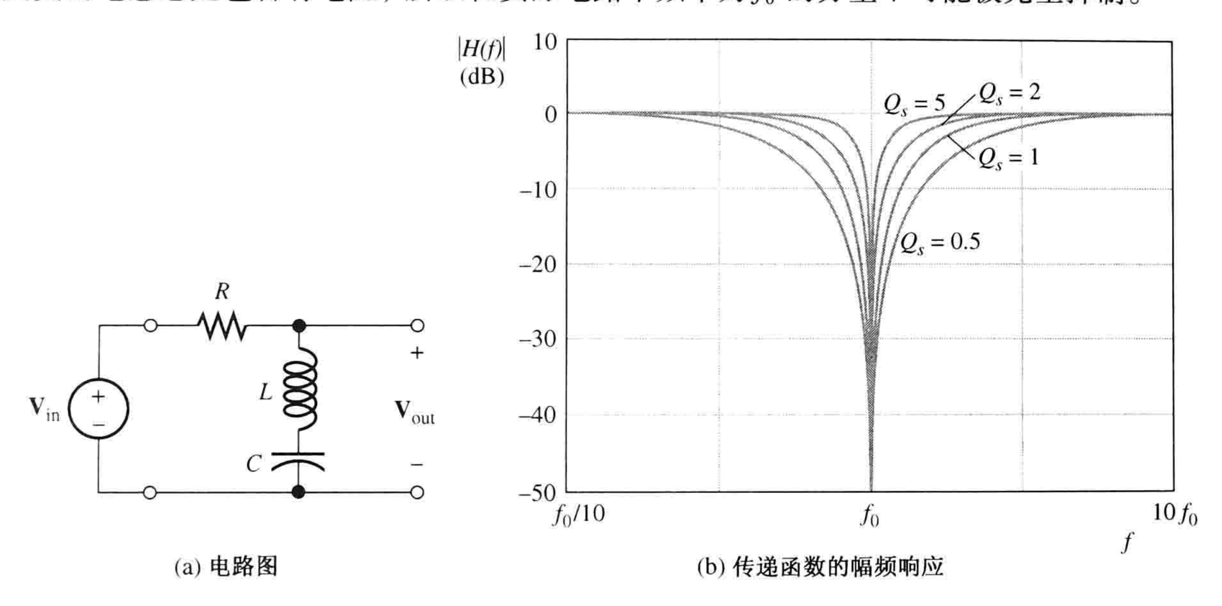


图6.37　二阶带通滤波器和不同 Q_s 下传递函数的幅频响应

例6.7　滤波器设计。

设计一个滤波器，要求通过频率1kHz以上的信号而抑制频率低于1 kHz的信号。已知 L = 50 mH，试选择合适的二阶电路结构，并计算其他参数的具体值。

解： 由于要求通过高频信号而阻止低频信号，因此需要一个高通滤波器。图6.35(a)所示便是二阶高通滤波器的电路图，其对应的传递函数幅值图如图6.35(b)所示。通常，为了使传递函数在其通带范围内近似为恒定，令 $Q_s \approx 1$。根据题意，为了使1 kHz以上的信号通过且滤除1 kHz以下的(至少部分)信号，取 $f_0 \approx 1$ kHz。由式(6.30)得电容值为

$$C = \frac{1}{(2\pi)^2 f_0^2 L} = \frac{1}{(2\pi)^2 \times 10^6 \times 50 \times 10^{-3}}$$
$$= 0.507\ \mu\text{F}$$

由式(6.31)计算电阻值：

$$R = \frac{2\pi f_0 L}{Q_s} = \frac{2\pi \times 1000 \times 50 \times 10^{-3}}{1} = 314.1\ \Omega$$

滤波器电路图和参数值如图6.38所示。

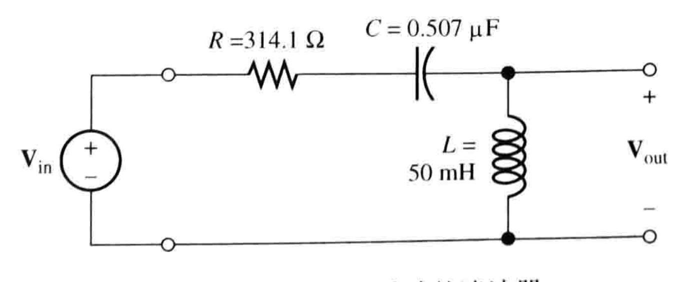


图6.38　例6.7中设计的滤波器

在上个例子中,我们在设计滤波器时也许最终不会用到计算的准确值,理由如下:首先,大小经修正为特定的标准值后的电容和电阻更容易得到;此外,由于要求设计一个抑制频率低于1 kHz以及通过频率高于1 kHz的滤波器,便简单地选择f_0 = 1 kHz,根据重点是抑制低频信号还是使高频信号幅值不变地通过,可以小小地调整f_0来更好地满足要求;最后,Q_s的选择在某种程度上也是任意的。实际中,我们使用计算得到的参数作为切入点,然后,在实验过程中调整滤波器以达到满意的效果。

练习6.20 设计一个滤波器,要求通过频率低于5 kHz的信号而抑制频率高于5 kHz的信号。已知L = 50 mH,试选择合适的二阶电路结构并计算其他参数的具体值。

答案: 见图6.39。

练习6.21 设计一个滤波器,要求通过频率在f_L = 45 kHz到f_H = 55 kHz之间的信号,而抑制高于f_H或低于f_L的信号。已知电感L = 1 mH,画出电路图。

答案: 滤波器应为带通滤波器,$f_0 \approx$ 50 kHz, Q_s = 5,电路图如图6.40所示。

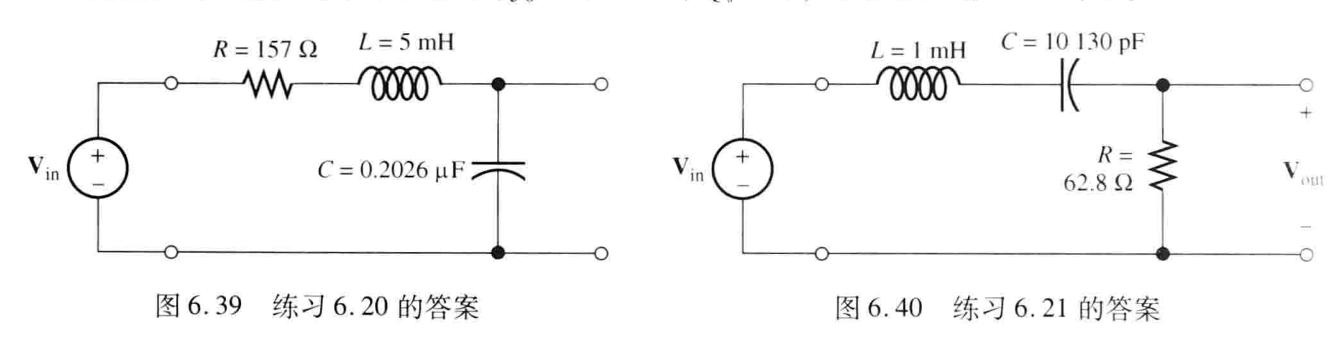


图6.39 练习6.20的答案 图6.40 练习6.21的答案

6.9 使用MATLAB软件求传递函数和伯德图

本章到目前为止已经讲述了如何用手工方法绘制简单滤波器的伯德图。虽然手工绘图的方法也适用于更加复杂的电路,但是使用电脑软件求传递函数和绘制伯德图会更加快速、更加精确。

因为微小的程序错误都能导致错误的结果,所以,对于计算机生成的伯德图进行独立检查是很好的习惯。例如,在信号频率很高或者很低时,对一个非常复杂的电路进行手工分析很容易。在很低的频率点,如4.2节所讲,电感相当于短路,电容相当于开路,然后用短路和开路分别代替电感和电容,简化电路,求得低频点的传递函数的幅值,这样便可代入此值来检查验证计算机生成的伯德图。

同理,在高频点处,电感相当于开路,电容相当于短路。接下来,我们将用一个例子来阐述这种方法。

例6.8 计算机生成的伯德图。

图6.41所示是一个陷波滤波器的电路图。使用MATLAB软件绘制其传递函数$H(f) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$的幅频响应伯德图,频率范围从10Hz到100kHz。同时,手工计算在频率很高和很低时的电路参数,用结果来检查所得的伯德图,并根据伯德图求得最大衰减处的频率及此时传递函数的幅值。

解: 由分压公式可得滤波器的传递函数为

$$H(f) = \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} = \frac{R_3}{R_1 + R_3 + 1/[j\omega C + 1/(R_2 + j\omega L)]}$$

绘制伯德图的 MATBAB 源程序如下：

```
clear
% Enter the component values:
R1 = 90; R2 = 10; R3 = 100;
L = 0.1; C = 1e-7;
% The following command generates 1000 frequency values
% per decade, evenly spaced from 10^1 to 10^5 Hz
% on a logarithmic scale:
f = logspace(1,5,4000);
w = 2*pi*f;
% Evaluate the transfer function for each frequency.
% As usual, we are using i in place of j:
H = R3./(R1+R3+1./(i*w*C + 1./(R2 + i*w*L)));
% Convert the magnitude values to decibels and plot:
semilogx(f,20*log10(abs(H)))
```

生成的伯德图如图 6.42 所示，可见频率在 1591 Hz 左右的信号被极大地抑制了，而高于或低于 1591 Hz 的信号则通过了滤波器，这就是陷波滤波器名字的由来，其最大衰减量为 60 dB。

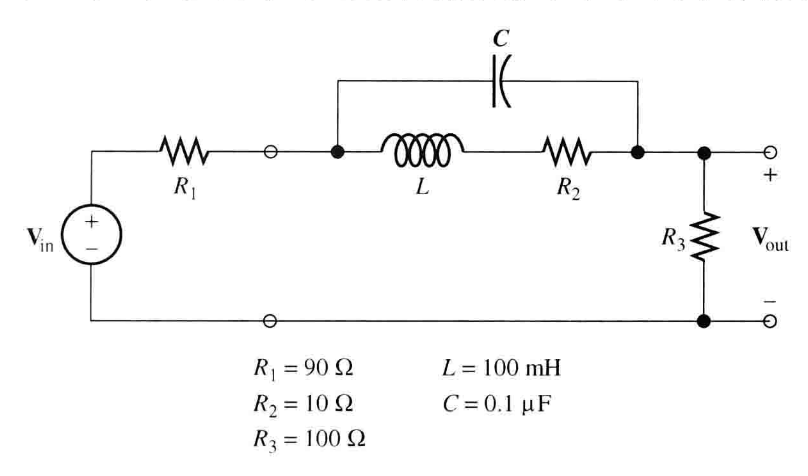


图 6.41　例 6.8 的滤波器

此源文件命名为 Example_6_8，保存在 MATLAB 文件夹里，可以使用 MATLAB 软件运行这个源程序并查看运行结果。（如何进入 MATLAB 文件夹，可参考附录 F。）然后，还可以使用图形窗口的工具栏将伯德图放大，从图中精确地读出陷波频率和最大衰减量。

指令

```
f = logspace(1,5,4000)
```

产生了含有 4000 个频率值的数组，从 10^1 Hz 到 10^5 Hz，每十倍频取 1000 个频率点，平均地分布在对数坐标轴上。（通常取每十倍频 100 个点，但是由于这个传递函数幅值在频率 1590 Hz 附近变化得太快，所以为了精确知道陷波的位置和深度，我们增加了点数。）

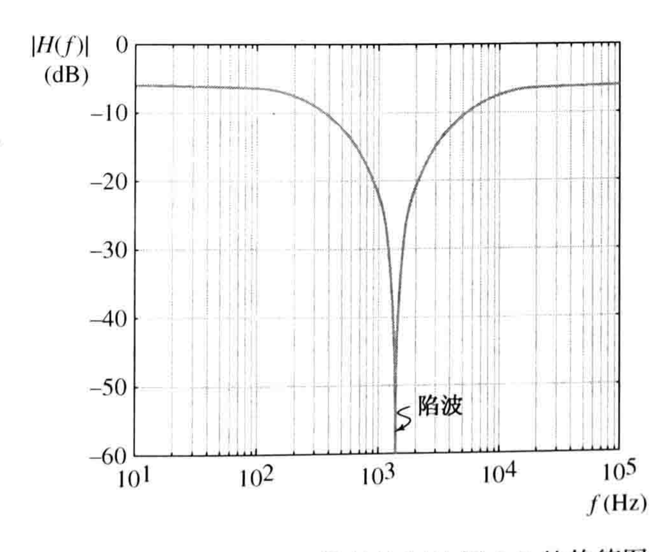


图 6.42　使用 MATLAB 软件绘制的例 6.8 的伯德图

为了简单验证我们的分析和程序，首先，求传递函数在 $f = 0$（即直流）时的值，此时电感相当于短路，电容相当于开路，电路就演变成由电阻 R_1、R_2、R_3 组成的简单分压电路。由此可得

$$H(0)=\frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{\mathbf{V}_{\text{in}}}=\frac{R_3}{R_1+R_2+R_3}=0.5$$

转化为分贝值，有

$$H_{\text{dB}}(0)=20\log(0.5)=-6\text{ dB}$$

此结果与图中 10 Hz 处的分贝值一致。

其次，用短路代替电容，开路代替电感，求传递函数在非常高的频率点的幅值。电路简化后就成了由电阻 R_1 和 R_3 组成的简单分压电路，从而有

$$H(\infty)=\frac{R_3}{R_1+R_3}=0.5263$$

分贝值为

$$H_{\text{dB}}(\infty)=20\log(0.5263)=-5.575\text{ dB}$$

这与伯德图中 100 kHz 处的分贝值非常近似。

6.9.1 使用符号工具箱导出传递函数

在上一个例子中，运用分压原理能够很容易获得传递函数；不过，对于更加复杂的电路，手工求解非常耗时。另一个可行方法就是使用 MATLAB 符号工具箱(Symbolic Toolbox)导出传递函数。求解步骤如下：

1. 令输入电压 $\mathbf{V}_{\text{in}}=1$ V；
2. 选择电路的节点电压作为变量，其中包含输出电压 $\mathbf{V}_{\text{out}}$；
3. 列出节点电压方程；
4. 使用"solve"指令解方程得到输出电压 $\mathbf{V}_{\text{out}}$(由于我们令输入电压为1V，所以解得的输出电压即为传递函数)；
5. 定义一个包含一系列频率值的行相量，使用"subs"指令将这些频率值代入传递函数，计算传递函数值；
6. 将结果用图形表示。

(这个步骤也适用于其他类型的传递函数，比如输出电流/输入电流。)下面用例子来阐明。

例 6.9 使用 MATLAB 符号工具箱绘制伯德图。

如图 6.43 所示的电路图，绘制其传递函数 $H(f)=\mathbf{V}_{\text{out}}/\mathbf{V}_{\text{in}}$ 的幅频响应伯德图，频率范围从 100kHz 到 10MHz，手工检查传递函数在信号频率非常高和非常低时的值。

解： 首先，设输入电压 $\mathbf{V}_{\text{in}}$ 为 1V，然后选择图中的节点电压 $\mathbf{V}_1$、$\mathbf{V}_2$ 和 $\mathbf{V}_3$，注意，$\mathbf{V}_3$ 即是输出电压 $\mathbf{V}_{\text{out}}$，也就是要求的传递函数。对每个节点应用 KCL 定律，得到节点方程：

$$\frac{\mathbf{V}_1-1}{R_s}+\mathrm{j}\omega C_1\mathbf{V}_1+\frac{\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2}{\mathrm{j}\omega L_1}=0$$

$$\frac{\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1}{\mathrm{j}\omega L_1}+\mathrm{j}\omega C_2\mathbf{V}_2+\frac{\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_3}{\mathrm{j}\omega L_2}=0$$

$$\frac{\mathbf{V}_3-\mathbf{V}_2}{\mathrm{j}\omega L_2}+\mathrm{j}\omega C_3\mathbf{V}_3+\frac{\mathbf{V}_3}{R_L}=0$$

绘制所需伯德图的源程序如下：

```
clear
% Construct the symbolic objects that appear in the circuit:
syms V1 V2 V3
syms w Rs RL C1 C2 C3 L1 L2 real
```

```
% Notice that V1, V2 and V3 are complex quantities
% while w, Rs, etc. are real.
% Solve the node voltage equations for V1, V2, and V3:
% Use i rather than j.
[V1 V2 V3] = solve('(V1-1)/Rs + i*w*C1*V1 + (V1-V2)/(i*w*L1) = 0',...
          '(V2-V1)/(i*w*L1) + i*w*C2*V2 + (V2-V3)/(i*w*L2) = 0',...
          '(V3-V2)/(i*w*L2) + i*w*C3*V3 + V3/RL = 0',...
          'V1','V2','V3');
% Enter the component values:
C1 = 1.967e-9; C2 = 6.366e-9; C3 = 1.967e-9;
L1 = 12.88e-6; L2 = 12.88e-6; Rs = 50; RL = 50;
% Substitute the component values into the solution for V3
% and define result as the transfer function H:
H = subs(V3); % Recall that the transfer function is the same as the
% output voltage V3.
% Next, set up a row matrix of logarithmically equally spaced
% frequencies at 100 points per decade from 10^5 to 10^7 Hz:
f = logspace(5,7,200);
wn = 2*pi*f;
% Substitute the frequency values into the transfer function
% and convert to numeric form by using the double command:
H = double(subs(H,w,wn));
% Convert the transfer function magnitude to dB and plot:
HmagdB = 20*log10(abs(H));
semilogx(f,HmagdB)
```

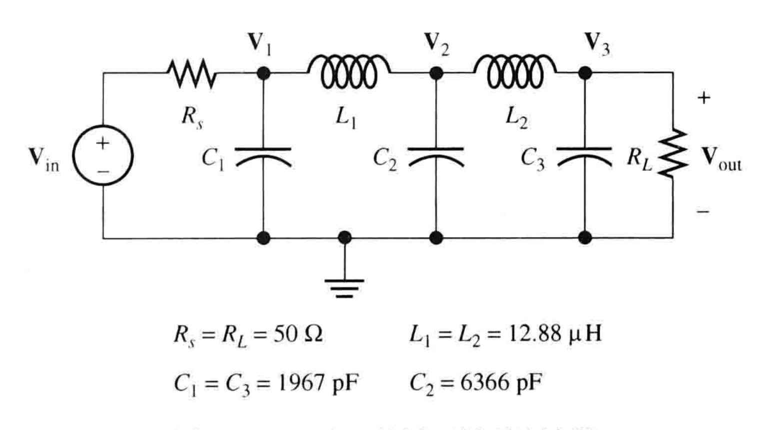


图6.43　五阶巴特沃思低通滤波器

运行结果如图6.44所示，程序文件命名为Example_6_9，可在MATLAB文件夹里找到。

为了检查在低频时图中传递函数值，用短路代替电感，用开路代替电容，整个电路就变成了简单的分压电路，此时传递函数为

$$H(0)=\frac{R_L}{R_s+R_L}=0.5$$

其分贝值为 −6 dB，与图中频率为100 kHz时的分贝幅值一致。

当频率非常高的时候，电容相当于短路，电感相当于开路，电路的输出电压趋向于0，传递函数的值趋向于 −∞ dB，这也与图中高频处的趋势相符。

上例中的滤波器被称为五阶巴特沃思低通滤波器。关于射频设计的书籍上通常有这种滤波器和许多设计表中列出的其他种类滤波器元件参数的标准版本。表格中的参数值经缩放后，可以使得到的滤波器具有想要的截止频率和阻抗量级。在这种情况下，设计者在分析之前应该准确知道滤波器的传递函数，然而，元件的寄生效应却能够以无法预测的方式改变滤波器的性能。所以，设计者在进行理论分析时必须将寄生效应考虑进去，并使用MATLAB软件进行仿真分析来查看它的影响。不过，如此具体的分析已超出本书的范围，我们的目标是阐述计算机辅助分析的能力。如想了解更多功能强大的电路设计软件如Multisim和PSpice，请参考附录D。

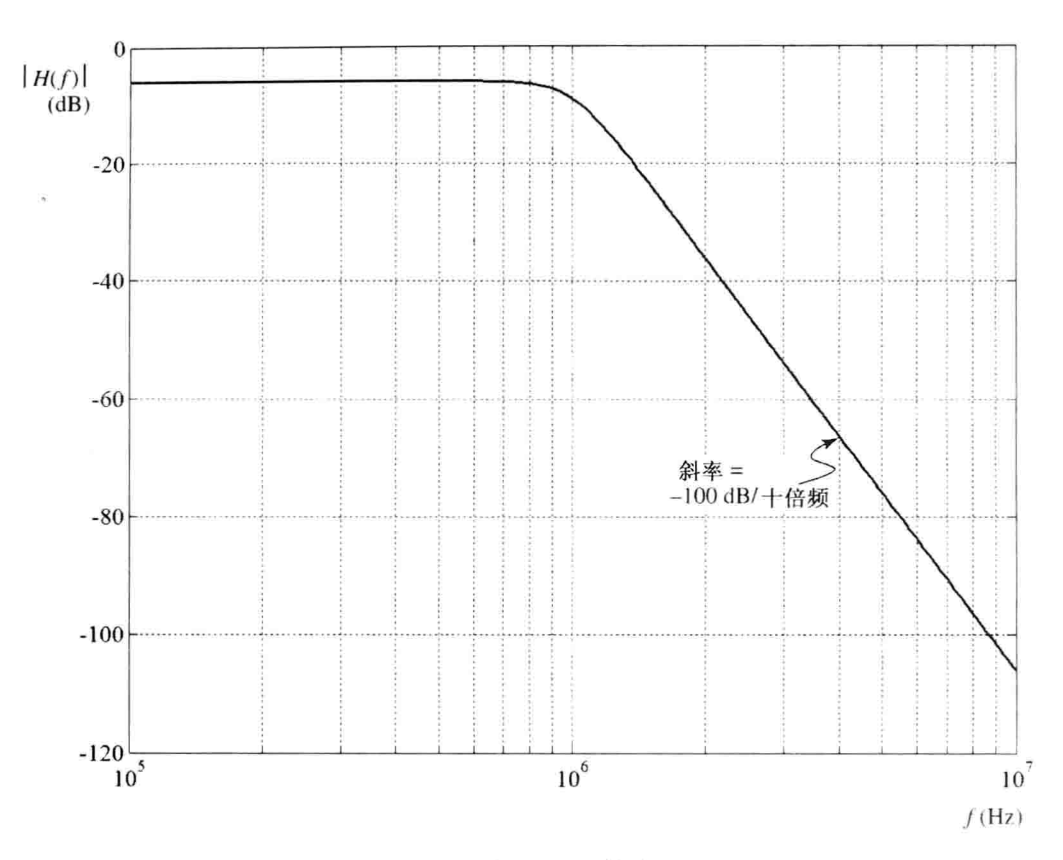


图 6.44 例 6.8 的伯德图

练习 6.22 如果能使用 MATLAB 软件及其符号工具箱，试运行 MATLAB 文件夹中的 Example_6_8和 Example_6_9 的 m 文件(注意，这两个文件应成功地在 MATLAB R2008a 和 R2008b 版本中运行过，不过，在其他版本中可能无法运行)。

答案： 运行结果应该分别与图 6.42 和图 6.44 一样。

6.10 数字信号处理

目前为止，本章已经介绍了 *RLC* 电路构成的滤波器的概念。但是，现代系统中使用的是更为高深复杂的技术，叫作数字信号处理(DSP)。当使用 DSP 滤除一个信号时，由模数转换器(ADC)将模拟的输入信号 $x(t)$ 转化为数字信号(即一组数列)；然后，计算机用数字化的输入信号计算出一系列的输出信号值；最终，在必要时，数模转化器(DAC)将计算值转换为模拟的输出信号 $y(t)$。如图 6.45 所示是 DSP 系统通用的原理框图。

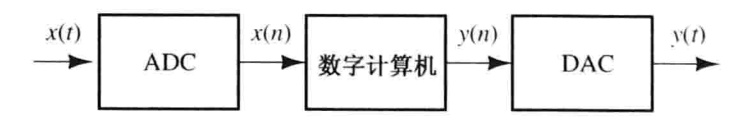


图 6.45 数字信号处理系统的通用框图

除了滤波之外，DSP 系统还有很多其他应用，如语音识别。在早期的太空望远镜中，使用 DSP 来聚焦由望远镜设计上的错误而导致的模糊图像。数字信号处理科技也为高清电视、数字手机和 MP3 播放器等的出现做出了贡献。

数字信号处理是一个庞大而迅速发展的领域，将会不断产生新型产品。本节将简单讨论数字滤波器，让大家对这个生机勃勃的领域有一个基本的认识。

6.10.1 模数信号转换

模拟信号由模数转换器转化为数字信号需要两个步骤。首先，对模拟信号在周期性的时间点上进行采样(即测出该点的幅值)；然后用一个代码来近似表示每个采样值。通常，这个代码由二进制符号组成，具体过程如图 6.46 所示。图中，每个采样值都由一个三位的代码表示，此代码与采样点所在的幅值区相对应，因此，每个采样值都被转化为一个代码，相应地就形成了图中的数字波形。

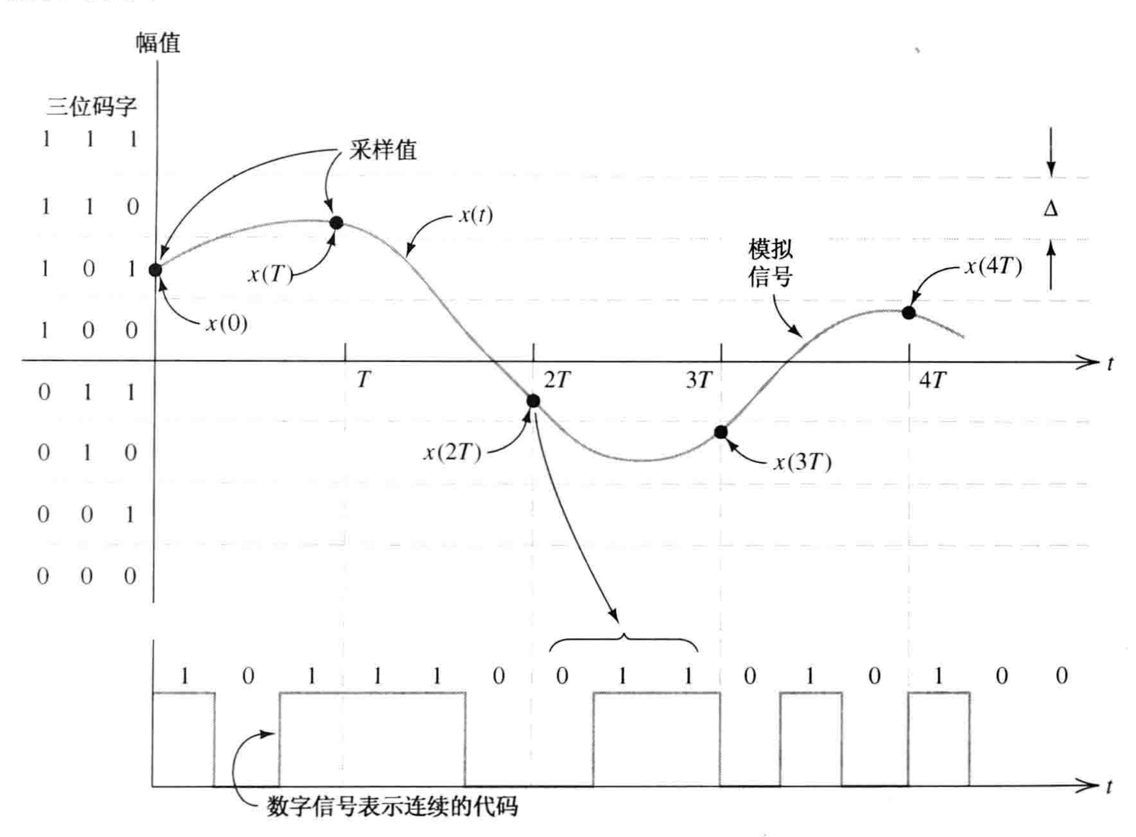


图 6.46　模拟信号通过采样被转化成近似相等的数字信号，每个采样值都由一个三位的代码表示(实际的转换器采用更长的代码，其每个幅值区间的宽度Δ就更小)

采样频率 f_s 取决于信号分量的频率，众所周知，所有的实际信号都能分解为多个频率、幅值和相位不同的正弦信号。如果一个信号不包含频率高于 f_H 的正弦分量，理论上这个信号就能被完全重现，只要其采样频率 f_s 大于两倍的 f_H，即

$$f_s > 2f_H \tag{6.48}$$

例如，高保真音频信号的最高频率大约为 15 kHz，因此，音频信号的最小采样频率应该为 30 kHz。实际操作中，会使采样频率大于理论上的最小值，比如，激光唱片技术将音频信号转化为采样频率为 44.1kHz 的数字信号。自然，采用最低的实际采样频率来压缩必须由数字信号处理系统存储或者操作的数据量是绝对可行的。

当然，采样周期 T 是采样频率的倒数：

$$T = \frac{1}{f_s} \tag{6.49}$$

在模数转换中另一个需要考虑的重点是使用的幅值区间的个数，由于在一个给定区间上的所有幅值都有着相同的代码，所以信号幅值不能被精确地表示出来。于是，当一个数模转换器

用二进制代码来重现原始的模拟信号波形时，也只能得到原始信号的近似波形，如图6.47所示。因此，在原始信号和重建信号中存在着量化误差，通过增加区间数量和代码长度，可以减小量化误差。幅值区间数 N 与代码位数 k 的关系如下：

$$N = 2^k \tag{6.50}$$

所以，假如我们使用一个8位的模数转换器，那么将会有 $N = 2^8 = 256$ 个幅值区间。激光唱片技术中常使用16位的代码来表示采样值，当代码长度如此之大后，听众就很难察觉出重建的音频信号的量化误差。

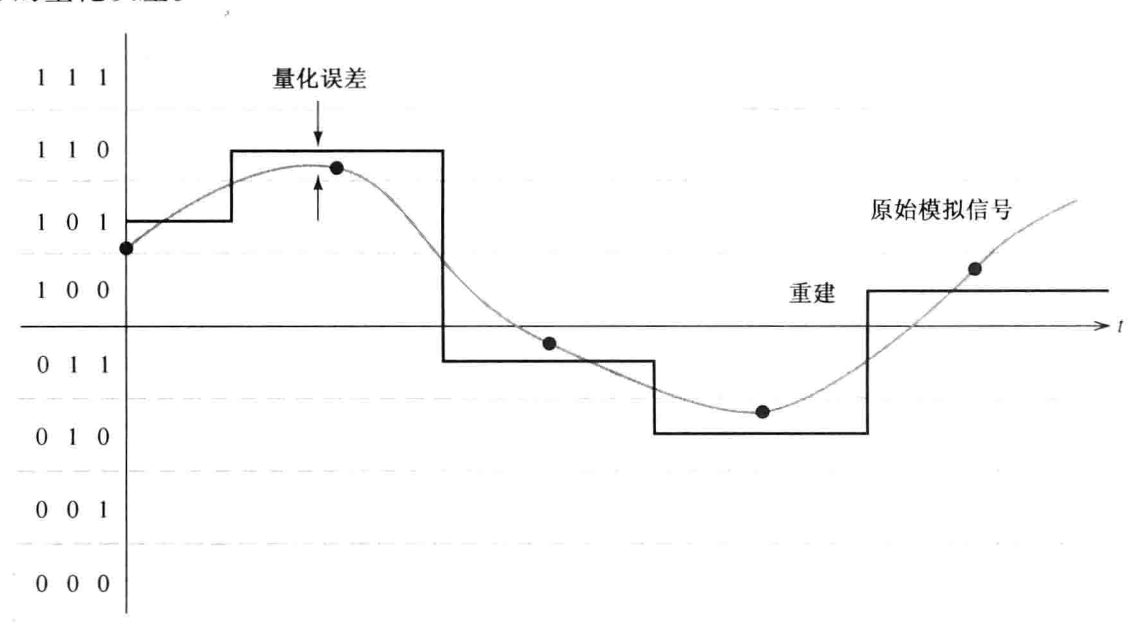


图6.47　当一个模拟信号由其相应的数字信号重建时，量化误差出现了

在工程检测仪器中常常需要将传感器检测到的信号转换为数字信号，为此必须先确定数模转换器的规格。例如，假设我们要将 -1 ~ 1 V的信号数字化，且要求 $\Delta = 0.5$ mV（Δ 的说明如图6.46右上角所示）。然后最小区间数由总的电压范围(2 V)除以 Δ，得出 $N = 4000$，又由于 N 是2的整数次幂，因此可得 $k = 12$(换句话说，我们需要一个12位的模数转换器)。

在本节接下来的内容中，将会忽略量化误差，并假设数字计算机可以得到精确的采样值。

6.10.2　数字滤波器

我们已经知道模数转换器能将模拟信号转化为一系列的代码，这些代码能准确表示采样点信号的幅值。尽管事实上是由计算机在处理这些代表信号幅值的代码，但想要研究这些代码所表示的数字还是很方便的。概念上，信号 $x(t)$ 被转化为一系列的值 $x(nT)$，其中 T 是采样周期，n 是一个整数变量。我们在表示时常常省略采样周期，将输入和输出的信号采样值分别简单地写为 $x(n)$ 和 $y(n)$。

6.10.3　数字低通滤波器

可以模仿本章前几节中的 *RLC* 滤波器来设计一个数字低通滤波器。如图6.48所示的一阶低通滤波器，其中输入电压表示为 $x(t)$，输出电压表示为 $y(t)$，在电容顶端的节点处由基尔霍夫电流定律可得

$$\frac{y(t) - x(t)}{R} + C\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{6.51}$$

将等式的每一项都乘以 R，且令时间常数 $\tau = RC$，则有

$$y(t) - x(t) + \tau \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{6.52}$$

将导数进行近似处理得

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(n) - y(n-1)}{T} \tag{6.53}$$

写出近似等效的微分方程：

$$y(n) - x(n) + \tau \frac{y(n) - y(n-1)}{T} = 0 \tag{6.54}$$

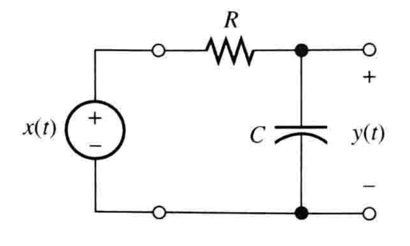


图 6.48　一阶 RC 低通滤波器

这种形式的方程有时也叫差分方程，因为它包含了连续的采样值的差数。解方程得第 n 点的输出值为

$$y(n) = ay(n-1) + (1-a)x(n) \tag{6.55}$$

其中，定义参数：

$$a = \frac{\tau/T}{1 + \tau/T} \tag{6.56}$$

式(6.55)表示要描述一个输入信号为 $x(n)$ 的低通滤波器的特性，需要计算 $y(n)$ 的值。在每个采样点处，输出值由上一个输出值的 a 倍加上现在输入值的 $(1-a)$ 倍。通常，$\tau >> T$，所以 a 的值略小于1。

例 6.9　一阶数字低通滤波器的阶跃响应。

已知 $a = 0.9$，输入为阶跃函数，且定义为

$$x(n) = 0, \quad n < 0$$
$$= 1, \quad n \geqslant 0$$

试求 n 从0到20的输入和输出采样信号并在坐标图中表示出来，假设 $y(n) = 0$，$n < 0$。

解： 由题意有

$$y(0) = ay(-1) + (1-a)x(0) = 0.9 \times 0 + 0.1 \times 1 = 0.1$$
$$y(1) = ay(0) + (1-a)x(1) = 0.19$$
$$y(2) = ay(1) + (1-a)x(2) = 0.271$$
$$\vdots$$
$$y(20) = 0.8906$$

$x(n)$ 和 $y(n)$ 的曲线如图4.49所示。注意，数字滤波器的阶跃响应和图4.4所示的 RC 滤波器的阶跃响应相似。

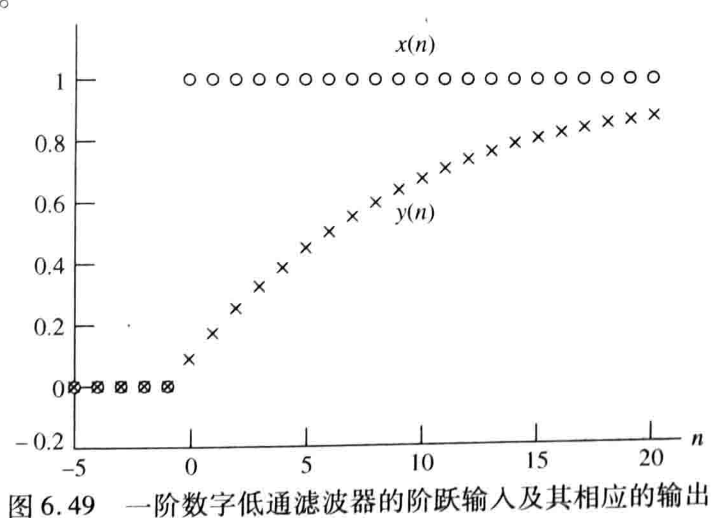


图 6.49　一阶数字低通滤波器的阶跃输入及其相应的输出

练习 6.23 (a)已知 $a=0.9$，计算出时间常数 τ 的值，用采样周期 T 表示；(b)已知时间常数是指阶跃响应到达其 $1-1/e=0.632$ 倍的最终值所需要的时间，估算图 6.49 中响应的时间常数的值。

答案：(a) $\tau=9T$；(b) $\tau\approx 9T$。

6.10.4 其他数字滤波器

参照本章前几节中讲的 *RLC* 滤波器的特性，我们也可以设计出数字带通、陷波或者高通滤波器。此外，高阶的数字滤波器也可以实现。一般而言，确定这种滤波器的方程如下：

$$y(n)=\sum_{\ell=1}^{N}a_\ell y(n-\ell)+\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k) \tag{6.57}$$

滤波器的类型和它的性能取决于系数 a_l 和 b_k 的值，对于例 6.10 中讨论的一阶低通滤波器，它的系数为 $a_1=0.9$，$b_0=0.1$，其余的所有系数都为 0。

练习 6.24 如图 6.50 所示的 *RC* 高通滤波器，采用分析低通滤波器的方法得出形式如式(6.57)的高通滤波器方程，求方程中的系数，用时间常数 $\tau=RC$ 和采样周期 T 表示。

答案：$y(n)=a_1y(n-1)+b_0x(n)+b_1x(n-1)$，其中

$$a_1=b_0=-b_1=\frac{\tau/T}{1+\tau/T}$$

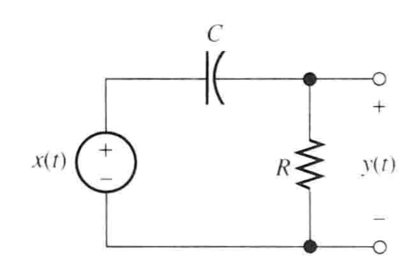


图 6.50 *RC* 高通滤波器，见练习 6.24

6.10.5 简单的陷波滤波器

获得陷波滤波器的一个简单方法是令 $a_\ell=0$（无论 ℓ 为何值），$b_0=0.5$，$b_d=0.5$，其余的系数 b_k 都为 0，此时滤波器的输出表达式为

$$y(n)=0.5x(n)+0.5x(n-d)=0.5[x(n)+x(n-d)]$$

于是，每个输入信号采样值都被延时了 Td，然后再加上此时的采样值，最后将得到的和再乘以 0.5。为了弄清楚在陷波滤波器里会有什么结果，假设一个正弦波被延时了 Td，则有

$$A\cos[\omega(t-Td)]=A\cos(\omega t-\omega Td)=A\cos(\omega t-\theta)$$

所以，一个 Td 的时延就意味着相位角改变 ωTd 弧度或者 $fTd\times 360°$（这里 T 指采样周期，而不是正弦波的周期）。在低频点，相角的改变很小，$x(n)$ 的低频分量几乎与 $x(n-d)$ 的低频分量同相，可直接相加。另一方面，当频率为

$$f_{\text{notch}}=\frac{1}{2Td}=\frac{f_s}{2d} \tag{6.58}$$

时，相移为 180°，当将一个正弦波相移 180° 后再加上原来的波形，其和为 0，故任何频率为 f_{notch} 的输入分量均不能通过滤波器。只要为方程(6.57)选择合适的系数，很多数字滤波器都能被实现，一阶低通滤波器和这个简单的陷波滤波器只是其中的两种而已。

练习 6.25 设采样频率 $f_s=10$ kHz，要求用一个简单的陷波滤波器滤除 500 Hz 的正弦分量。(a)计算出符合要求的 d；(b)假如想要滤除频率为 300 Hz 的分量，会遇到什么困难？

答案：(a) $d=10$；(b)由式(6.58)得 $d=16.67$，但是 d 必须为整数。

6.10.6 数字滤波器的仿真

接下来，我们用 MATLAB 软件来说明数字滤波器的作用。首先，对有噪声和干扰的实际信

号进行采样。有用信号由1Hz的正弦信号组成，这只是真实世界中各种各样的信号的一个代表，如一个人在深睡时脑电波里的δ波形，或者是海洋中的压力传感器在有海浪时的输出信号。部分干扰信号由60 Hz的正弦波组成，由于60 Hz的工频信号与信号传感器的耦合，这是真实世界中常见的一个问题；干扰的另一个因素是随机噪声，在现实世界中很常见。

产生仿真数据的MATLAB代码如下：

```
t = 0:1/6000:2;
signal = cos(2*pi*t);
interference = cos(120*pi*t);
white_noise = randn(size(t));
noise = zeros(size(t));
for n = 2:12001
noise(n) = 0.25*(white_noise(n) - white_noise(n - 1));
end
x = signal + interference + noise; % This is the simulated data.
```

第一条指令产生了有12001个元素的采样时间的行相量，其范围在0到2 s之间，采样频率为f_s = 6000 Hz；第二条和第三条指令则建立起包含有用信号和60 Hz工频干扰信号的采样值的行相量；在接下来的一行指令中，MATLAB的随机数发生器产生出“白噪声”，它包含在采样频率值一半以内的各个频率的等幅值分量，然后经过for—end循环语句的处理生成0～3000 Hz的分量，且在1500 Hz处达到峰值。然后，有用信号、干扰信号和噪声信号相加得到仿真数据$x(n)$。[当然，在现实应用中，这种数据是通过将传感器(如脑电图描记器)的电极的输出信号加在模数转换器中获得的。]

接着，我们用MATLAB软件绘制有用信号、干扰信号、噪声信号和仿真数据的波形图。

```
subplot(2,2,1)
plot(t, signal)
axis([0 2 -2 2])
subplot(2,2,2)
plot(t, interference)
axis([0 2 -2 2])
subplot(2,2,3)
plot(t,noise)
axis([0 2 -2 2])
subplot(2,2,4)
plot(t,x)
axis([0 2 -3 3])
```

产生的波形图如图6.51所示。仿真数据是典型的真实世界实验中传感器输出的波形。例如，在生物医学中，心电图仪器产生的信号就是心跳信号加上60 Hz的工频干扰信号，再加上肌肉收缩产生的噪声。

事实上，60 Hz的工频干扰信号在图6.51(b)中看起来有一点不平坦，这是由于显示屏的屏幕分辨率有限，这是波形失真的一种形式，称为频谱混叠，当采样频率过低后，就会出现这种情况。如果在自己的电脑运行这些指令，并用缩放工具水平放大，就会得到一个平滑的60 Hz的正弦干扰信号波形。在这次数字示波器的仿真中所需要的指令在命名为DSPdemo的m文件里，保存在MATLAB文件夹中。

要求数字滤波器输入如图6.51(d)所示的$x(n)$的信号时得到与如图6.51(a)所示波形相近的输出信号，故此滤波器必须通过1 Hz的工频信号，抑制60 Hz的工频干扰信号和在1500 Hz频率附近达到最大值的噪声信号。

为了实现这个目标，使用能滤除60 Hz的正弦干扰信号的数字陷波滤波器和一个能抑制大部分噪声信号的低通滤波器级联，其示意图如图6.52所示。

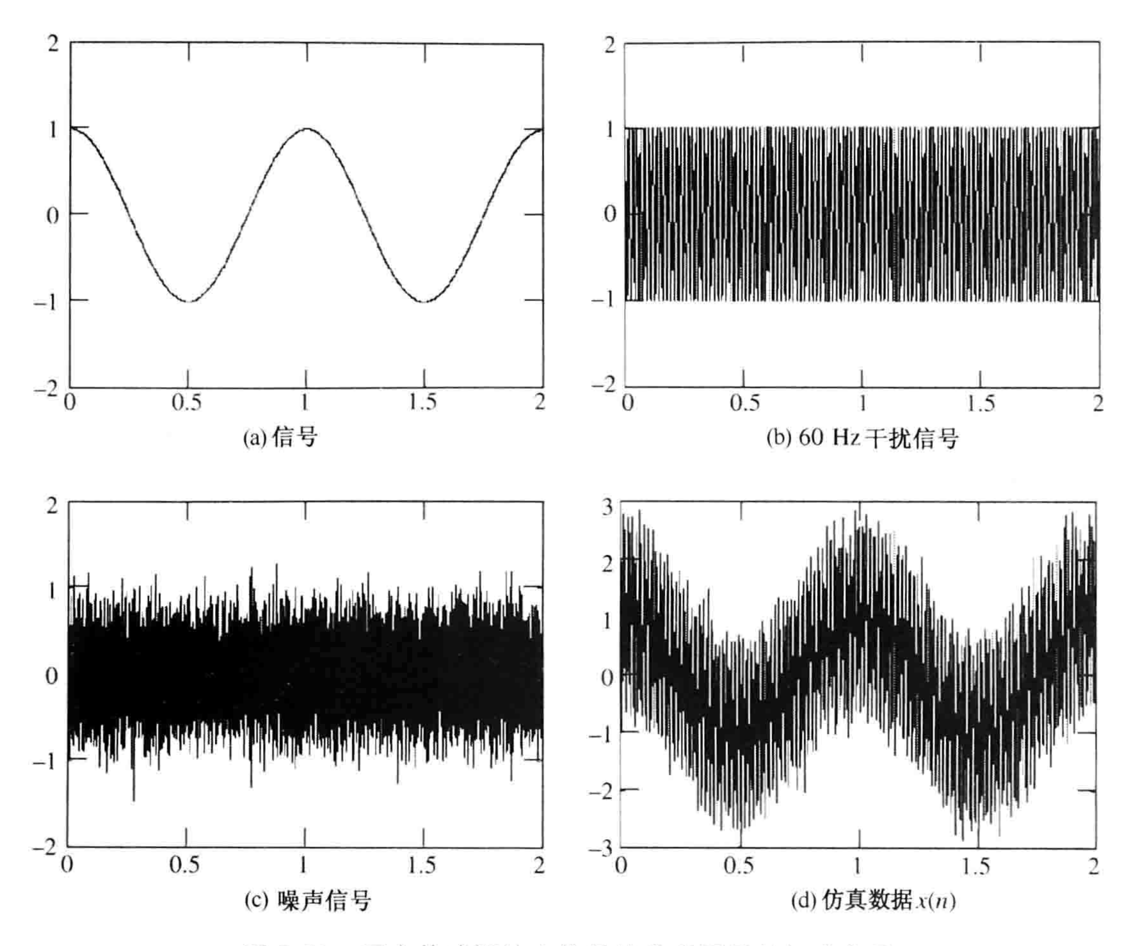


图 6.51 压力传感器输出信号的仿真图及其组成分量

由式(6.58)可知，令 $d = 50$，$f_s = 6000$ Hz，就能得到在 60 Hz 处增益为 0 的陷波滤波器(假如 60 Hz 的工频干扰很严重，将采样频率选为 60 Hz 的偶数倍是一个不错的方法，这也是我们将采样频率定为 6000 Hz 的一个原因)。当输入为 $x(n)$ 时，陷波滤波器的输出表达式 $z(n)$ 如下：

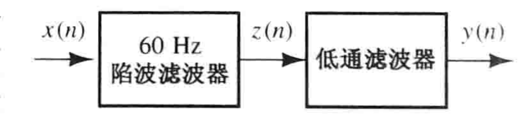


图 6.52 数字滤波器示意图

$$z(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(n-50)]$$

同样，我们需要一个低通滤波器来消除噪声，即使用本节中讨论过的一阶低通滤波器。由于希望低通滤波器不干扰有用信号，所以截止频率应比 1 Hz 高得多，选择 $f_s = 50$ Hz。对于 RC 低通滤波器，其截止频率为

$$f_B = \frac{1}{2\pi RC}$$

代入值解得时间常数为

$$\tau = RC = \frac{1}{2\pi f_B} = \frac{1}{2\pi(50)} = 3.183\,\text{ms}$$

其近似等效的数字滤波器的放大系数由式(5.56)可得，其中采样周期 $T = 1/f_s = 1/6000$ s，有

$$a = \frac{\tau/T}{1+\tau/T} = 0.9503$$

将这个值代入式(6.55)，当低通滤波器的输入为 $z(n)$ 和前一个的输出为 $y(n-1)$ 时便可得到

当前的输出表达式：

$$y(n) = 0.9503y(n-1) + 0.0497z(n)$$

对仿真信号 $x(n)$ 进行滤波，再绘制输出 $y(n)$ 的波形图的 MATLAB 程序如下：

```
for n = 51:12001
z(n) = (x(n) + x(n - 50))/2; % This is the notch filter.
end
y = zeros(size(z));
for n = 2:12001
y(n) = 0.9503*y(n-1) + 0.0497*z(n); % This is the lowpass filter.
end
figure
plot(t,y)
```

运行结果如图 6.53 所示，正如我们期望的，输出信号是几乎为 1 Hz 的正弦波。这个相对简单的数字滤波器在消除噪声和干扰方面性能很好，因为大部分噪声和干扰的频率都比有用信号的频率高很多。如果有用信号的频率与噪声和干扰信号的频率更接近，就需要采用高阶的滤波器。

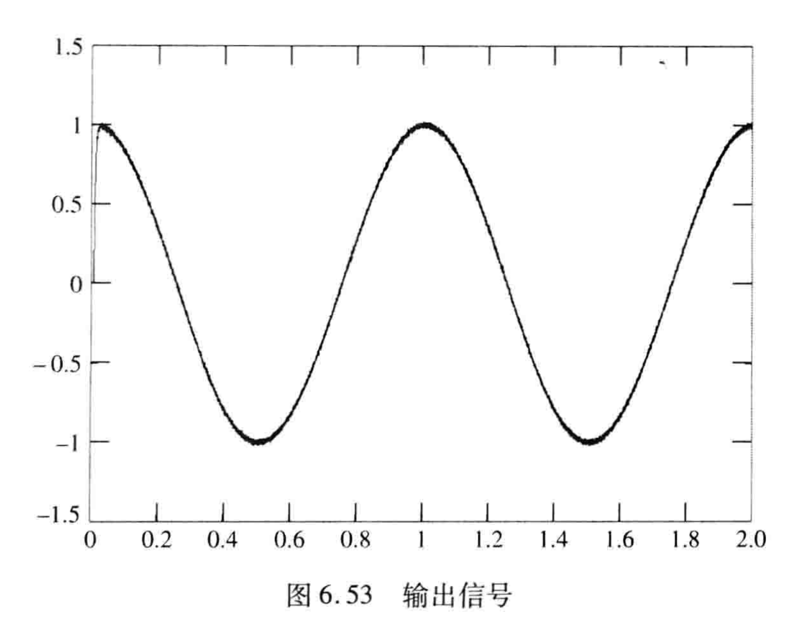


图 6.53　输出信号

6.10.7　滤波技术的比较

我们已经讨论了两种对信号滤波的方法：*RLC* 电路和数字滤波器。还有很多其他种类的滤波器，比如由电阻、电容和运算放大器（第 14 章中会讲到）组成有源滤波器，其他滤波器是基于压电晶体的机械谐振、声音的表面波、导波线里电场的传播、开关电容网络和输电线的。

在任何情况下，滤波器的目的是将想要的信号与噪声和干扰信号分开。业余无线电爱好者的操作频段在 28 ~ 29.7 MHz 之间，他们常需要在发射机和天线之间放置一个带阻滤波器以防止二次谐波分量到达天线。要是二次谐波分量不被滤除，就会在他们邻居的电视屏幕上产生嘈杂的干扰。在这个应用中，由于有大电流和大电压的参与，从技术角度应选择 *RLC* 滤波器。

另一方面，睡眠研究员可能希望对脑电波进行滤波，分开 4Hz 或更低的 δ 波和频率更高的脑电波。在这个例子中，数字滤波器是一个合适的选择。

总的来说，滤波器有很多应用，实现滤波器的技术也有很多。本节中介绍的 *RLC* 电路和数字滤波器的大部分原理也适用于以其他技术为基础的滤波器。

本章小结

1. 傅里叶理论的基本概念是通过叠加多个给定幅度、频率和相位的正弦量而构建任意信号。
2. 实际上，一个滤波器可将输入信号分解成一系列正弦分量，因为各正弦量的频率不同而相应地改变其幅度和相位再输出，然后将各输出分量叠加起来产生总的输出。通常，希望滤波器在某些频率范围内不改变信号的幅度和相位，即通过该类信号而抑制其余频段的信号。
3. 滤波器的传递函数是以频率为自变量的函数，定义为输出的相量除以输入的相量。传递函数是个复数，表明了输入信号的正弦分量的幅度和相位在通过滤波器时是如何受影响的。
4. 用相量和复阻抗的电路分析法来分析给定电路的传递函数。
5. 一阶滤波器的特性常由截止频率 f_B 来反映。
6. 传递函数的大小可以通过取对数后再乘以 20，即转化为分贝来表达。
7. 二端口滤波器的级联就是通过将前一个滤波器的输出连接到后一个滤波器的输入端，整个级联后的传递函数就是各滤波器的传递函数的乘积。如果传递函数是用分贝表示的，则级联后的传递函数就是各部分传递函数分贝值的叠加。
8. 在对数频率坐标上，频率乘以某给定系数就是沿坐标轴增加等增量的线段。十倍频表示频段的最大频率是最小频率的十倍，二倍频表示频段的最大频率是最小频率的两倍。
9. 伯德图显示的是网络函数的幅度随频率的变化关系，其中幅度采用了分贝，频率采用对数的形式。
10. 一阶滤波器的伯德图近似于一条直线渐近线。在一阶低通滤波器中，传递函数的幅度在高于截止频率处以 20 dB/十倍频的斜率下降；在一阶高通滤波器中，传递函数的幅度在低于截止频率处以 20 dB/十倍频的斜率下降。
11. 在低频处，电感视为短路，电容视为开路；在高频处，电感视为开路，电容视为短路。通常 *RLC* 滤波器很容易通过计算分析低频和高频特性，并以此为依据来验证计算机生成的伯德图。
12. 串联谐振和并联谐振电路的重要参数是谐振频率和品质因数，这两种电路在谐振频率处都是呈现纯电阻性，高品质因数电路的响应值比信号源幅值大得多。
13. 滤波器共分为低通、高通、带宽和带阻滤波器 4 种，在通带内，理想滤波器的传递函数的增益是恒定的，而在阻带内，滤波器的增益为零。
14. 可用串联谐振电路实现上述 4 种类型的滤波器。
15. 二阶滤波器的特性由它的谐振频率和品质因数决定。
16. 在导出和绘制复杂 *RLC* 电路的传递函数时，MATLAB 软件非常有用。
17. 使用数字信号处理对一个信号进行滤波时，首先模拟的输入信号 $x(t)$ 被模数转换器转化为数字信号，然后数字计算机根据数字化的输入信号计算出一系列的输出信号值，最终这些信号值会被数模转换器转化为模拟信号 $y(t)$ 输出。
18. 如果一个信号不包含频率高于 f_H 的分量，那么这个信号就能被采样值重新准确地恢复出来，只要采样频率 f_s 大于两倍的 f_H。
19. *RLC* 电路的滤波器都能得到近似等效的数字滤波器。

注意：本章中的很多伯德图都可以使用计算机辅助电路分析软件来检验，如美国国家仪器公司的 Multisim 或 Cadence 公司的 OrCAD Capture。详情请参见附录 D。

习题

6.1 节　傅里叶分析、滤波器和传递函数

P6.1　傅里叶理论的基本概念是什么？

P6.2　如图 P6.2 所示，三角波的表达式为

$$v_t(t) = 1 + \frac{8}{\pi^2}\cos(2000\pi t) + \frac{8}{(3\pi)^2}\cos(6000\pi t) + \cdots + \frac{8}{(n\pi)^2}\cos(2000n\pi t) + \cdots$$

n 只取奇数。使用 MATLAB 软件计算和绘制取 $n = 19$ 表达式在 $0 \leqslant t \leqslant 2$ ms 内的波形图，并与图 6.2 所示的波形图进行比较。

P6.3　如图 P6.3 所示，经全波整流的余弦波的表达式为

$$v_{\text{fw}} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi(1)(3)}\cos(4000\pi t) - \frac{4}{\pi(3)(5)}\cos(8000\pi t) + \cdots + \frac{4(-1)^{(n/2+1)}}{\pi(n-1)(n+1)}\cos(2000n\pi t) + \cdots$$

设 n 为偶数。使用 MATLAB 软件计算和绘制取 $n = 60$ 表达式在 $0 \leqslant t \leqslant 2$ ms 内的波形图，并与图 6.3 所示的波形图进行比较。

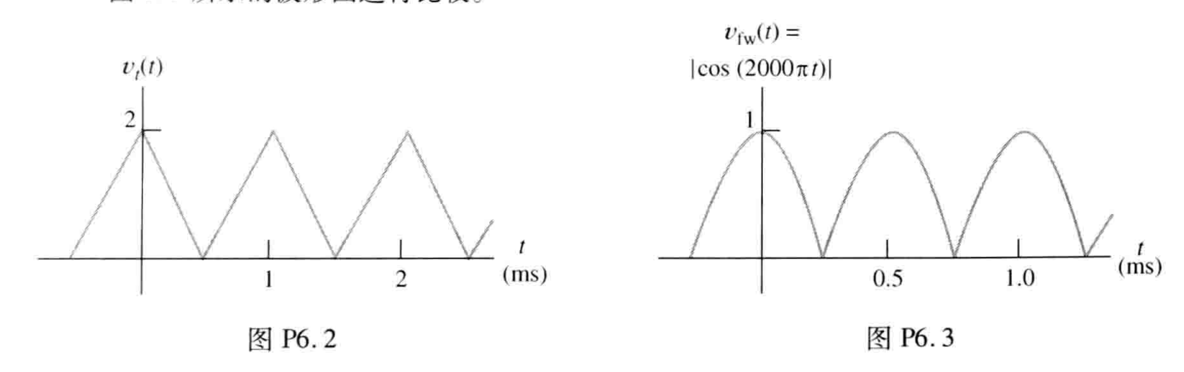


图 P6.2　　图 P6.3

P6.4　如图 P6.4 所示，经半波整流的余弦波的傅里叶级数为

$$v_{\text{hw}}(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \frac{2}{\pi(1)(3)}\cos(4\pi t) - \frac{2}{\pi(3)(5)}\cos(8\pi t) + \cdots + \frac{2(-1)^{(n/2+1)}}{\pi(n-1)(n+1)}\cos(2n\pi t) + \cdots$$

设 n 为偶数。使用 MATLAB 软件计算和绘制取 $n = 50$ 表达式在 $-0.5 \leqslant t \leqslant 1.5$ ms 内的波形图，并与图 6.4 所示的波形图进行比较。

P6.5　如图 P6.5 所示，锯齿波傅里叶级数为

$$v_{\text{st}}(t) = 1 - \frac{2}{\pi}\sin(2000\pi t) - \frac{2}{2\pi}\sin(4000\pi t) - \frac{2}{3\pi}\sin(6000\pi t) - \cdots - \frac{2}{n\pi}\sin(2000n\pi t) - \cdots$$

设 n 为偶数。使用 MATLAB 软件计算和绘制取 $n = 3$ 表达式在 $0 \leqslant t \leqslant 2$ ms 内的波形图，并与图 6.5 所示的波形图进行比较。

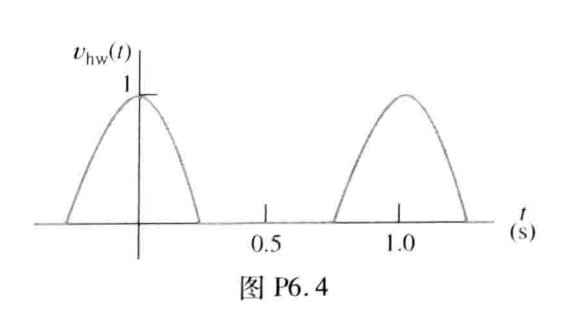


图 P6.4

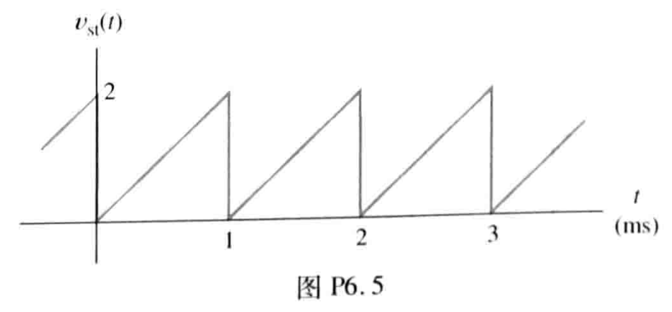


图 P6.5

P6.6 滤波器的传递函数是什么？简述如何使用实验方法得到一个滤波器的传递函数。

P6.7 就正弦分量而言，一个滤波器如何处理输入信号来产生输出信号？

*P6.8 某滤波器传递函数 $H(f) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$，如图 P6.8 所示，设输入信号为

$$v_{in}(t) = 10 + 2\cos(5000\pi t + 30°) + 2\cos(15000\pi t)$$

试找出该滤波器稳定输出的时域表达式。

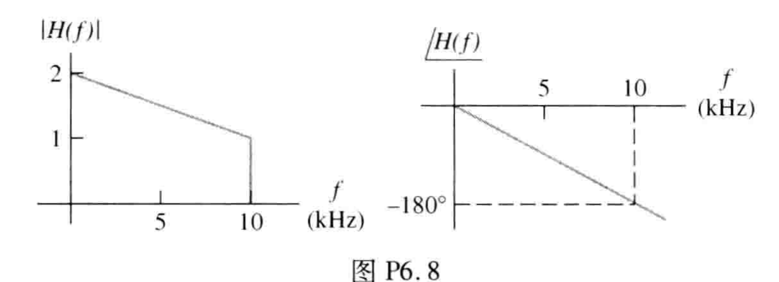


图 P6.8

*P6.9 输入信号为

$$v_{in}(t) = 7 + 2\cos(6000\pi t) - 4\cos(12000\pi t)$$

重复 P6.8 的问题。

*P6.10 输入信号为

$$v_{in}(t) = 9+5\cos(10^4\pi t-30°)+2\sin(24000\pi t)$$

重复 P6.8 的问题。

*P6.11 某滤波器的输入信号为

$$v_{in}(t) = 2\cos\left(10^4\pi t - 25°\right)$$

相应的稳定输出信号为

$$v_{out}(t) = 2\cos\left(10^4\pi t + 20°\right)$$

试写出该滤波器的传递函数在频率 $f = 5000$ Hz 时的相量式。

*P6.12 在稳定状态下，输入和输出电压信号可通过示波器进行观察，当输入信号达到峰值电压为 5 V 时输出为 15 V，输入和输出信号的周期都为 $t = 1$ ms，且输出信号达到正的峰值电压是在 $t = 1.5$ ms 处，试求该信号的频率以及相应的传递函数值。

*P6.13 图 P6.2 所示三角波是一个滤波器的输入信号，其传递函数图如图 P6.13 所示，设传递函数在各频率的相位均为 0，求该滤波器的稳态输出信号。

*P6.14 已知一个电路的输入电压为其输入电压在运行时间上的积分，如图 P6.14 所示。输入电压为 $v_{it}(t) = V_{max}\cos(2\pi ft)$，求输出电压的时域表达式和此积分器的传递函数，并绘制传递函数的幅频特性和相频特性图。

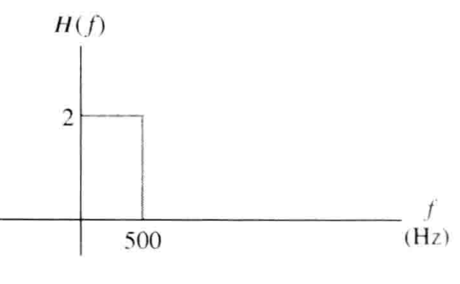


图 P6.13

P6.15 滤波器的传递函数如图 P6.15 所示，将习题 6.5 的锯齿波加在滤波器的输入端，设传递函数在各频率的相位为 0，求该滤波器的稳态输出信号。

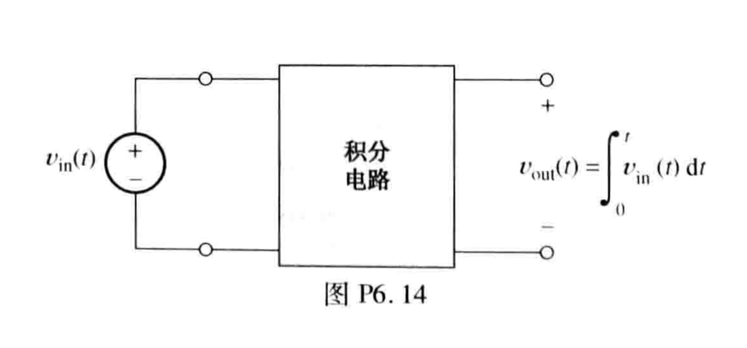


图 P6.14

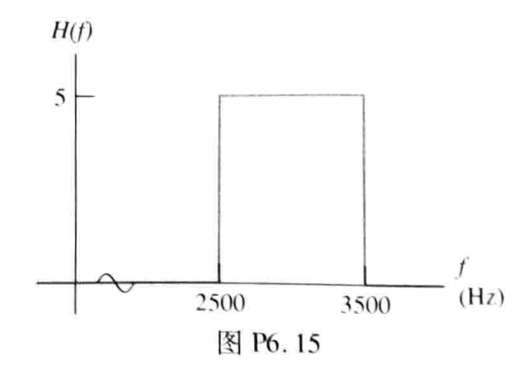


图 P6.15

P6.16　一个滤波器在稳定状态下，输入正弦信号时输入和输出电压的波形如图 P6.16 所示，试求该信号的频率以及相应的传递函数值。

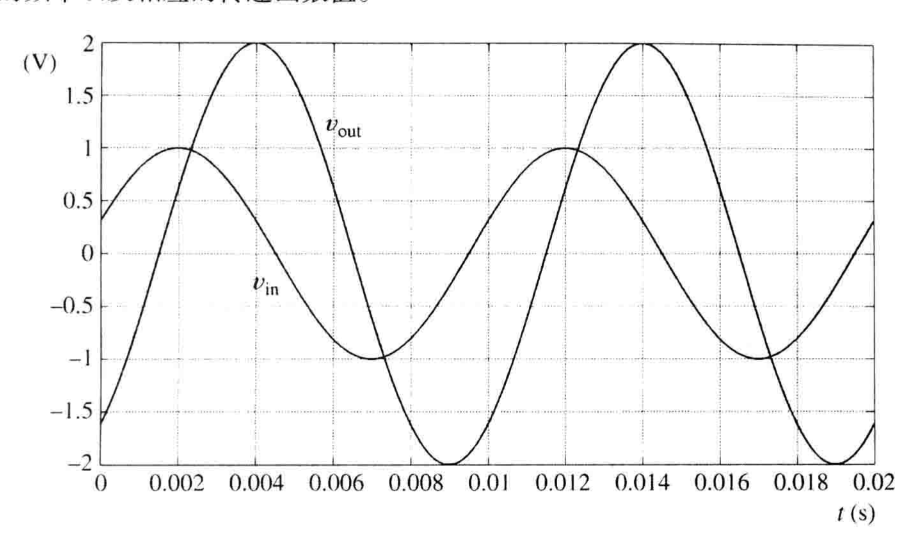


图 P6.16

P6.17　已知一个滤波器的输入信号为

$$v_{in}(t) = 2 + 4\cos(1000\pi t) + 3\sin(2000\pi t) + \cos(3000\pi t)\ \mathrm{V}$$

输出信号为

$$v_{out}(t) = 3 + 2\cos\left(1000\pi t + 30^\circ\right) + 4\cos(3000\pi t)\ \mathrm{V}$$

列出各信号的频率，并求每个频率下的传递函数。

P6.18　一个系统的输出电压为 $v_o(t) = v_{in}(t) + v_{in}(t - 10^{-3})$（即输出电压为输入电压加上延时 1 ms 的输入电压），若输入电压为 $v_{in}(t) = V_{max}\cos(2\pi ft)$，求输出电压的时域表达式和系统的传递函数，并用 MATLAB 软件绘制传递函数在频率 0～2000 Hz 内的幅频特性图，分析结果。

P6.19　设一个系统的输出电压为

$$v_O(t) = 1000\int_{t-10^{-3}}^{t} v_{in}(t)\mathrm{d}t$$

若输入电压为 $v_{in}(t) = V_{max}\cos(2\pi ft)$，求输出电压的时域表达式和系统的传递函数，并用 MATLAB 软件绘制传递函数在频率 0～2000Hz 内的幅频特性图，分析结果。

P6.20　设一个电路的输出电压是输入电压的导数，如图 P6.20 所示。当输入电压为 $v_{in}(t) = V_{max}\cos(2\pi ft)$，求输出电压的时域表达式和系统的传递函数，并用 MATLAB 软件绘制传递函数的幅频特性和相频特性图。

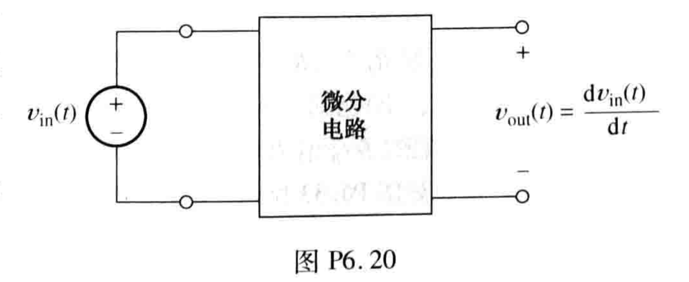


图 P6.20

6.2 节　一阶低通滤波器

P6.21　画出一阶 *RC* 低通滤波器的电路图，写出其截止频率表达式，并画出传递函数的幅频特性和相频特性曲线。

P6.22　对一阶 *RL* 滤波器，重复习题 P6.21 的问题。

*P6.23　对于一个一阶 *RC* 低通滤波器，频率分别为多少时其相移分别为 −1°、−10°、−89°？

P6.24　第 4 章中使用时间常数来描述一阶 *RC* 电路，求截止频率与时间常数的关系式。

*P6.25　已知某输入信号为

$$v_{\text{in}}(t) = 5\cos(500\pi t) + 5\cos(1000\pi t) + 5\cos(2000\pi t)$$

将该信号输入到如图 P6.25 所示的 *RC* 低通滤波器，试求输出信号的表达式。

P6.26 已知一阶低通滤波器的传递函数如式(6.9)所示，截止频率为 200 Hz。当输入信号为

$$v_{\text{in}}(t) = 3 + 2\sin(800\pi t + 30^\circ) + 5\cos\left(20 \times 10^3 \pi t\right)$$

时，试求输出电压的表达式。

P6.27 需设计一阶 *RC* 低通滤波器，其截止频率为 1 kHz，电阻 *R* 为 5 kΩ，试求其电容值。

P6.28 已知一个一阶低通滤波器的输入信号包含频率从 100 Hz 到 50 kHz 的分量，要求将频率为 50 kHz分量的幅值减小到 1/200，试求滤波器的截止频率，问当频率 2 kHz 的分量通过滤波器时，其幅值改变了多少?

P6.29 在频率为 5 kHz 的正弦稳定状态下，用示波器观察到一个一阶低通滤波器的输出信号的正向过零点与输入信号相比延迟了 30 μs，求滤波器的截止频率。

*P6.30 如图 P6.30 所示的电路图，画出其传递函数 $H(f) = \mathbf{V}_{\text{out}}/\mathbf{V}_{\text{in}}$ 的幅频特性图，并求其截止频率。(提示：可以将电路简化为从电容端看过去的戴维南等效电路。)

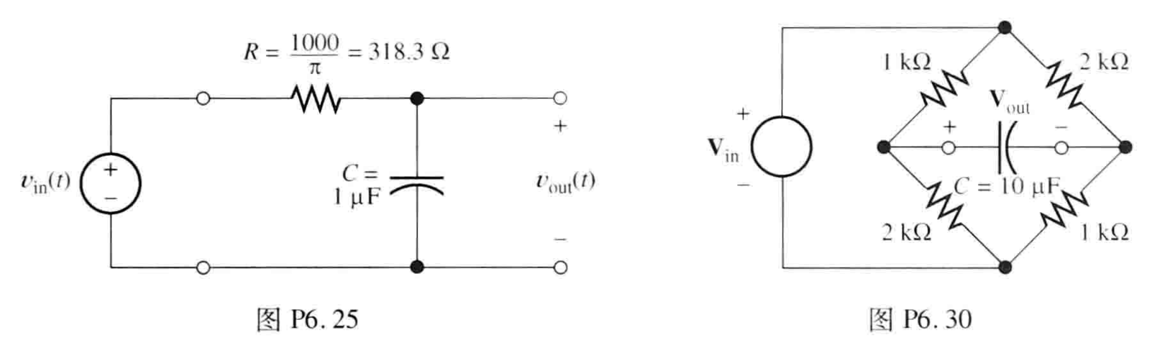


图 P6.25　　　　图 P6.30

P6.31 已知在稳定状态下一阶 *RC* 低通滤波器的输入信号为 $v_{\text{in}}(t) = 5\cos(20\times10^3\pi t)$，输出信号为 $v_{\text{out}}(t) = 0.2\cos(20\times10^3\pi t - \theta)$，试求该滤波器的截止频率和 θ 值。

P6.32 如图 P6.32(a)所示的电路图，该电路由内阻为 R_s 的电源、*RC* 低通滤波器和负载电阻 R_L 组成。(a)证明电路的传递函数为

$$H(f) = \frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{\mathbf{V}_s} = \frac{R_L}{R_s + R + R_L} \times \frac{1}{1 + \mathrm{j}(f/f_B)}$$

其中截止频率为

$$f_B = \frac{1}{2\pi R_t C}, \qquad R_t = \frac{R_L(R_s + R)}{R_L + R_s + R}$$

注意，R_t 是 R_L 与 $(R_s + R)$ 的并联电阻[提示：将电路图按图 P6.32(b)所示重新排布，可使求解更简单]；(b)已知 $C = 0.2$ μF，$R_s = 2$ kΩ，$R = 47$ kΩ，$R_L = 1$ kΩ，画出以 f/f_B 为变量的传递函数幅值图，f/f_B 值为 0～3。

P6.33 (a)电路如图 P6.33 所示，要求：(a)由 $H(f) = \mathbf{V}_{\text{out}}/\mathbf{V}_{\text{in}}$ 写出传递函数的表达式，并求截止频率。(b)已知 $R_1 = 50$ Ω，$R_2 = 50$ Ω，且 $L = 15$ μH，画出传递函数幅值随频率变化的曲线。

P6.34 已知把频率为 20 kHz、有效值为 5 V 的正弦信号输入一阶 *RC* 低通滤波器，其稳态输出电压有效值为 0.5 V。当把输入信号的频率提高到 150 kHz 而幅值不变时，预测滤波器的稳态输出电压有效值。

P6.35 传递函数的概念也适用于机械系统，这可能让人意想不到。设质量为 *m* 的物体在外力作用下在液体中移动，其速率为 *v*，它的运动可由一阶微分方程

$$f = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kv$$

描述，其中 *k* 为黏滞摩擦系数。试求传递函数

$$H(f) = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{F}}$$

的表达式，并计算用 k 和 m 表示的截止频率(定义截止频率为传递函数幅值为其直流值的 $1/\sqrt{2}$ 倍时的频率)。[提示：为了求传递函数，先假设稳态正弦速率为 $v = V_{max}\cos(2\pi ft)$，然后求外力 $\mathbf{F}$ 及它们的矢量比。]

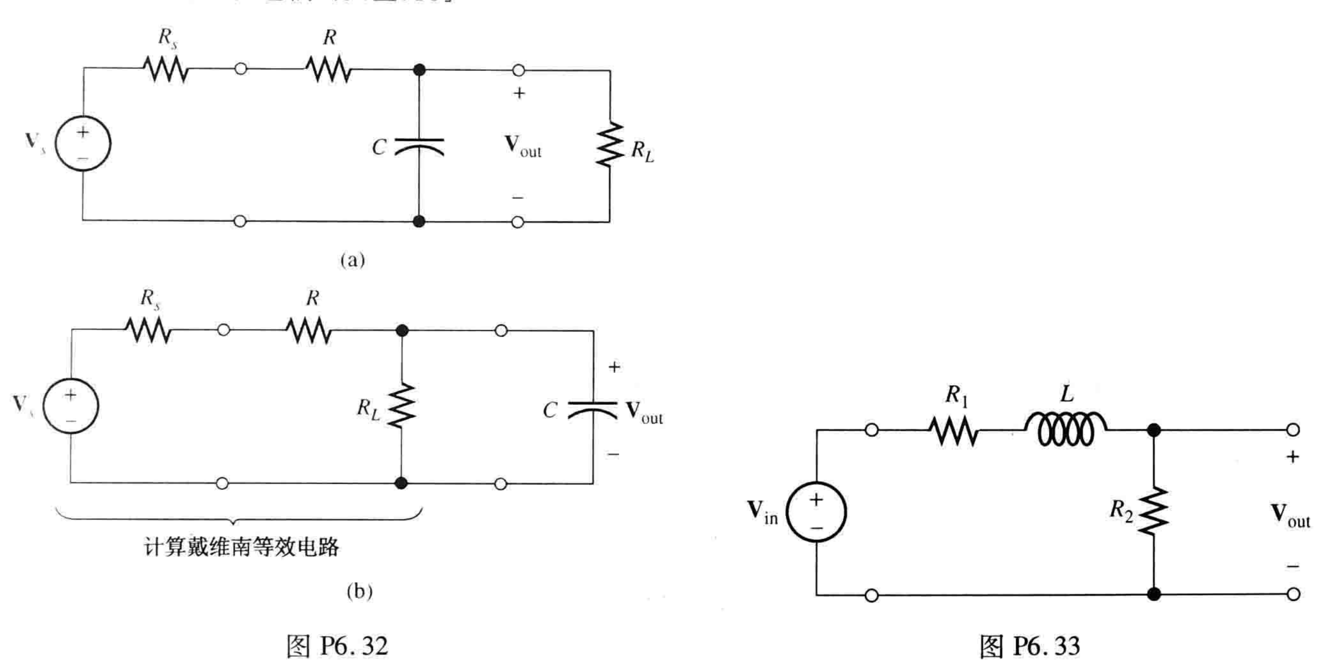


图 P6.32　　　图 P6.33

6.3 节　分贝、级联和对数频率坐标

P6.36　什么是对数频率坐标？什么是线性频率坐标？

P6.37　陷波滤波器是什么？写出它的一个应用。

P6.38　在画图前将传递函数的幅值转化为分贝值的最重要的优点是什么？

P6.39　解释一个滤波器的通频带。

*P6.40　(a)已知 $|H(f)|_{dB} = -10$ dB，求 $|H(f)|$。(b)如果已知 $|H(f)|_{dB} = 10$ dB，求 $|H(f)|$。

*P6.41　(a)试在对数频率坐标上计算居于 100 Hz 和 3000 Hz 中间的频率值。(b)在线性频率坐标上，居于100 Hz和 3000 Hz 中间的频率值为何值呢？

P6.42　求下列值的分贝值：$|H(f)| = 0.5$，$|H(f)| = 2$，$|H(f)| = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$，$|H(f)| = \sqrt{2}$。

P6.43　分别求下列频率值：(a)比 800 Hz 高一个八倍频程；(b)比 800 Hz 低两个八倍频程；(c)比 800 Hz 低两个十倍频程；(d)比 800 Hz 高一个十倍频程。

P6.44　解释级联的意思。

P6.45　已知一系列连续的频率值：2，f_1，f_2，f_3，50 Hz，分别计算当(a)这些频率值平均地分布在线性频率坐标上；(b)这些频率值平均地分布在对数频率坐标上时 f_1、f_2 和 f_3 的值。

*P6.46　如图 P6.46 所示，两低通滤波器级联，它们的传递函数为

$$H_1(f) = H_2(f) = \frac{1}{1 + j(f/f_B)}$$

(a)写出总传递函数的表达式；(b)求总的传递函数的截止频率 f_B。

(说明：这个滤波器不能像图 6.8 所示的滤波器由两个简单的 RC 低通滤波器级联组成，因为当与第二个滤波器级联时，第一个滤波器的传递函数已经改变。这时，缓冲放大器(如在随后的 14.3 节中讨论的电压跟随器)必须加在两个 RC 滤波器之间。)

P6.47　在频率 $f_1 = 20$ Hz 和 $f_2 = 4.5$ kHz 之间有多少个十倍频？有多少个八倍频？

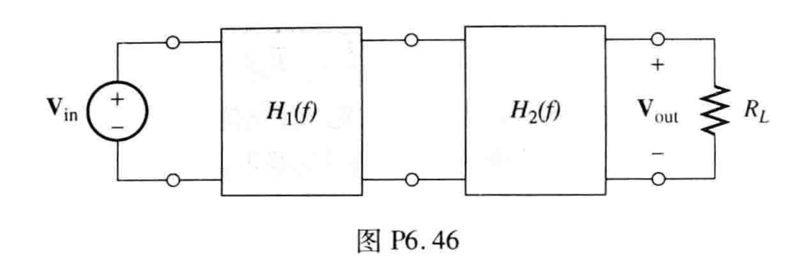


图 P6.46

P6.48 已知两个级联的滤波器的传递函数分别为 $H_1(f)$ 和 $H_2(f)$，求总的传递函数。当传递函数的幅值用分贝表示为 $|H_1(f)|_{dB}$ 和 $|H_2(f)|_{dB}$ 时，求总的传递函数。考虑到 $H_1(f)$ 时，应该注意什么？

P6.49 已知两滤波器级联，在频率 f_1 处传递函数分别有 $|H_1(f_1)|_{dB} = -30$ 和 $|H_2(f_1)|_{dB} = +10$，试求级联后整个滤波器的传递函数在 f_1 处的分贝幅值。

6.4 节 伯德图

P6.50 伯德图是什么？

P6.51 一阶低通滤波器的幅频特性图中高频渐近线的斜率是多少？低频渐近线的斜率是多少？高频和低频渐近线在频率为何值时相交？

*P6.52 已知传递函数

$$H(f) = \frac{100}{1 + j(f/1000)}$$

试画出幅值和相位的伯德图，并求截止频率。

P6.53 假设 3 个传递函数相同的一阶低通滤波器级联，当频率高于截止频率时总传递函数的下降率是多少？为什么？

P6.54 如图 P6.54 所示的电路图，求其传递函数 $H(f) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$，并画出幅值和相位的伯德图。

P6.55 已知传递函数：

$$H(f) = \frac{10}{1 - j(f/500)}$$

试画出幅值和相位的伯德图，并求截止频率。

P6.56 已知一个电路：

$$v_{out}(t) = v_{in}(t) - 200\pi \int_0^t v_{out}(t)dt$$

(a)设 $v_{out} = A\cos(2\pi ft)$，求 $v_{in}(t)$ 的表达式；(b)利用(a)的结果求系统的传递函数 $H(f) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$；(c)画出传递函数幅值的伯德图。

P6.57 如图 P6.57 所示的电路图，求其传递函数 $H(f) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$，并画出幅值和相位的伯德图。

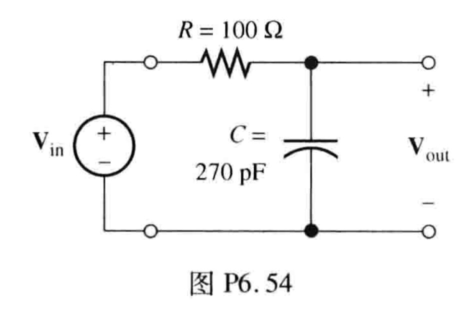


图 P6.54

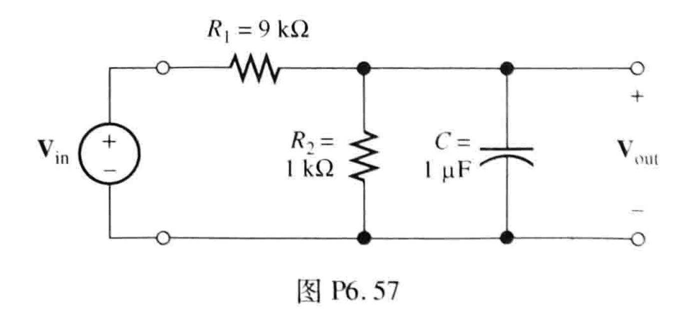


图 P6.57

P6.58 已知传递函数：

$$H(f) = \frac{1 - j(f/100)}{1 + j(f/100)}$$

试画出幅值和相位的伯德图。

P6.59　如图 P6.59 所示的电路图，求其传递函数 $H(f) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$，并画出幅值和相位的伯德图。

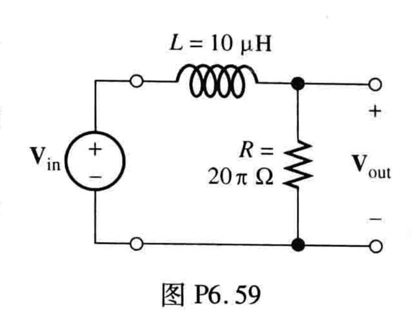


图 P6.59

* P6.60　解习题 P6.14 得积分电路的传递函数为 $H(f) = 1/j2\pi f$，画出其幅值和相位的伯德图，并求幅频特性图的斜率。

P6.61　解习题 P6.20 得微分电路的传递函数为 $H(f) = j2\pi f$，画出其幅值和相位的伯德图，并求幅频特性图的斜率。

6.5 节　一阶高通滤波器

P6.62　画出一阶 RC 高通滤波器的电路图，并求其截止频率。

P6.63　一阶高通滤波器的幅频特性图中高频渐近线的斜率是多少？低频渐近线的斜率是多少？高频和低频渐近线在频率为何值时相交？

* P6.64　如图 P6.64 所示的电路图，求其传递函数 $H(f) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$，并画出幅值和相位的伯德图。

* P6.65　已知一阶高通滤波器如图 P6.65 所示，输入信号为

$$v_{in}(t) = 5 + 5\cos(2000\pi t)$$

试求稳定条件下输出 $v_{out}(t)$。

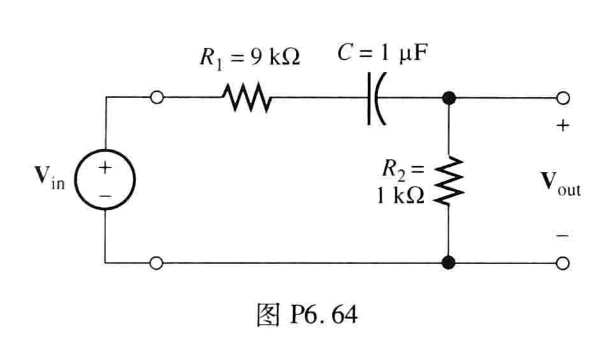


图 P6.64

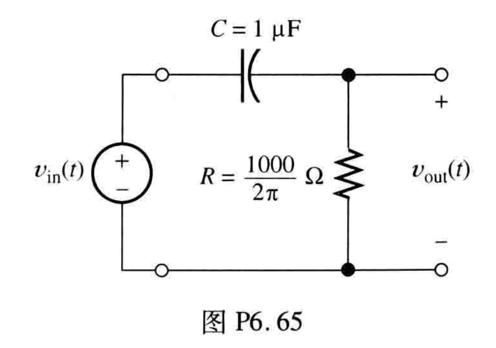


图 P6.65

P6.66　当输入信号为 $v_{in}(t) = 10\cos(400\pi t) + 20\cos(4000\pi t)$ 时，重复习题 P6.65 的问题。

P6.67　设需要一个一阶高通滤波器(比如图 6.19)使 60 Hz 的输入信号衰减 60 dB，其截止频率应为多少？当 600 Hz 的信号分量通过这个滤波器时会衰减多少？若 $R = 5\ \text{k}\Omega$，求 C 的值。

P6.68　如图 P6.68 所示的电路图，画出其传递函数 $H(f) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$ 幅值和相位的伯德图。

P6.69　如图 P6.69 所示的电路图，画出其传递函数 $H(f) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$ 幅值和相位的伯德图。

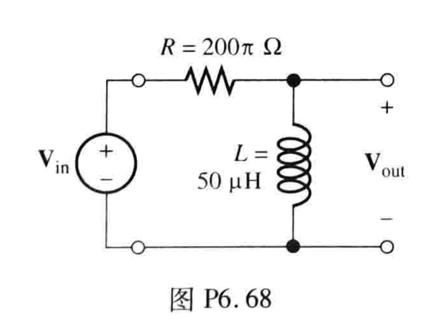


图 P6.68

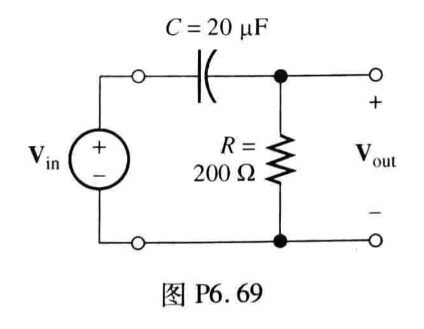


图 P6.69

6.6 节　串联谐振

P6.70　一个 RLC 串联电路在谐振频率处的阻抗有什么特点？如何定义谐振频率和品质因素？

P6.71　什么是带通滤波器？它的带宽是怎样定义的？

* P6.72　设图 6.72 所示电路为串联谐振，其中 $L = 20\ \mu\text{H}$，$R = 14.14\ \Omega$，$C = 1000\ \text{pF}$，试求该电路的谐振频率、带宽及截止频率。假设信号源频率与谐振频率相同，试求各元件的电压相量，并画出电路相量图。

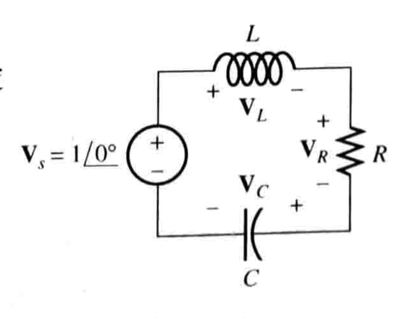


图 P6.72

P6.73 若 $L = 80\ \mu H$, $R = 1.414\ \Omega$, $C = 1000\ pF$, 重复习题 P6.72 的问题。

P6.74 已知一个串联谐振电路, $B = 30\ kHz$, $f_0 = 300\ kHz$, $R = 40\ \Omega$, 求电感 L 和电容 C 的值。

*P6.75 已知一个串联谐振电路, $R = 50\ \Omega$, 在其谐振频率 $f_0 = 1\ MHz$ 处有 $|\mathbf{V}_R| = 2\ V$, $|\mathbf{V}_L| = 20\ V$, 求电感 L 和电容 C 的值, 并计算 $|\mathbf{V}_C|$。

P6.76 假设一个串联谐振电路的带宽 $B = 600\ kHz$, 谐振频率 $f_0 = 12\ MHz$, 同时, 电路的阻抗值达到最小值 20 Ω。试求该电路中的电阻 R、电感 L 和电容 C 的值。

P6.77 如图 P6.77 所示的电路图, 求谐振频率的表达式。(记住, 谐振频率定义为当电路中阻抗为纯电阻时的频率。)

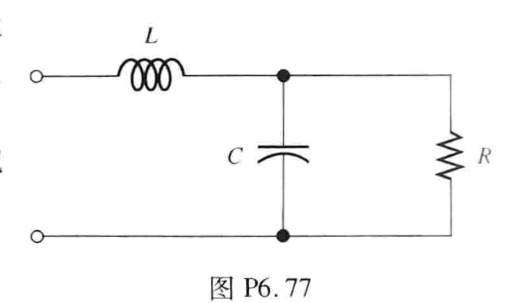


图 P6.77

6.7 节 并联谐振

P6.78 一个 RLC 并联电路在谐振频率处的阻抗有什么特点?
它的谐振频率是如何定义的? 试比较并联谐振电路和串联谐振电路的品质因数。

*P6.79 已知一并联谐振电路, 其中 $R = 5\ k\Omega$, $L = 50\ \mu H$, $C = 200\ pF$, 试求谐振频率、品质因数及带宽。

P6.80 已知一并联谐振电路, 其谐振频率为 $f_0 = 20\ MHz$, 带宽 $B = 200\ kHz$, 电路的最大阻抗值 $|Z_p = 5\ k\Omega|$, 试求电阻 R、电感 L 和电容 C 的值。

P6.81 已知如图 6.29 所示的并联谐振电路, 其中 $R = 1\ k\Omega$, 谐振频率 $f_0 = 10\ MHz$, 带宽 $B = 500\ kHz$, 试求电感 L 和电容 C 的值。如果 $\mathbf{I} = 10^{-3}\angle 0°$, 要求画出电路谐振时, 电流流经各元件产生的电压相量。

P6.82 已知一并联谐振电路, $R = 2\ k\Omega$, 谐振频率 $f_0 = 100\ MHz$, 带宽 $B = 5\ MHz$, 试求电感 L 和电容 C 的值。

6.8 节 理想滤波器和二阶滤波器

P6.83 写出 4 种理想滤波器的名字, 并画出其传递函数的幅值图。

*P6.84 已知一个理想的带通滤波器的截止频率分别为 9 kHz 和 11 kHz, 其通带增益为 2, 画出传递函数的幅频特性伯德图。对于理想的带阻滤波器, 重复这个要求。

P6.85 已知一个理想的低通滤波器的截止频率分别为 10 kHz, 其通带增益为 2, 画出传递函数的幅频特性伯德图。对于理想的高通滤波器, 重复这个要求。

P6.86 每个调幅收音机信号分量的频率范围都是从低于其载波频率的 10 Hz 到高于其载波频率的 10 MHz, 在给定的区域里不同的广播电台有不同的载波频率, 以至于信号的频率范围不会重叠。设一个 AM 无线电发射机的载波频率为 980 kHz, 如果想要接收到这个发射机的信号而抑制其他所有发射机的信号, 应该选用何种滤波器? 截止频率取何值最好?

P6.87 在心电图描记器中, 心脏信号的频率范围从直流到 100 Hz。当人在跑步机上运动时, 电极获得信号也包含了肌肉收缩产生的噪声信号, 且大多数的噪声信号频率超过 100 Hz, 应使用何种滤波器来抑制噪声? 滤波器的截止频率应选何值?

*P6.88 画出二阶高通滤波器的电路图, 设 $R = 1\ k\Omega$, $Q_s = 1$, $f_0 = 100\ kHz$, 试求电感 L 和电容 C 的值。

P6.89 画出二阶高通滤波器的电路图, 设 $R = 50\ \Omega$, $Q_s = 0.5$, $f_0 = 30\ MHz$, 试求电感 L 和电容 C 的值。

P6.90 设有正弦干扰信号加在一个频率范围从 20 Hz 到 15 kHz 的音频信号上, 干扰信号的频率在 950 Hz到 1050 Hz 中缓慢变化, 所以需要一个滤波器将干扰信号至少衰减 20 dB 而使大部分音频信号通过, 选用何种滤波器? 画出符合条件的滤波器的传递函数的幅值伯德图, 并标注它的详细说明。

6.9 节 使用 MATLAB 软件求传递函数和伯德图

P6.91 如图 6.91 所示的滤波器。(a) 写出传递函数 $H(f) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$ 的表达式; (b) 已知 $R_1 = 9\ k\Omega$, $R_2 = 1\ k\Omega$, 且 $C = 0.01\ \mu F$, 频率范围从 10 Hz 到 1 MHz, 使用 MATLAB 画出其传递函数的幅

值伯德图；(c)在频率很低时，电容相当于开路，求这种情况下的传递函数并估算(b)中的电路参数，计算结果和(b)图中的值一致吗？(d)在频率很高时，电容相当于短路，求这种情况下的传递函数和估算(b)中的电路参数，计算结果和(b)图中的值一致吗？

P6.92　如图 6.92 所示的滤波器，重复习题 P6.91 中的问题。

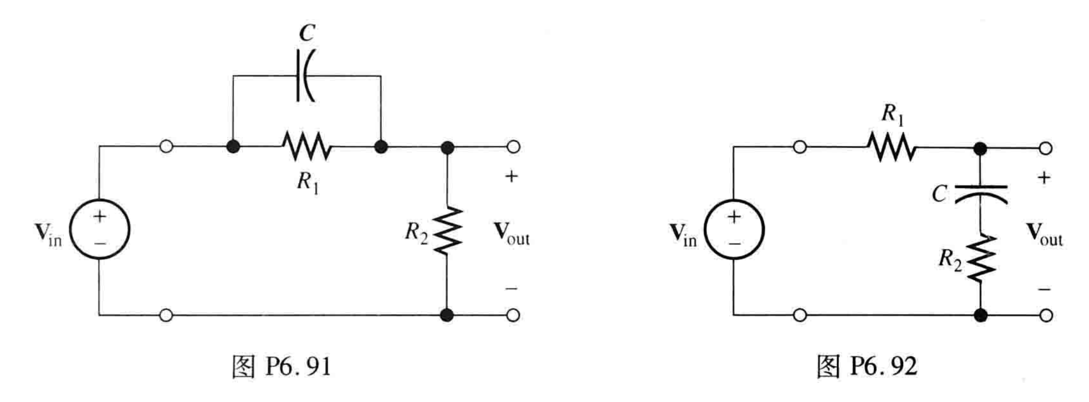


图 P6.91　　　图 P6.92

P6.93　设需要一个伯德图如图 P6.93(a)所示的滤波器，可采用如图 P6.93(b)所示的高通滤波器和低通滤波器级联来实现。令 $R_2 = 100R_1$，在分析第一级电路(左侧)时，可视第二级(右侧)电路为开路。问：(a)哪几个元件组成低通滤波器？哪几个元件组成高通滤波器？(b)左侧电路近似有一个开路负载，计算电容为何值时能得到符合条件的截止频率；(c)写出传递函数 $H(f) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$ 的表达式，并使用 MATLAB 绘制频率范围从 1 Hz 到 1 MHz 的传递函数幅值伯德图，运行结果应该与图 P6.93 相似。

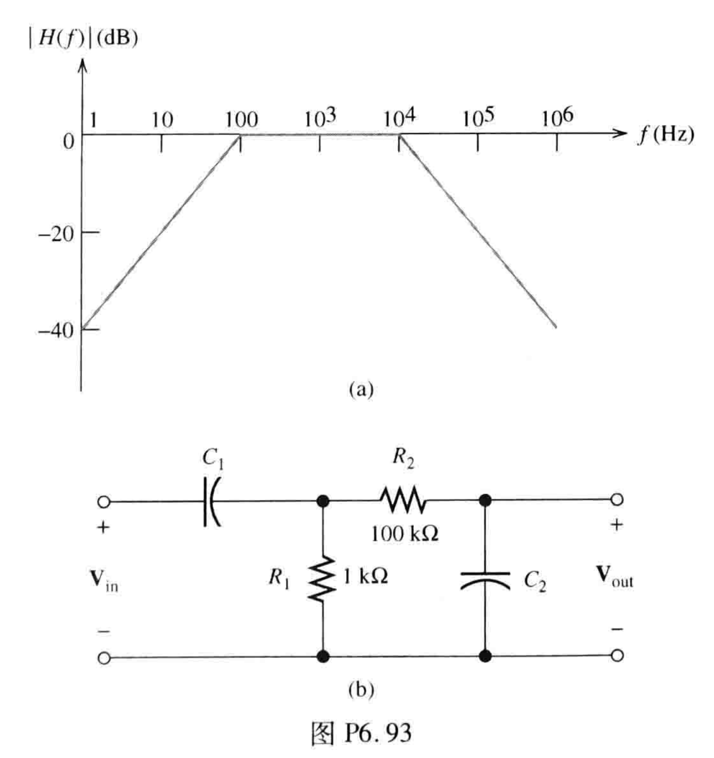


图 P6.93

P6.94　设需要一个伯德图如图 P6.93(a)所示的滤波器，可采用如图 P6.94 所示的高通滤波器和低通滤波器级联来实现。令 $C_2 = C_1/100$，在分析第一级电路(左侧)时，可视第二级(右侧)电路为开路。问：(a)哪几个元件组成低通滤波器？哪几个元件组成高通滤波器？(b)左侧电路近似有一个开路负载，计算电容为何值时能得到符合条件的截止频率；(c)写出传递函数 $H(f) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$ 的表达式并使用 MATLAB 绘制频率范围从 1 Hz 到 1 MHz 的传递函数幅值伯德图，运行结果应该与图 P6.93 相似。

P6.95　由 R、L 和 C 组成的其他电路也有与串联谐振电路相似的特性，例如，图 P6.95 所示的电路图，(a)求电路的谐振频率的表达式；(b)若 $L = 1$ mH，$R = 1000\ \Omega$，$C = 0.25\ \mu$F，求谐振频

率;(c)使用 MATLAB 绘制频率范围从 95% 谐振频率至 105% 谐振频率的阻抗幅值图，并与串联 RLC 电路的结果进行比较。

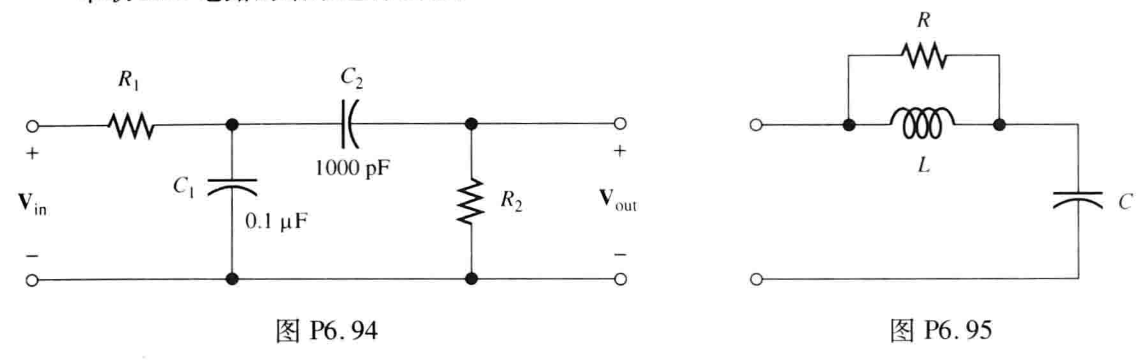


图 P6.94 图 P6.95

P6.96 如图 P6.77 所示的电路图，已知 $R = 1000\ \Omega$, $L = 1$ mH, $C = 0.25\ \mu$F。(a)使用 MATLAB 绘制频率范围为 9 ~ 11 kHz 的阻抗幅值图;(b)观察阻抗幅值图，写出最小阻抗值及此时的频率和带宽;(c)求与(b)中有相同参数的串联 RLC 电路的元件值;(d)在与(a)中相同的坐标系中画出串联电路的阻抗幅值图。

P6.97 由 R、L 和 C 组成的其他电路也有与并联谐振电路相似的特性。例如，图 P6.97 所示的电路图。(a)求电路的谐振频率的表达式;(b)若 $L = 1$ mH, $R = 1000\ \Omega$, $C = 0.25\ \mu$F, 求谐振频率;(c)使用 MATLAB 绘制频率范围从 95% 谐振频率至 105% 谐振频率的阻抗幅值图，并与并联 RLC 电路的结果进行比较。

P6.98 如图 P6.98 所示的电路图。(a)写出传递函数 $H(f) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$ 的表达式;(b)已知 $R = 10\ \text{k}\Omega$, $L = 10$ mH, 且 $C = 0.02533\ \mu$F, 频率范围从 1 kHz 到 100 kHz, 使用 MATLAB 画出其传递函数的幅值伯德图;(c)在频率很低时，电感相当于短路，电容相当于开路，求这种情况下的传递函数表达式并估算(b)中的电路参数，计算结果和(b)图中的值一致吗?(d)在频率很高时，电容相当于短路，电感相当于开路，求这种情况下的传递函数表达式并估算(b)中的电路参数，计算结果和(b)图中的值一致吗?

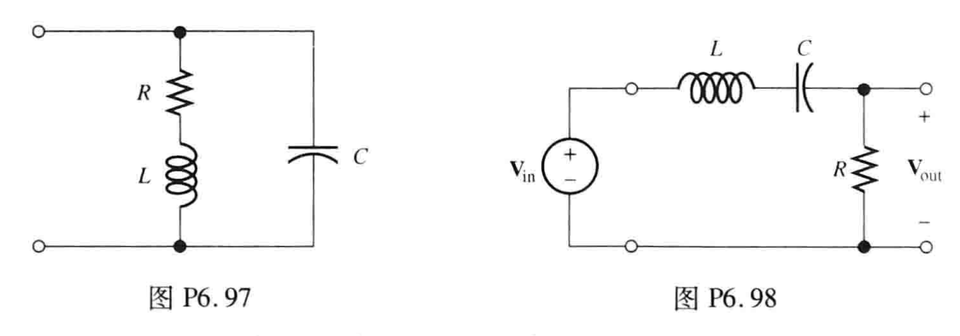


图 P6.97 图 P6.98

P6.99 如图 P6.99 所示的电路图，重复习题 P6.98 中的问题。

P6.100 如图 P6.100 所示的低通滤波器，使用例 6.9 的方法得到传递函数 $H(f) = \mathbf{V}_{out}/\mathbf{V}_{in}$ 的幅频特性伯德图，频率范围从 100 kHz 到 10 MHz;再通过手工计算验证图中高频点和低频点的值，并求截止频率。

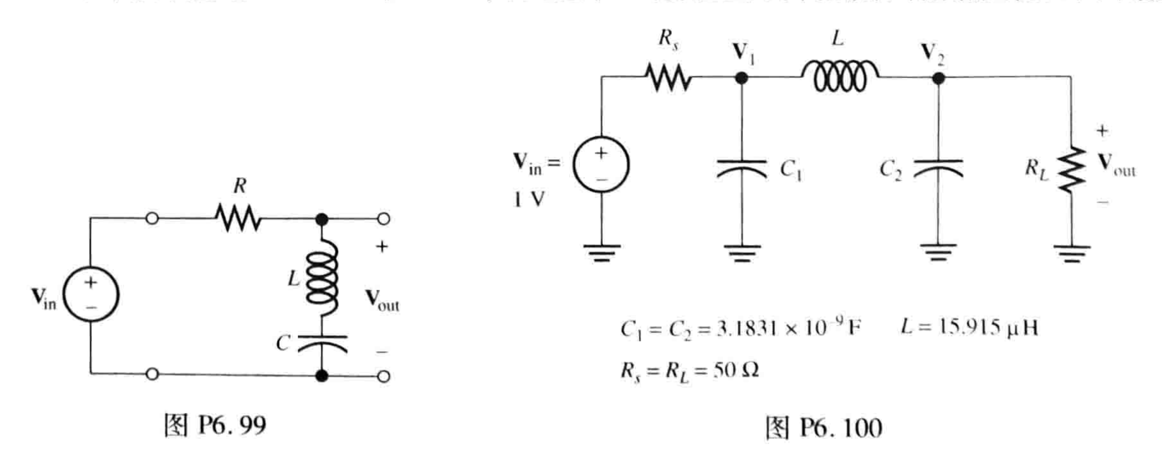
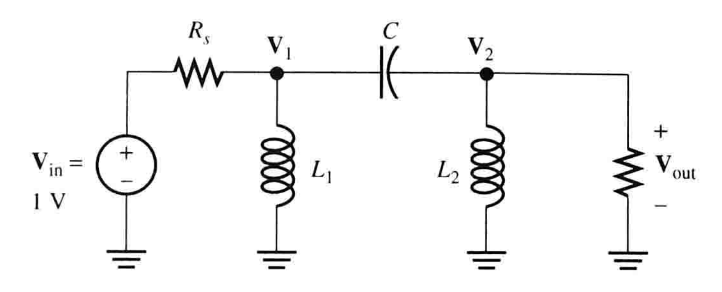


图 P6.99 图 P6.100

P6.101　如图 P6.101 所示的高通滤波器，重复习题 P6.100 的问题。



$L_1 = L_2 = 7.9577\ \mu H \qquad C = 1591.5\ pF$

$R_s = R_L = 50\ \Omega$

图 P6.101

6.10 节　数字信号处理

P6.102　如图 P6.102 所示的 RL 滤波器，模仿其功能设计一个数字滤波器。(a)求各系数的表达式，用时间常数τ和采样周期 T 表示(提示：如果求得的电路方程包含积分，那么就对时间求微分得到一个纯粹的微分方程)；(b)已知 $R = 10\ \Omega$，$L = 200\ mH$，画出电路的阶跃响应图；(c)使用 MATLAB 软件求解和绘制不同时间常数下数字滤波器的阶跃响应，再使用(b)中的时间常数和 $f_s = 500\ Hz$，比较(b)和(c)的结果。

P6.103　如图 P6.103 所示的滤波器，重复习题 P6.102 的问题。

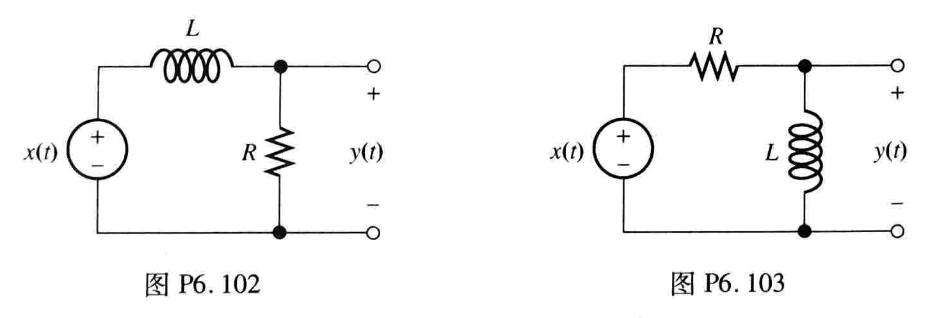


图 P6.102　　　　图 P6.103

*P6.104　如图 P6.104 所示的二阶带通滤波器。(a)求电感 L 和电容 C 的表达式，用谐振频率 ω_0 和品质因素 Q_s 表示；(b)写出电路的 KVL 方程，模仿 RLC 滤波器的功能设计一个数字滤波器，再用(a)中的计算结果求谐振频率 ω_0、品质因数 Q_s 和采样周期 T 表示的各系数。(提示：如果求得的电路方程包含积分，那么就对时间求微分得到一个纯粹的微分方程。)

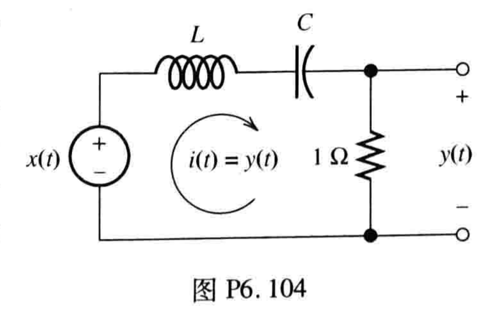


图 P6.104

测试题

这份测试题可以检查你自己对本章要点的理解程度，答案见附录 E，完整的解答过程见学生资源。参考附录 F 可以获得更多关于学生资源的信息。

T6.1　当涉及真实世界的信号时，傅里叶理论的基本概念是什么？滤波器的传递函数与它有什么联系？

T6.2　如图 T6.2 所示的 RL 滤波器，已知

$$v_{in}(t) = 3 + 4\cos(1000\pi t) + 5\cos(2000\pi t - 30^\circ)$$

求输出信号的表达式。

T6.3　已知滤波器的传递函数为

$$H(f)=\frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{\mathbf{V}_{\text{in}}}=50\frac{\text{j}(f/200)}{1+\text{j}(f/200)}$$

由其幅频特性伯德图可得：

(a)低频渐近线的斜率为多少?

(b)高频渐近线的斜率为多少?

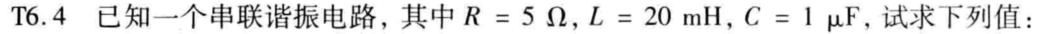
(c)高频渐近线与低频渐近线交点的坐标是多少?

(d)此滤波器是什么类型?

(e)截止频率值为多少?

$20\pi\ \Omega$　$v_{\text{in}}(t)$　10 mH　$v_{\text{out}}(t)$

图 T6.2


T6.4　已知一个串联谐振电路，其中 $R = 5\ \Omega$，$L = 20\ \text{mH}$，$C = 1\ \mu\text{F}$，试求下列值：

(a)谐振频率，单位 Hz；

(b)品质因数 Q；

(c)带宽，单位 Hz；

(d)谐振频率处电路的阻抗；

(e)直流时电路的阻抗；

(f)频率接近无穷大时电路的阻抗。

T6.5　已知一个串联谐振电路，其中 $R = 10\ \text{k}\Omega$，$L = 1\ \text{mH}$，$C = 1000\ \text{pF}$，重复 T6.4 的问题。

T6.6　如图 T6.6 所示，每个电路图的传递函数都为 $\frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{\mathbf{V}_{\text{in}}}$，将下列电路按一阶低通滤波器、二阶带通滤波器等来分类，并证明你的答案。

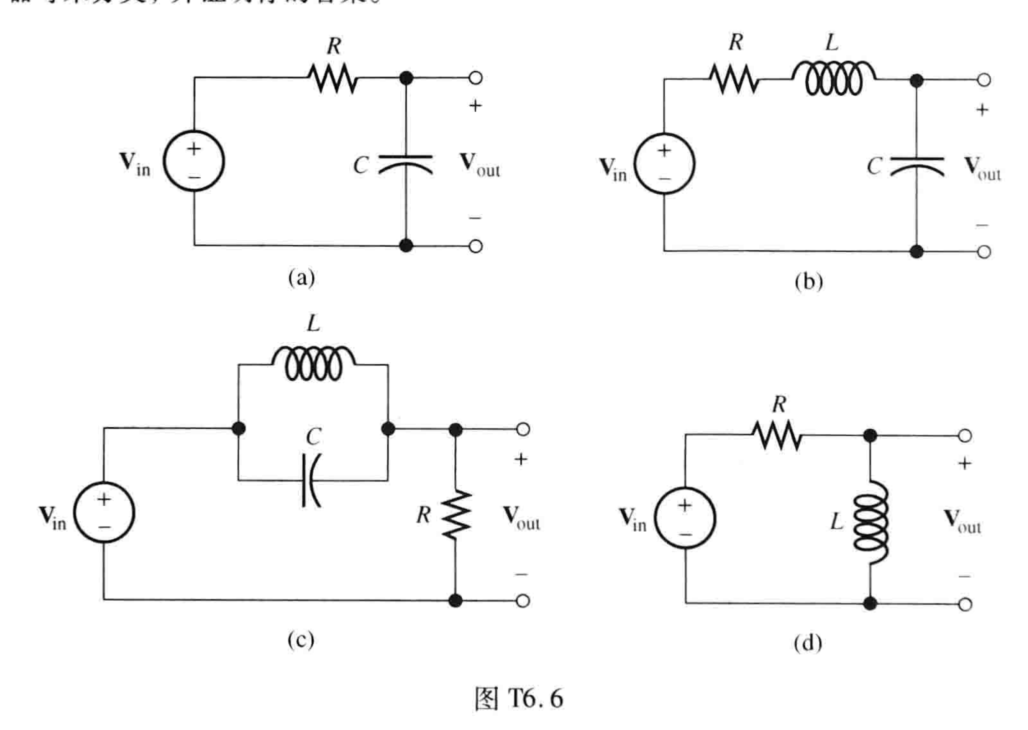


图 T6.6

T6.7　写出绘制 T6.3 中传递函数的幅频特性伯德图所需的 MATLAB 指令，其中频率范围为 10 Hz ~ 10 kHz。

第Ⅱ部分

数 字 系 统

第7章 逻辑电路

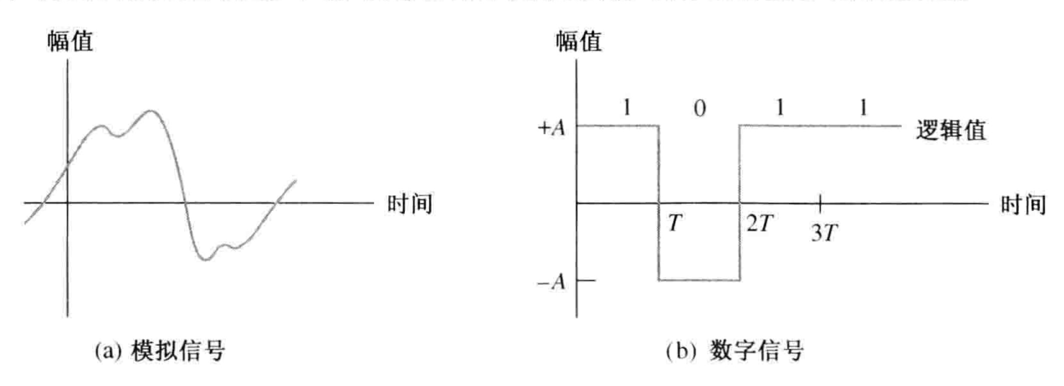
本章学习目标

- 理解数字电子技术与模拟电子技术相比较的优势
- 理解与数字电路相关的术语
- 掌握十进制、二进制和其他进制数之间的转换
- 了解格雷码在位置和角度传感器中的应用
- 理解计算机和其他数字系统中的二进制代数运算
- 掌握由各种逻辑门电路相组合实现给定逻辑函数的方法
- 掌握采用卡诺图法减少门电路数量实现逻辑函数的方法
- 掌握采用门电路构成触发器和寄存器的方法

本章介绍

至此，我们学习了用于处理模拟信号的滤波器等电路。模拟信号的幅值是连续变化的，而且各幅值具有独特的意义。例如，一个位置传感器会输出正比于位移量的模拟信号，该信号的幅值即表示不同的位置。模拟信号的波形如图7.1(a)所示。

本章将介绍处理数字信号的电路。仅有有限个幅值的信号称为数字信号，在给定范围内的幅值具有相同的重要性。最常见的数字信号是二进制信号，其幅值只有两种取值范围，分别表示逻辑1或者逻辑0，图7.1(b)为一数字信号的波形。计算机系统是典型的数字电路，通过本章的学习，我们将发现采用数字信号处理比采用模拟信号处理有更多的优越性。



(a) 模拟信号　　(b) 数字信号

图7.1 幅值连续的模拟信号和幅值离散的数字信号

7.1 逻辑电路的基本概念

模拟信号常见于真实的世界，例如一个压力转换器可以将内燃机引擎产生的压力值转换为与压力成正比的模拟电压信号。根据6.9节，模拟信号可以转换为表示相同信息的数字信号，这样转换之后，便于采用计算机或者其他数字电路进行处理。所以，在应用过程中可以选择采用数字信号处理还是模拟信号处理方式。

7.1.1 数字信号处理的优点

与模拟信号相比，数字信号具有几个重要的优点。首先，如果模拟信号受到了噪声干扰，要想鉴别原始信号是非常困难的。但是，如果数字信号受到了噪声干扰，在噪声幅值比较小的情况下，则可以明显区分出数字信号的逻辑0或者逻辑1，图7.2为分别受到噪声干扰的模拟信号和数字信号。

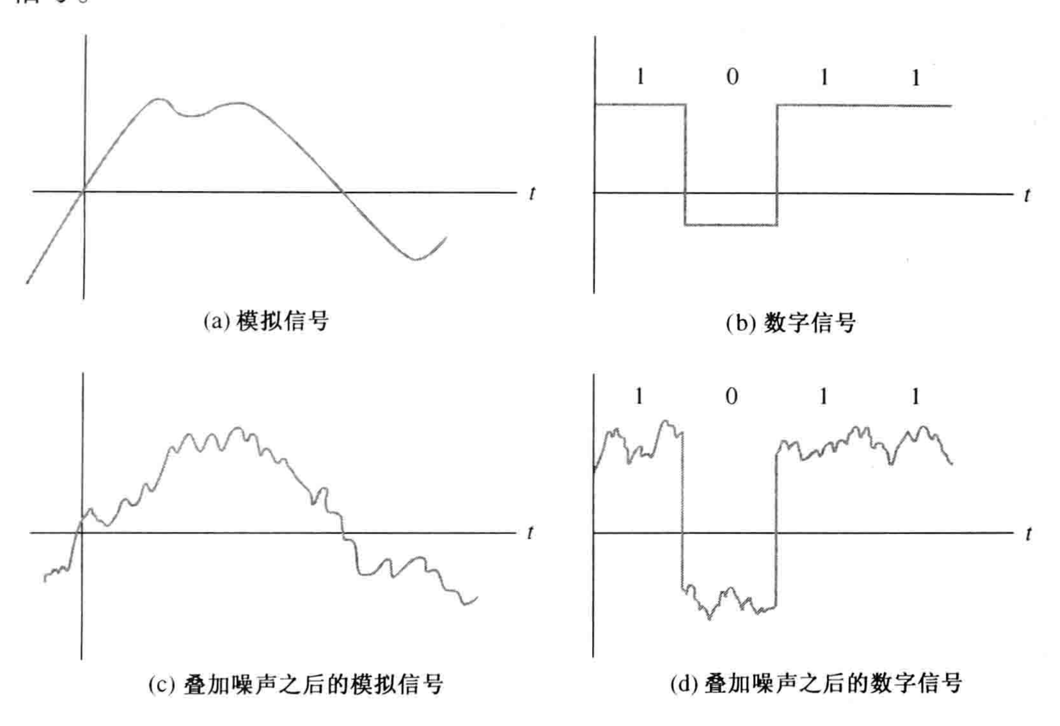


图7.2 施加了噪声之后的数字信号表示的信息(逻辑值)仍然可以准确判定。然而，当噪声与模拟信号混杂一起，却难以鉴别模拟信号的原始幅值

对一个给定的逻辑电路，事先要指定逻辑1和逻辑0表示的电压范围，在数字系统中只要输出电压值在允许范围内即可，因此数字电路的元器件值无须达到与模拟电路相同的精度。

其次，随着现代集成电路制造技术的发展，复杂数字逻辑电路(可集成上百万个元件)的生产成本大大降低。而模拟电路中需要大容量电容器和高精度元件，难以进行大规模集成化生产。因此，数字系统在过去数十年内得到重视与发展，而未来仍然会继续。

7.1.2 正逻辑与负逻辑

通常，我们约定二进制系统数字信号中幅值高的电压为逻辑1，幅值低的电压为逻辑0，这种系统定义为正逻辑系统。反之，负逻辑系统定义高幅值的电压为逻辑0，低幅值的电压为逻辑1。如果未加注明，本书中均采用正逻辑系统。

逻辑1也称为高、真或者开；与之相对应，逻辑0称为低、伪或者关。逻辑系统通过信号在高与低之间的切换来表示信息的变换。我们定义的这些信号称为逻辑变量，一般用大写字母A、B、C来表示。

7.1.3 电平区和噪声容限

通常，逻辑电路的输入电压值如果在一定范围内被视为逻辑1，则在另一个非交叠的电压

范围内被视为逻辑 0。其中，视为逻辑 0 或者低电平的允许电压最大值定义为 V_{IL}；视为逻辑 1 或者高电平的允许电压最小值定义为 V_{IH}，如图 7.3 所示。因此，在 V_{IL} 和 V_{IH} 之间的电压值是无意义的，仅发生在电压转换之时。

另外，电路设计要求输出电压的允许范围比输入信号的更窄，前提条件是输入电压在此范围内。如图 7.3 所示，V_{OL} 是低电平输出电压的允许最大值，V_{OH} 是高电平输出电压的允许最小值。

由于在信号传输过程中噪声可能叠加在数字信号上，因此输出电压必须有比输入电压更窄的允许变化范围，这样的差异称为噪声容限。

$$NM_L = V_{IL} - V_{OL}$$

$$NM_H = V_{OH} - V_{IH}$$

在理想情况下，噪声容限电压越大越好。

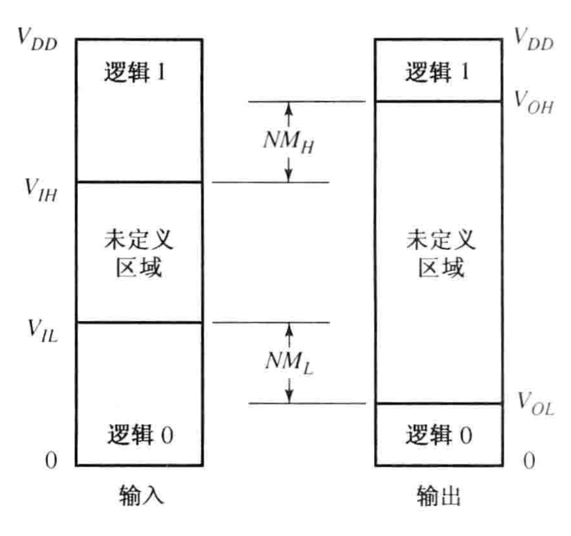


图 7.3 数字电路输入电平和输出电平的范围

7.1.4 数字字

我们把单个二进制数称为位(比特)，表示非常小的信息量。例如，一个逻辑变量 R 可表示某特定地区是否有雨，即 $R=1$ 表示有雨，$R=0$ 表示无雨。为了表示更多的信息，我们采用逻辑变量的组合 RWS，称为数字字。例如，字 RWS 表示天气状况，其中 R 表示是否有雨；$W=1$ 表示风速大于 15 里/小时，反之 $W=0$ 表示风速小于 15 里/小时；S 表示晴朗天气($S=1$)或者多云天气($S=0$)。这样，数字字 110 表示有雨、大风和多云的天气。通常，一个字节由 8 位字组成，而一个半位元是 4 位字。

7.1.5 数字信息的传输

并行传输表示 n 位字信息同时通过 $n+1$ 条线，每条线通过 1 位信息，另加公共线或者地线。反之，串行传输表示所有的字信息一个接一个依次通过同一对线路。在接收端，所有的位信息被收集并组合为字。与串行传输相比，并行传输更快速，通常用于短距离传输信息，例如计算机内部的数据传输，而串行传输方式更适用于长距离数字通信系统。

7.1.6 数字信息处理系统的应用

采用一串由逻辑值和二进制数预置组成的 100 位数字字，我们就可以相当准确地提供某地区的天气情况报告。例如，国家气象局里的计算机接收并处理从各个气象站传来的数字信息，并产生包括温度、风速、云、雨量和预测等信息的等高线图。这些图对理解和预测天气状况非常有帮助。

模拟信号可以通过其周期性采样值(采样，即在各相等间距的时间点上的瞬时测量值)而加以重构，前提是采样率要足够高。各采样点的幅值分别由一个数字字表示，这样一个模拟信号即由一串数字字表示。通过回放方式，这些数字字即可还原为相应的模拟信号，这就是 CD 录放技术。

可见，电子电路可以按照数字方式收集、存储、传输和处理信息，并产生有效的或者有益的结果。

7.2　二进制数的表示

7.2.1　二进制数

数字字可表示数字。首先，我们可以把十进制数(以10为底)743.2表示为如下形式：

$$7 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1}$$

同样，二进制数(以2为底)1101.1可表示为

$$1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} = 13.5$$

也就是说，二进制数1101.1等于十进制数13.5。不过，这样容易引起混淆，因此，我们采用不同的下标来区分数的进制，例如二进制数1101.1_2和十进制数13.5_{10}。

对于3位二进制数可以得到$2^3=8$个数字字，这些字分别表示十进制整数0～7，如下所示：

000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

同理，一个4位字有16种组合，分别表示十进制整数0～15。一般而言，我们在讨论数字电路中的二进制数时会保留前置0，因为通常设计的电路对定长字进行运算时，会产生前置0。

7.2.2　十进制数与二进制形式的转换

通过将十进制整数反复除以2，直到商为0时为止，即可完成十进制整数向二进制数的转换。注意：转换得到的二进制数是所有除式的余数按逆序方式的组合。

例7.1　十进制整数转换为二进制数。

将十进制整数343_{10}转换为二进制数。

解：运算过程如图7.4所示。十进制数被反复除以2，当商为0时结束除法。所有的余数按逆序方式形成最终的二进制数，即

$$343_{10} = 101010111_2$$

		商	余数
343/2	=	171	1
171/2	=	85	1
85/2	=	42	1
42/2	=	21	0
21/2	=	10	1
10/2	=	5	0
5/2	=	2	1
2/2	=	1	0
1/2	=	0	1

按逆序读等效的二进制数 → 101010111_2

商为0时停止

图7.4　将343_{10}转换为二进制数

反之，将十进制小数反复乘以2，则每次运算的取整值依序组合为相应二进制数的小数部分(在误差允许范围内)。

例7.2　将十进制小数转换为二进制数。

将0.392_{10}转换为最接近的6位二进制数。

解：该转换过程如图7.5所示。十进制数的小数部分被反复乘以2，保留各次积值的整数部分作为等效二进制数的位。当二进制数的位数达到要求的精度时停止运算，从而得到下式的数据：

$$0.392_{10} \approx 0.011001_2$$

如果一个十进制数同时包含整数和小数两部分，在进行二进制转换时，需要将这两部分分别进行转换，然后组合为最后的结果。

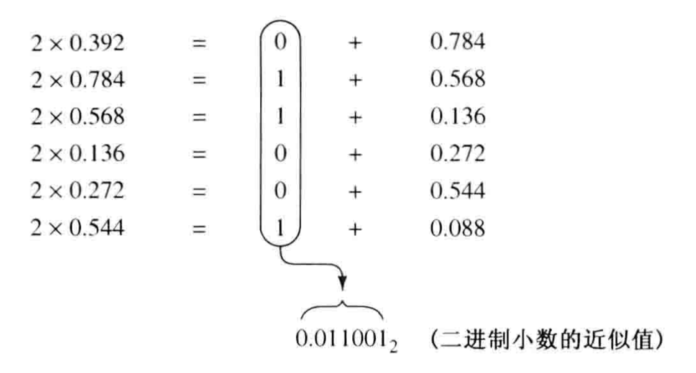


图 7.5 将 0.392_{10}转换为二进制数

例 7.3 将十进制数转换为二进制数。

将 343.392_{10}转换为相应的二进制数。

解: 根据例 7.1 和例 7.2，分别得到

$$343_{10}=101010111_2$$

和

$$0.392_{10}\approx 0.011001_2$$

把这两部分组合起来，即得到

$$343.392_{10}\approx 101010111.011001_2$$

练习 7.1 将以下十进制数分别转换为二进制数，对小数部分的变换最多到 6 位即可：(a)23.75；(b)17.25；(c)4.3。

答案: (a)10111.11；(b)10001.01；(c)100.010011。

练习 7.2 将以下二进制数转换为十进制数：(a)1101.111_2；(b)100.001_2。

答案: (a)13.875_{10}；(b)4.125_{10}。

7.2.3 二进制数的代数运算

二进制数的加法运算与十进制数相同，不过加法规则不同(更简单)，如图 7.6 所示。

例 7.4 二进制数相加。

将两个二进制数 1000.111 和 1100.011 相加。

解: 见图 7.7。

		和	进位
0 + 0	=	0	0
0 + 1	=	1	0
1 + 1	=	0	1
1 + 1 + 1	=	1	1

图 7.6 二进制数的加法

```
  0001 11   ←— 进位
  1000.111
 +1100.011
 ---------
 10101.010
```

7.7 练习 7.4 的答案

7.2.4 十六进制数和八进制数

由于二进制数在表示一个很大的数或者精度很高的小数时需要很多位，不便于人们使用。而八进制数和十六进制数则很容易转换为二进制数，而且它们能更有效地表示信息。

表 7.1 为十六进制数和八进制数符号及与其等值的二进制数。注意：需要用 16 个符号来表示一个十六进制数的各数位。习惯上用字母 A ~ F 表示数 10 ~ 15。

通过用等值的二进制数代替八进制数和十六进制数的每一位，可实现八进制数和十六进制数到二进制数的转换。

例7.5 十六进制数和八进制数转换为二进制数。

将 317.2_8 和 $F3A.2_{16}$ 转换为对应的二进制数。

解：如表7.1所示，可用等值的二进制数代替所给数的每一位，得

$$317.2_8 = 011\ 001\ 111.\ 010_2 = 011001111.010_2$$

和

$$F3A.2_{16} = 1111\ 0011\ 1010.\ 0010 = 111100111010.0010_2$$

表7.1 十六进制数和八进制数及其等值的二进制数

八进制		十六进制	
0	000	0	0000
1	001	1	0001
2	010	2	0010
3	011	3	0011
4	100	4	0100
5	101	5	0101
6	110	6	0110
7	111	7	0111
		8	1000
		9	1001
		A	1010
		B	1011
		C	1100
		D	1101
		E	1110
		F	1111

可见，在将二进制数转换为八进制数时，首先将二进制数的每三位数分为一组，分组从小数点开始，分别向左、向右进行。如果有必要，可以在整数最前端加入前置0，小数最末端加入后置0，完成三位数一组，然后给每一组数分配一个对应的八进制数。二进制数到十六进制数的转换与此类似，不同的只是将每4位二进制数字分成一组。

例7.6 二进制数转换为八进制数或十六进制数。

将 11110110.1_2 转换为对应的八进制数和十六进制数。

解：转换为八进制数时，先将二进制数的每3位数分为一组。分组从小数点开始，分别向左、向右进行：

$$11110110.1_2 = 011\ 110\ 110.\ 100$$

注意：在整数首位和小数尾端添加0是为了使每一组中均包含3位二进制数。接下来，写出与每一组二进制数等值的八进制数，得

$$11110110.1_2 = 011\ 110\ 110.\ 100 = 366.4_8$$

将二进制数转换为十六进制数时，方法同上，只是将每4位二进制数字分成一组，得

$$11110110.1_2 = 1111\ 0110.\ 1000 = F6.8_{16}$$

练习7.3 将下列各数转换为对应的二、八、十六进制数。(a) 97_{10}；(b) 229_{10}。

答案：(a) $97_{10} = 1100001_2 = 141_8 = 61_{16}$；(b) $229_{10} = 11100101_2 = 345_8 = E5_{16}$。

练习7.4 将下列各数转换为对应的二进制数。(a) 72_8；(b) $FA6_{16}$。

答案：(a) 111010_2；(b) 111110100110_2。

7.2.5 二进制编码的十进制数

如果简单地用4位二进制数码表示1位十进制数，则十进制数可用二进制数形式来表示。这样得到的二进制数称为该数的二进制编码的十进制数形式(简称BCD码)。例如：

$$93.2 = 1001\ 0011.\ 0010_{BCD}$$

二进制数组合1010，1011，1100，1101，1110和1111不会出现(除非出错)。计算器内部数据就

使用了 BCD 码，当按下按键时，对应的 BCD 码就被存储下来。如计算

$$9 \times 3 = 27$$

时，对应的 BCD 码形式为

$$1001 \times 0011 = 0010\ 0111$$

虽然计算器使用二进制代码表示十进制整数，但是其内部数据仍然以十进制数形式进行计算，而计算机中的数据则是使用二进制数形式进行计算的。

练习 7.5 将 197_{10} 表示为 BCD 码形式。

答案： $197_{10} = 000110010111_{BCD}$。

7.2.6 格雷码

设有一个具有黑白色带的机器臂，如图 7.8 所示。传感器通过黑白色带来确定机器臂的位置。这里假定光敏二极管将黑色带读为逻辑 1，白色带读为逻辑 0。

如果以图 7.8(a)中的二进制码来判断移动中的机器臂的位置，则可能出现错误。例如，当机器臂从 0011 代表的位置移动到 0100 代表的位置时，二进制码中有 3 位代码变动。如果光电传感器的反应速度不一致，则 0011 可能先变为 0001，再变为 0000，最后才变为 0100。这样，就造成了传感器显示的位置与实际位置的不符。

一种更好的位置编码方式是格雷码，如图 7.8(b)所示。相邻的两个格雷码之间只有一位码发生变化，这样就避免了传感器测得位置与实际位置不符的情况。不同位数的格雷码形式如图 7.9 所示，注意格雷码的连续变化规律。

一位格雷码很简单，仅包括两个字 0 和 1；n 位格雷码的列写规律如下：将 $n-1$ 位格雷码组成首阵列，其逆序形式组成第二阵列。同时，在首阵列的每组编码的左端加 0；而在第二阵列的每组编码的左端加 1。

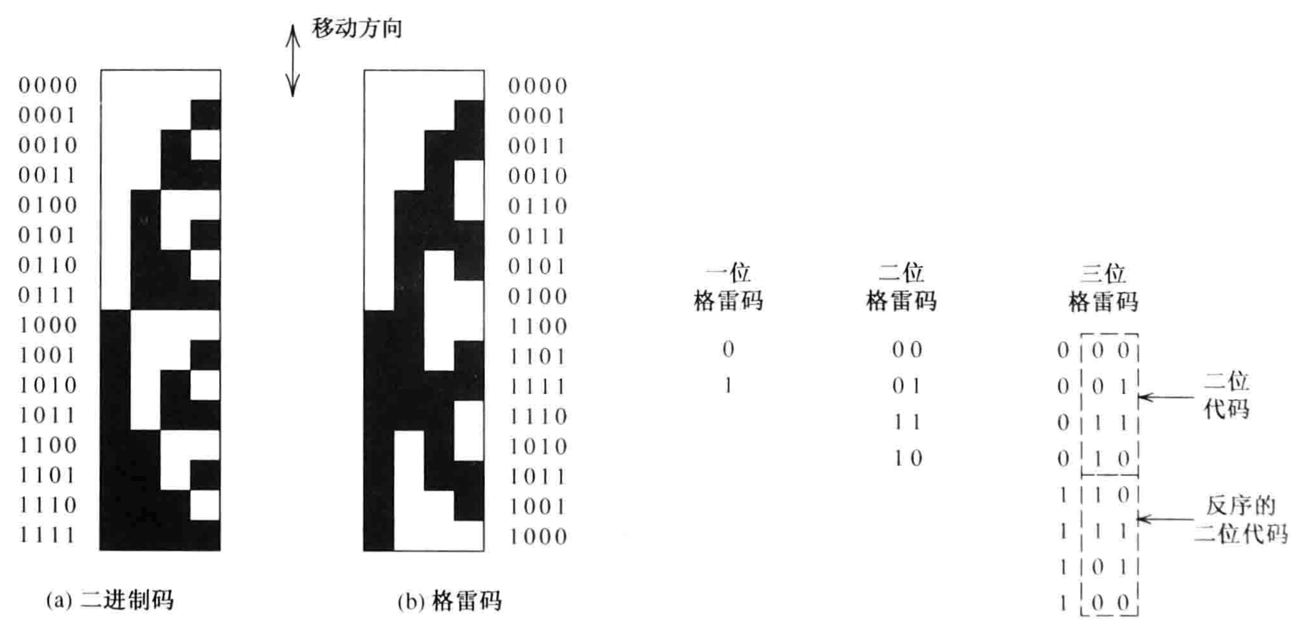


图 7.8 机器臂上的黑白色带(通过光电二极管阵列来读取表示机器臂位置的数字字)

图 7.9 不同位数的格雷码

格雷码也被用于转轴角度的编码。在转轴一圈的最后一个字应与第一个字相邻。为了使每一个格雷码字所代表的角度小于 1°，可使用含 9 位的格雷码，这样总共有 $2^9 = 512$ 个字，每一个字代表的角度为 $360/512 = 0.703°$。

练习7.6 设一机器臂长20英寸，为了达到0.01英寸的位置分辨率，需要用多少位的格雷码对该机器臂的位置进行编码？

答案： 11位。

7.2.7 补码运算

一个二进制数的反码可以通过将其各数位的1换作0，0换作1即可得到。例如，一个8位二进制数及其反码如下：

01001101

10110010（反码）

一个二进制数的补码可以通过将其反码加1，同时忽略最高有效位的进位而得到。例如，为了得到二进制数

01001100

的补码，先求其反码得

10110011

再加上1即可得到其补码。具体过程如图7.10(a)所示。

```
10110011   反码
      +1
--------
10110100   补码
```

(a) 方法一

```
01001100   二进制数
取反  复制
10110100   补码
```

(b) 方法二

图7.10 求01001100的补码的两种方法

求补码的另一种方法是：从右至左数起，直到第一个1为止，包括第一个1的右半部分不变，左半部分取反。具体过程如图7.11(b)所示。

补码用于计算机中负数的表示和减法的运算，此外，补码运算也简化了数字计算机的设计。最常见的是有符号补码，其最高位为符号位。正数的符号位为0，负数的符号位为1。负数补码的数值部分是由与之对应的正数的数值部分按位取反并加1而得到。图7.11给出了8位二进制数的有符号补码，表示的数的范围为 −128 ~ +127。显然，位数越多，表示的范围就越大。

+127	01111111
	⋮
+2	00000010
+1	00000001
0	00000000
−1	11111111
−2	11111110
	⋮
−128	10000000

符号位

图7.11 8位二进制数的有符号补码

补码的减法运算是：先求出减数的补码，再将两数的补码相加。

例7.7 补码减法。

使用8位有符号补码，求减法 $29_{10} - 27_{10}$。

解： 首先写出 29_{10} 和 27_{10} 的二进制形式，得

$$29_{10} = 00011101$$

和

$$27_{10} = 00011011$$

减数的补码为

$$-27_{10} = 11100101$$

两数相加即为所求:

$$\begin{array}{rrr} & 00011101 & 29 \\ \text{忽略进位} & +\underline{11100101} & +\underline{(-27)} \\ \text{符号位溢出}\rightarrow & 00000010 & 2 \end{array}$$

虽然这样的加减运算对人来说很单调无聊，但对计算机来说，这种简单操作能使其快速准确地完成运算。

在补码运算中需要注意：所求结果可能超出了字所表示的最大值而产生上溢。例如，两个8位字：

$$97_{10} = 01100001$$

与

$$63_{10} = 00111111$$

相加得

$$\begin{array}{r} 01100001 \\ +\underline{00111111} \\ 10100000 \end{array}$$

以上所得为 -96 的有符号补码，而正确的结果应为 97 + 63 = 160。发生错误的原因就是所求的和超出了 +127（8位字长的有符号补码所表示的最大值）。

类似地，如果所求结果小于 -128（8位字长的有符号补码所表示的最小值），则发生下溢。符号相反的两个数相加不会产生上溢或下溢。如果符号相同的两个数相加，所得结果的符号与加数相反，则会发生上溢或者下溢。

练习 7.7 求下列各数的 8 位有符号补码。(a) 22_{10}；(b) -30_{10}。

答案：(a) 00010110；(b) 11100010。

练习 7.8 用 8 位有符号补码形式求减法 $19_{10} - 4_{10}$。

答案：

$$\begin{array}{rr} 19 & 00010011 \\ +\underline{(-4)} & +\underline{11111100} \\ 15 & 00001111 \end{array}$$

7.3 组合逻辑电路

在本节中，将实现由多个输入逻辑变量产生一个输出逻辑变量的电路称为逻辑门。这里只讨论逻辑门的外部特性，在第12章中将介绍怎样由场效应晶体管构成门电路。

下面将介绍的电路是无记忆的，即它们在某一时刻的输出值仅与同一时刻的输入值有关。而在之后介绍的逻辑电路是有记忆的，即它们在某一时刻的输出值不仅与同一时刻的输入值有关，还与之前的输出状态有关。

7.3.1 基本门电路

与运算是一种重要的逻辑功能，两个逻辑变量之与，即 A and B，写作 AB，读作"A 与 B"。与运算也称为逻辑乘法。

列出所有可能的输入变量组合及其对应的输出变量值的表称为真值表。两个输入变量的与运算的真值表如图 7.12(a) 所示。注意：当且仅当 A 和 B 均为 1 时，$AB = 1$。

对于与运算有如下关系式：

$$AA = A \tag{7.1}$$

$$A1 = A \tag{7.2}$$

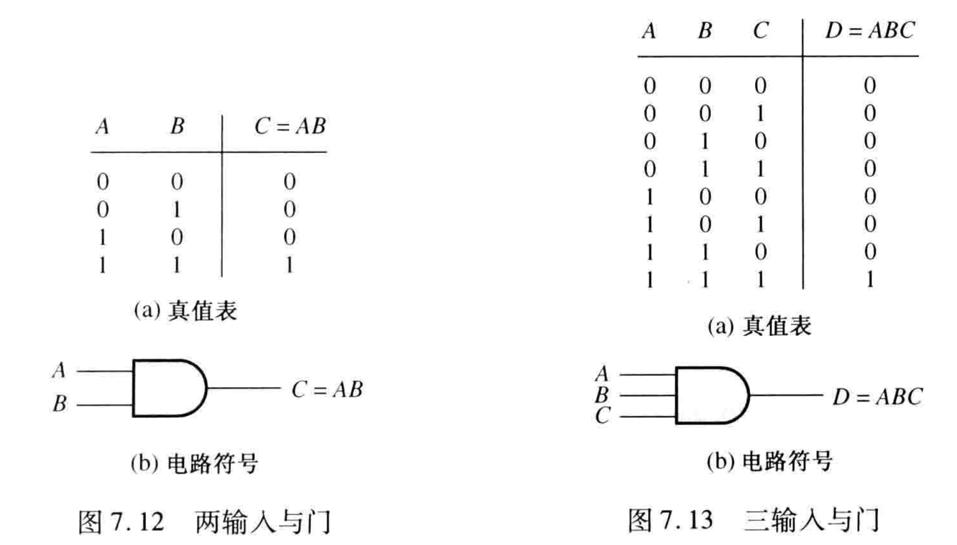
$$A0 = 0 \tag{7.3}$$

$$AB = BA \tag{7.4}$$

$$A(BC) = (AB)C = ABC \tag{7.5}$$

两输入与门的电路符号如图 7.12(b)所示。

与门允许有两个及两个以上的输入变量，图 7.13 给出了三输入与门的真值表及其电路符号。



A	B	$C=AB$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(a) 真值表

(b) 电路符号

图 7.12 两输入与门

A	B	C	$D=ABC$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

(a) 真值表

(b) 电路符号

图 7.13 三输入与门

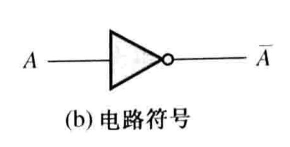
7.3.2 非门(反相器)

在逻辑变量符号的上方加一横线表示对该变量取反运算。如符号 $\overline{A}$ 表示对变量 A 取反，读作“A 的非”或者“A 的反”。如果 $A=0$，则 $\overline{A}=1$，反之亦然。

对该变量取反运算的电路称为非门(反相器)。非门的真值表及电路符号如图 7.14 所示。电路符号输出端的小圆圈表示取反。

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

(a) 真值表



(b) 电路符号

图 7.14 非门

对于取反运算有如下关系式：

$$A\overline{A} = 0 \tag{7.6}$$

$$\overline{\overline{A}} = A \tag{7.7}$$

7.3.3 或门

逻辑变量或运算写作 $A+B$，读作“A 或 B”。图 7.15 给出了两输入或门的真值表及电路符号。注意：当 A、B 中有一个为 1 时，$A+B=1$。或运算也称为逻辑加法。三输入或门的真值表及电路符号如图 7.16 所示。对于或运算有如下关系式：

$$(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C \tag{7.8}$$

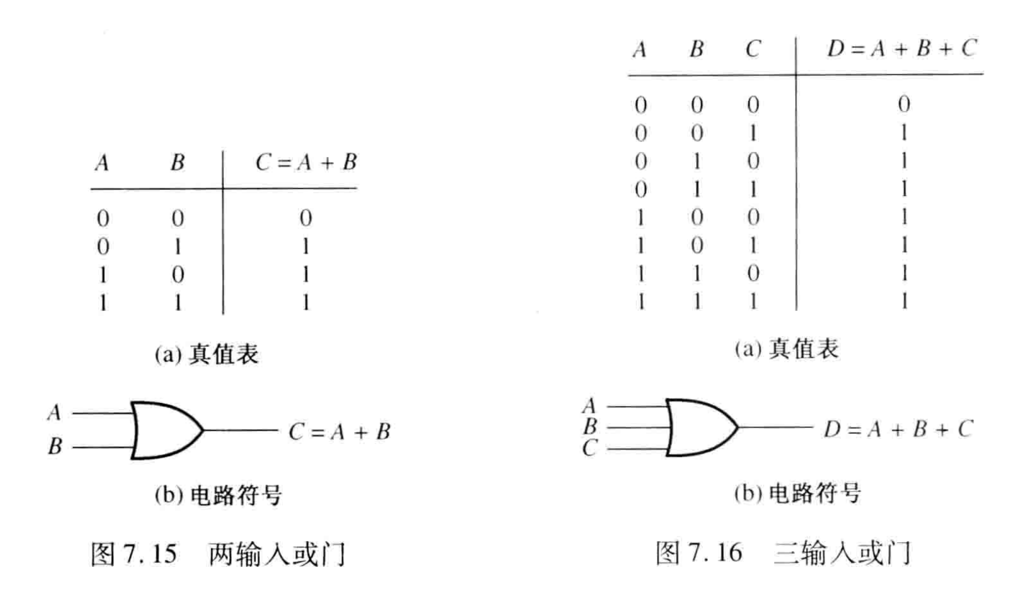
$$A(B+C)=AB+AC \tag{7.9}$$

$$A+0=A \tag{7.10}$$

$$A+1=1 \tag{7.11}$$

$$A+\overline{A}=1 \tag{7.12}$$

$$A+A=A \tag{7.13}$$



A	B	$C=A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(a) 真值表

(b) 电路符号

图 7.15　两输入或门

A	B	C	$D=A+B+C$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(a) 真值表

(b) 电路符号

图 7.16　三输入或门

7.3.4　布尔代数

由式(7.13)可以看出，虽然使用了加法符号(+)表示或运算，但逻辑变量间的与、或、非运算不同于普通代数。逻辑变量的数学理论称为布尔代数，它是由数学家乔治·布尔提出的。

为了证明布尔代数中的关系式是否成立，可先列出包含变量的所有可能组合的真值表，再比较关系式两边部分的值是否相等。

例 7.8　用真值表法证明下列关系式成立。

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

证明：首先列出如表 7.2 所示的真值表。从表中可以看出，在相同的输入下，$(A+B)+C$ 与 $A+(B+C)$ 具有相同的逻辑值。这样就可以去掉式中的圆括号，得

$$A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C$$

表 7.2　式(7.8)的真值表证明

A	B	C	$(A+B)$	$(B+C)$	$A+(B+C)$	$(A+B)+C$	$A+B+C$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

练习7.9 用真值表法证明式(7.5)和式(7.9)。

答案：见表7.3和表7.4。

表7.3 式(7.5)的真值表证明

A	B	C	(AB)	(BC)	$(AB)C$	$A(BC)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

表7.4 式(7.9)的真值表证明

A	B	C	$(B+C)$	AB	AC	$AB+AC$	$A(B+C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

练习7.10 列出逻辑关系式 $D = AB + C$ 的真值表。

答案：见表7.5。

表7.5 $D=AB+C$ 的真值表

A	B	C	AB	$D=AB+C$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

7.3.5 布尔代数式的实现

布尔代数式可通过与门、或门和非门的组合连接来实现。例如，逻辑表达式

$$F = A\bar{B}C + ABC + (C+D)(\bar{D}+E) \quad (7.14)$$

可由图7.17所示的逻辑电路实现。

通常我们可以对逻辑表达式进行化简，例如，式(7.14)右边的最后一项可以展开为

$$F = A\bar{B}C + ABC + C\bar{D} + CE + D\bar{D} + DE \quad (7.15)$$

由于 $D\bar{D}$ 始终为0，故可从式中去掉。再将式(7.15)右边的第一、二两项合并得到

$$F = AC(\bar{B}+B) + C\bar{D} + CE + DE \quad (7.16)$$

又由于 $\bar{B}+B$ 恒等于1，故得到

$$F = AC + C\bar{D} + CE + DE \quad (7.17)$$

将式(7.17)右边的前三项合并得到

$$F = C(A + \bar{D} + E) + DE \quad (7.18)$$

式(7.18)可由图7.18所示的逻辑电路实现。

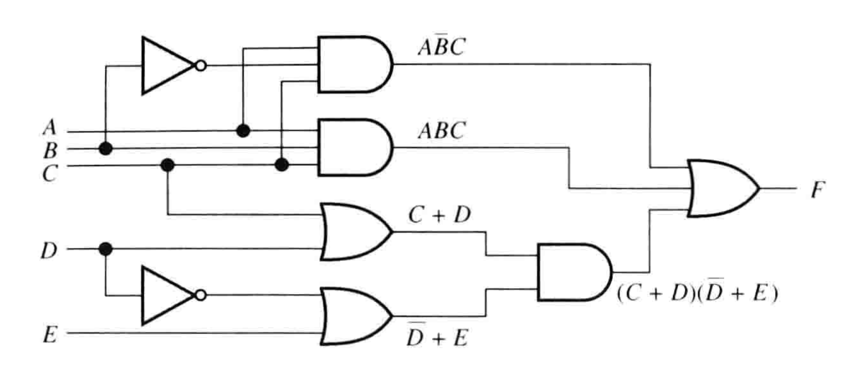


图 7.17 实现式(7.14)的逻辑电路

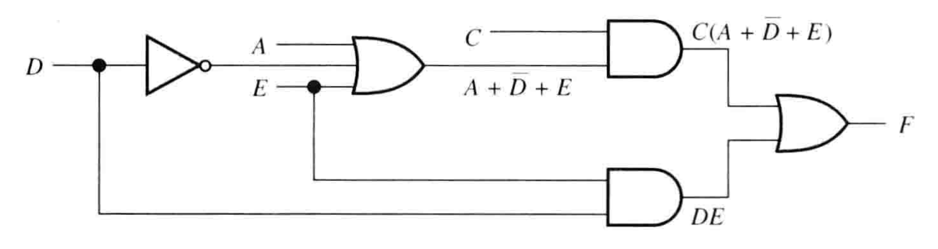


图 7.18 实现式(7.14)的更简单的逻辑电路

通常，实现给定逻辑函数的逻辑电路可以有多种。下面将介绍用最少的给定类型的门电路实现逻辑函数的方法。

7.3.6 摩根定理

摩根定理是布尔代数中的两个重要结论，即

$$ABC = \overline{\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}} \tag{7.19}$$

和

$$(A+B+C) = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}} \tag{7.20}$$

摩根定理的另一种表述为：将逻辑表达式中的每个变量用“非”变量代替，将式中的“与”运算与“或”运算互换，并将整个表达式取反，得到的逻辑表达式与原来的表达式等值。

例 7.9 摩根定理的应用。

对以下逻辑表达式的右边应用摩根定理：

$$D = AC + \overline{B}C + \overline{A}(\overline{B}+BC)$$

解：首先，将等式右边的每个变量用它的“非”代替，得到

$$\overline{A}\,\overline{C} + B\overline{C} + A(B+\overline{B}\,\overline{C})$$

然后将“与”运算与“或”运算互换得到

$$(\overline{A}+\overline{C})(B+\overline{C})[A+B(\overline{B}+\overline{C})]$$

最后将整个表达式取反，得

$$D = \overline{(\overline{A}+\overline{C})(B+\overline{C})[A+B(\overline{B}+\overline{C})]}$$

可见，摩根定理采取了另一种方式描述逻辑表达式。

练习 7.11 用摩根定理求下列各式的另一表达式：

$$D = AB + \overline{B}C$$

和

$$E = \overline{\left[F(G+\overline{H}) + F\overline{G}\right]}$$

答案：

$$D = \overline{(\overline{A}+\overline{B})(B+\overline{C})}$$
$$E = (\overline{F}+\overline{G}H)(\overline{F}+G)$$

摩根定理表明，任何逻辑函数均能由与门和非门的组合连接来实现。显然，定理的第二个等式即式(7.20)，实现了用“与”运算和非运算代替“或”运算。

类似地，任何逻辑函数均能由或门和非门的组合连接来实现。显然，定理的第一个等式即式(7.19)，实现了用“或”运算和“非”运算代替“与”运算。

7.3.7 与非门、或非门和异或门

图7.19给出了其他几个逻辑门。与非门等价于一个与门同一个非门相串联。注意：在符号上，与非门仅是在与门的输出端加上了一个小圆圈，以表示在“与”运算后进行了取反。类似地，或非门等价于一个或门同一个非门相串联。

$A \oplus B$ 表示两个逻辑变量 A, B 的异或运算，且有如下定义：

$$0 \oplus 0 = 0$$
$$1 \oplus 0 = 1$$
$$0 \oplus 1 = 1$$
$$1 \oplus 1 = 0$$

注意：仅当 $A = 1$ 或 $B = 1$ 时，$A \oplus B = 1$；A, B 同时为1时，$A \oplus B = 0$。异或运算也称为模2加法。

缓冲器只有一个输入端和一个输出端，输出端产生与输入端相同的值。在逻辑信号带有低阻抗负载时，常使用缓冲器来提供大电流。

异或非门在两个输入变量相同时，输出一个高电平。实际上异或非门是由异或门加上一个非门构成的，电路符号如图7.19(e)所示。

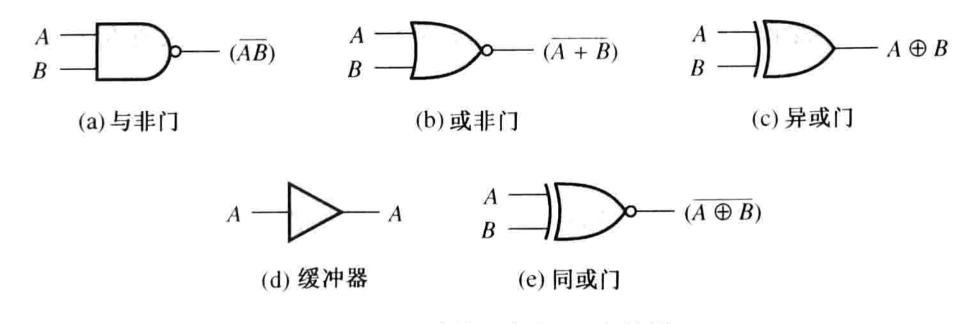


图7.19 其他逻辑门电路符号

7.3.8 电路的与非门和或非门实现

显然，通过组合几个不同的门电路可以实现相同的逻辑函数。例如，将与非门的两个输入端连接起来就得到了一个非门，即

$$\overline{(AA)} = \overline{A}$$

如图7.20(a)所示。

此外，由摩根定理可得，或运算等效于将两个输入变量取非后再加到与非门的两个输入端，如图7.20(b)所示；与运算等效于与非门后加上一个非门，如图7.20(c)所示。这样，基本的逻辑函数(与、或、非)均可由与非门实现。因此可以得出结论：由与非门可以实现任何的组合逻辑函数。

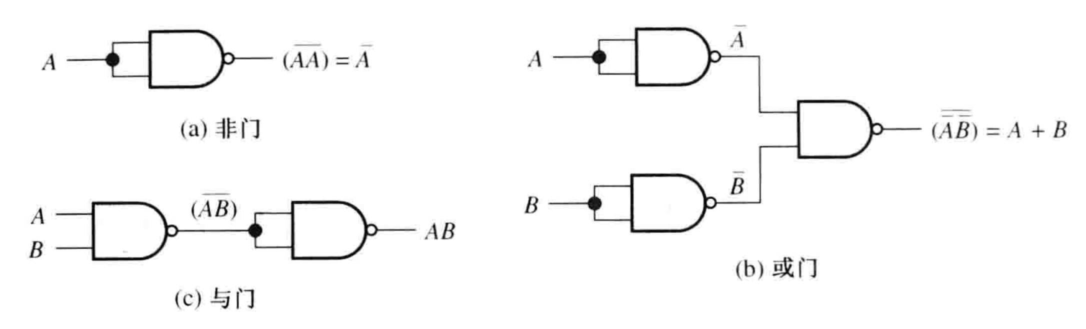


图7.20　由与非门表示的基本布尔运算，因此任意逻辑函数均可由与非门唯一表示

练习7.12　怎样仅由或非门分别实现与、或、非函数。

答案：见图7.21。

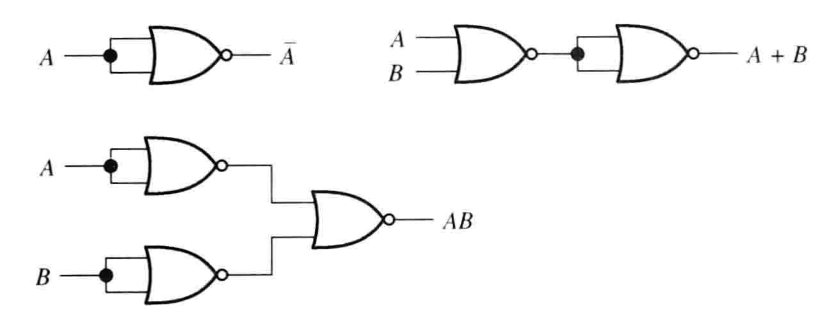


图7.21　由或非门表示的基本布尔运算，因此任意逻辑函数均可由或非门唯一表示

7.4　逻辑电路的综合

本节将介绍根据已知的输入与输出逻辑关系来设计逻辑电路的方法。通常情况下，逻辑电路的初始说明是通过自然语言描述的，通过将自然语言翻译为真值表或者布尔逻辑表达式，可以求得实际的逻辑电路。

7.4.1　与或式(SOP)的电路实现

如表7.6所示，A、B和C为输入逻辑变量，D为要求的输出。注意：这里的每一行是按照与ABC所表示的二进制对应的十进制数顺序编号的。

表7.6　用于说明SOP和POS表达式的真值表

行	A	B	C	D
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

为了求得产生输出变量 D 的逻辑电路，需先获得 D 的逻辑表达式。一种方法是集合真值表中所有 D 为 1 的行写出 D 的逻辑表达式。首先在真值表中选出 D 为 1 的行，即第 0、2、6 和 7 行。然后，写出这些行的输入逻辑变量的逻辑乘（即与逻辑项，简称与项），注意：将输入逻辑变量为 0 的取其反变量，使该逻辑乘为 1，而每一项逻辑乘中应包含所有的输入变量。例如，对于第 0、2、6 和 7 行，与项分别为 $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$、$\bar{A}B\,\bar{C}$、$AB\bar{C}$ 和 ABC，且值均为 1。上述包含所有输入变量（或其反变量）的与项称为最小项。

将所有最小项相或（即逻辑加）就得到输出变量的逻辑表达式。对于表 7.6，有

$$D = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + ABC \tag{7.21}$$

这样的表达式称为与或式（SOP）。可知，根据给定的真值表，总能找到此逻辑函数的 SOP 表达式。由式（7.21）可直接得到如图 7.22 所示的逻辑电路。

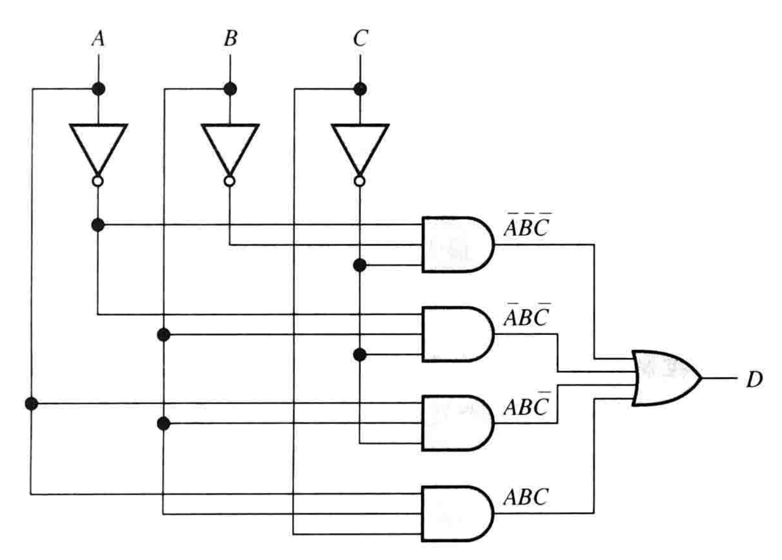


图 7.22　表 7.6 的 SOP 式的电路实现

SOP 的简写法是列出真值表中所有输出值为逻辑 1 的行号。因此有

$$D = \sum m(0,2,6,7) \tag{7.22}$$

其中，m 表示所列举行对应的最小项。

7.4.2 或与式（POS）的电路实现

求输出函数 D 的逻辑表达式的另一种方法是集合真值表中所有 D 为 0 的行。首先在真值表 7.6中选出 D 为 0 的行，即第 1、3、4 和 5 行。然后，写出这些行的输入逻辑变量的逻辑加（即或项），注意将输入逻辑变量为 1 的取其反变量，使该逻辑加（或项）值为 0。每一项或项中应包含所有的输入变量。例如，对于第 1、3、4 和 5 行，或项分别为 $(A+B+\bar{C})$、$(A+\bar{B}+\bar{C})$、$(\bar{A}+B+C)$ 和 $(\bar{A}+B+\bar{C})$，且各项的值均为 0。上述包含所有输入变量（或其反变量）的或项称为最大项。

将所有最大项相与就得到输出函数的逻辑表达式。对于表 7.6，有

$$D = (A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C}) \tag{7.23}$$

这样的表达式称为或与式（POS）。由上述可知，根据给定的真值表总能找到一个逻辑电路输出函数的 POS 表达式。由式（7.23）可直接得到如图 7.23 所示的逻辑电路。

POS的简写法是列出真值表中所有输出值为逻辑0的行号。这样，式(7.23)可记为

$$D=\prod M(1,3,4,5) \tag{7.24}$$

其中，M 表示所列举行对应的最大项。

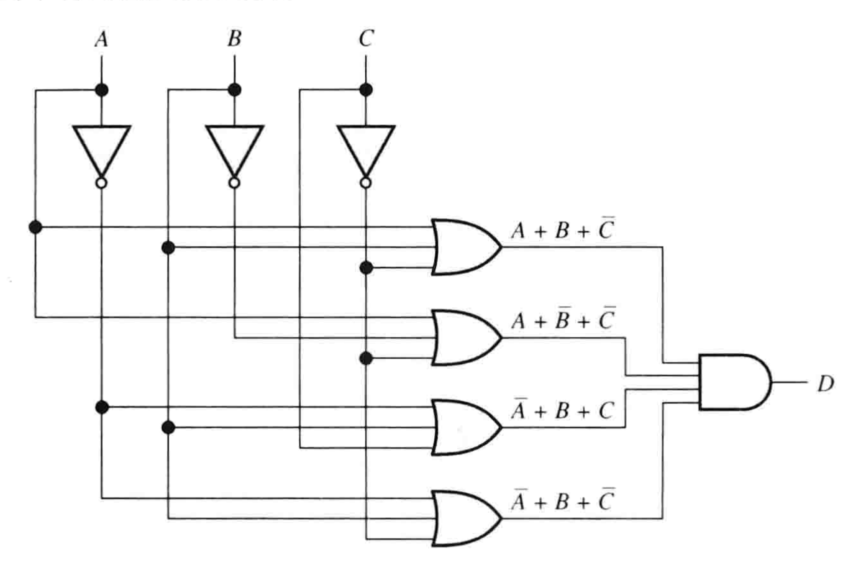


图 7.23 最大项之积的电路实现

例 7.10 组合逻辑电路设计。

一种家庭供暖系统的控制逻辑为：在白天温度低于68华氏度和晚上温度低于62华氏度时，供暖系统开始工作。设有 D、H 和 L 这3个逻辑信号，$D=1$ 表示白天，$H=1$ 表示温度高于68华氏度，$L=1$ 表示温度高于62华氏度。设计一个逻辑电路使得输出信号 F 仅在供暖系统工作时为1。

解： 首先，将系统的控制逻辑描述翻译为真值表，如图7.24(a)所示。真值表中列出了所有输入变量的组合，其中组合 $DHL=010$ 和110是不可能发生的，因为温度不可能同时既低于62华氏度($L=0$)又高于68华氏度($H=1$)。与这些不可能发生的组合对应的输出以 × 表示，对应的组合项称为无关项，因为在这些输入组合下的输出是不用考虑的。

如前所述，要获得输出逻辑函数的表达式，可根据真值表写出所有输出值为1的行的最小项之和。由图7.24(a)所示的真值表可得到

$$F=\overline{D}\,\overline{H}\,\overline{L}+D\overline{H}\,\overline{L}+D\overline{H}L \tag{7.25}$$

式中，右边第一项 $\overline{D}\overline{H}\overline{L}$ 仅在真值表的第0行时为1，第二项 $D\overline{H}\overline{L}$ 仅在真值表的第4行时为1，第三项 $D\overline{H}L$ 仅在真值表的第5行时为1。式(7.25)可简写为

$$F=\sum m(0,4,5) \tag{7.26}$$

注意，在式(7.25)和式(7.26)中，无关项取0。

式(7.25)可化简为

$$F=D\overline{H}+\overline{D}\,\overline{H}\,\overline{L}$$

对应的逻辑电路图如图7.24(b)所示。

另一种求解输出逻辑函数表达式的方法是：根据真值表写出所有输出值为0的行的最大项之积。由图7.24(a)所示的真值表可得到

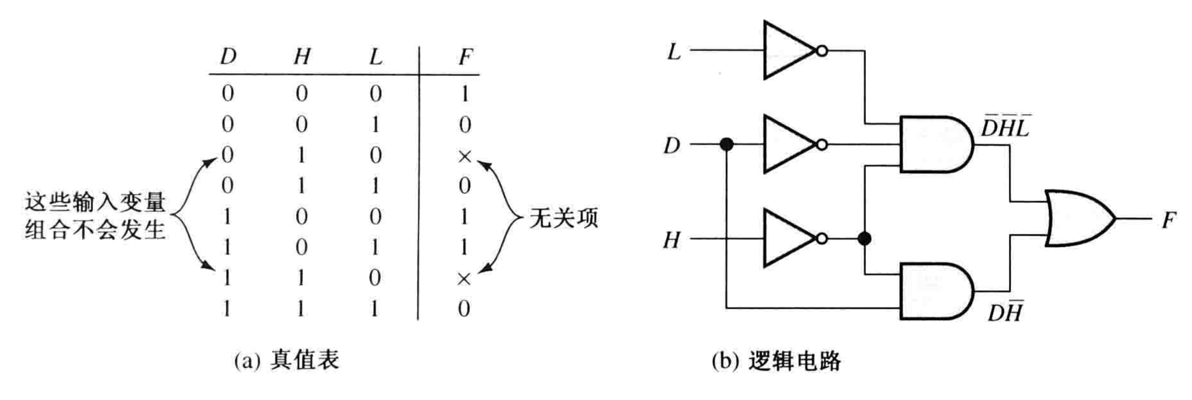
$$F=(D+H+\overline{L})(D+\overline{H}+\overline{L})(\overline{D}+\overline{H}+\overline{L}) \tag{7.27}$$

式中，右边第一项 $(D+H+\overline{L})$ 仅在真值表的第1行时为0，第二项 $(D+\overline{H}+\overline{L})$ 仅在真值表的

第3行时为0，最后一项 $(\bar{D}+\bar{H}+\bar{L})$ 仅在真值表的第7行时为0。式(7.27)可简写为

$$F=\prod M(1,3,7) \tag{7.28}$$

注意：在式(7.27)和式(7.28)中，无关项取1。由于无关项的取值不同，故式(7.25)与式(7.27)中变量 F 的表达式是不相等的。



D	H	L	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	×
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	×
1	1	1	0

(a) 真值表　　(b) 逻辑电路

图 7.24　例 7.10

练习 7.13　用两种方法以与、或和非门实现异或运算。

答案：见图 7.25。

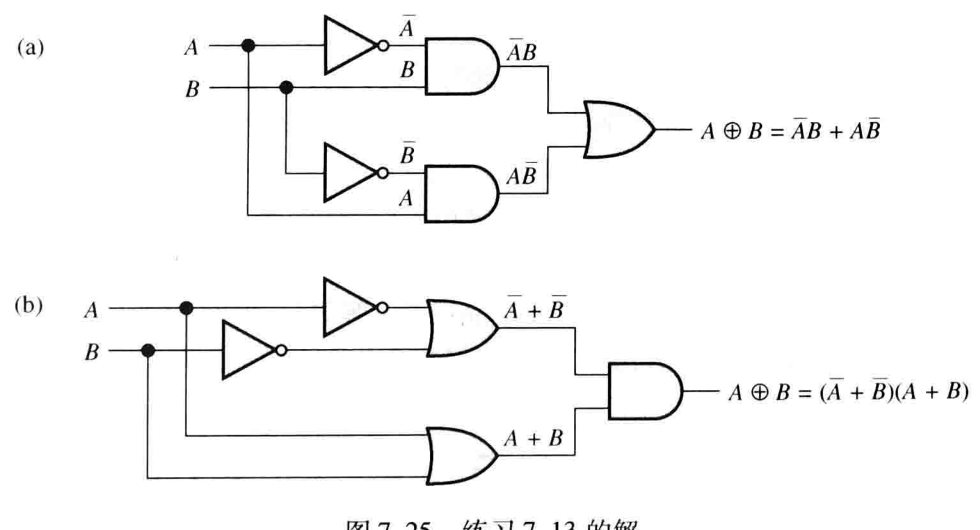


图 7.25　练习 7.13 的解

练习 7.14　有一则儿童趣味题：一个农夫带着一袋黑面包、一只鹅和一条狗去旅行。在旅行途中有一条河，农夫需要坐船从河的东岸渡到河的西岸。河边有一只小船，小船的空间只能容下农夫和他所带的一个物品。如果农夫不在，鹅会吃掉黑面包或者狗会吃掉鹅。

我们可以设计一个逻辑电路对这则趣味题描述的情况进行仿真。设有4个开关分别对应于农夫、黑面包、鹅和狗4个对象，开关的两个状态分别表示各对象的位置是在东岸还是西岸。规定每次最多两个开关动作，并且对应农夫的开关每次必须动作(因为需要农夫划船)。假设对应于农夫的开关的逻辑变量为 F，$F=1$ 表示农夫在东岸，$F=0$ 表示在西岸。类似地，对应于鹅、狗和黑面包的开关的逻辑变量分别为 G、D 和 R。

设逻辑变量 A 表示报警，在黑面包或者鹅可能被吃掉的情况下 $A=1$。请使用与或式(最小项之和)和或与式(最大项之积)两种方法求出 A 的逻辑表达式。

答案：首先列出真值表，如表 7.7 所示。得到的布尔表达式为

$$A = \sum m(3,6,7,8,9,12) = \overline{F}\,\overline{D}GR + \overline{F}DG\overline{R} + \overline{F}DGR + F\overline{D}\,\overline{G}\,\overline{R} + F\overline{D}\,\overline{G}R + FD\overline{G}\,\overline{R}$$

和

$$A = \prod M(0,1,2,4,5,10,11,13,14,15)$$

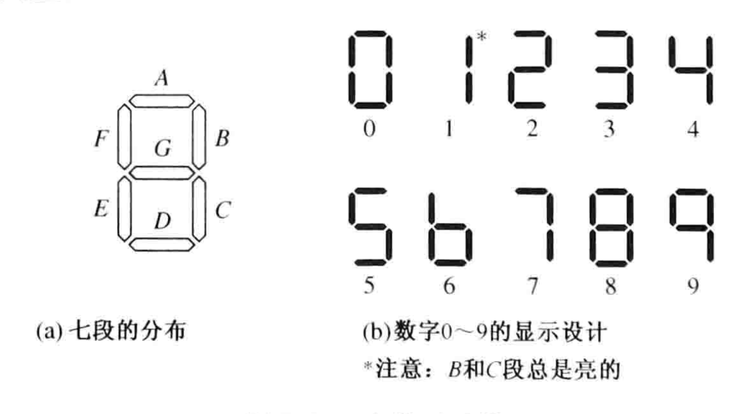
表 7.7 练习 7.14 的真值表

行	A	B	C	D
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

7.4.3 译码器、编码器和转换器

许多有用的组合电路如译码器、编码器和转换器均可由集成电路实现。下面我们举两个例子，在计算器或手表中使用 BCD 码表示需要显示的信息，其中，0000 表示 0，0001 表示 1，0010 表示 2，0011 表示 3，等等。一个 4 位字共有 16 种不同的组合形式，而在 BCD 码中只使用了 10 种，如 1010 和 1011 的代码在 BCD 码中是没有意义的。

计算器的显示部分由 7 条液晶显示段组成，如图 7.26(a)所示，数字 0 ~ 9 的显示情况如图 7.26(b)所示。因此，需要一个译码器将 4 位 BCD 码字转换为表示 *ABCDEFG* 的 7 位字，$A = 1$ 说明 A 表示的液晶段亮，$B = 1$ 说明 B 表示的液晶段亮，等等。这样，在显示零时，0000 被转换为 1111110。类似地，0001 转换为 0110000，0010 转换为 1101101。显然，BCD -七段译码器具有 4 个输入和 7 个输出变量。



(a) 七段的分布

(b) 数字0～9的显示设计

*注意：B和C段总是亮的

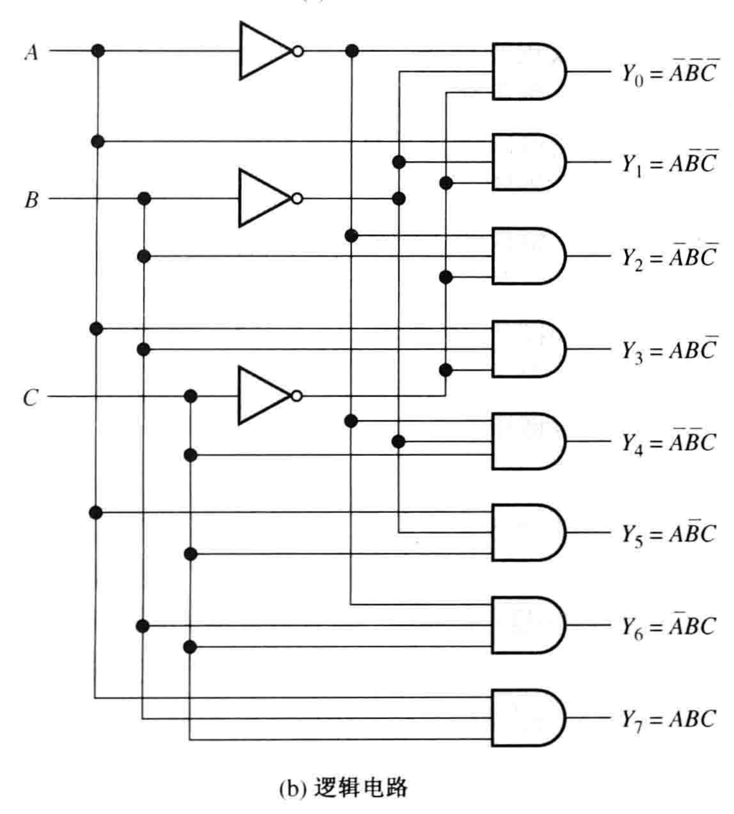
图 7.26 七段显示器

另一个例子是 3 线-8 线译码器，它具有 3 个输入和 8 个输出变量。在 3 线-8 线译码器中，3 位输入字选择一条输出线，使该输出为逻辑 1。真值表和逻辑电路如图 7.27 所示。

译码器可用于二进制数与 BCD 码之间的转换，比较两个数的大小，对二进制数或 BCD 码表示的数进行代数运算以及其他类似的功能。

C	B	A	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

(a) 真值表



(b) 逻辑电路

图7.27　3线-8线译码器

7.5　逻辑电路的化简

虽然逻辑函数可以容易地表示为最小项之和或者最大项之积，但是，这样直接得到的逻辑电路往往不是最简的，即使用的门电路数并不是最少的。例如，逻辑表达式

$$F=\bar{A}\,\bar{B}D+\bar{A}BD+BCD+ABC \tag{7.29}$$

如果由该式直接实现逻辑电路，则需要两个非门、四个与门和一个或门。

合并式(7.29)右边部分的前两项，得

$$F=\bar{A}D(\bar{B}+B)+BCD+ABC$$

而 $\bar{B}+B=1$，于是得

$$F=\bar{A}D+BCD+ABC$$

显然，仅在 $B=1$，$C=1$，$D=1$ 时，$BCD=1$。于是有 $\bar{A}D=1$ 或者 $ABC=1$，这是因为要么 $\bar{A}=1$，要么 $A=1$。因此 ABC 项是多余的，去掉该项后得到

$$F = \overline{A}D + ABC \tag{7.30}$$

实现该式的逻辑电路仅含一个非门、两个与门和一个或门。

练习 7.15 试生成一个真值表，验证式(7.29)和式(7.30)是等价的。

答案：见表 7.8。

7.5.1 卡诺图

如前所述，逻辑表达式可以通过代数方法来化简，但是，用于化简的布尔代数规则较多，不易灵活掌握。图形化简法提供了一种简单直观的方法用于逻辑函数的化简，该方法可以看做是真值表的图形化表示，通常也叫作卡诺图。

卡诺图是一种方格图，每个方格代表逻辑函数的一个最小项，即是对应真值表中的一行。两变量、三变量和四变量的卡诺图如图 7.28 所示。两变量的卡诺图由 4 个方格组成，每个方格对应一个最小项。类似地，三变量的卡诺图有 8 个方格，四变量的卡诺图有 16 个方格。

表 7.8 练习 7.15 的解

F	D	G	R	A
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

图 7.28 给出了每个方格对应的最小项。例如，在三变量卡诺图中，最右上方的方格对应的最小项为 $\overline{A}B\overline{C}$。与真值表各行对应的位组合分别标在图的左边和上边。例如，在四变量卡诺图中，与真值表中 $ABCD$ 为 1101 的行相对应的是图中第三行、第二列的方格，第三行左边标为 11，第二列上边标为 01。这样，我们可以很容易地找到与任一最小项或真值表中任一行对应的方格。

在四变量卡诺图的上方，位组合不是按照自然二进制数的顺序排列的，而是按照两位格雷码的顺序排列，即 00，01，11，10。这样，任何两个相邻小方格之间只有一个变量不同，从而使相邻的最小项集合在一起，例如，包含 A（不是 $\overline{A}$）的最小项在卡诺图的下半部分。在四变量卡诺图中，包含 B 的最小项在卡诺图的中间两行，包含 AB 的最小项在图中的第三行，等等。将相邻最小项集合在一起是化简逻辑电路的关键。

练习 7.16 (a)写出图 7.28(c)中右上角的方格对应的最小项。(b)写出图 7.28(c)中左下角的方格对应的最小项。

答案：(a) $\overline{A}\,\overline{B}C\,\overline{D}$；(b) $A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$。

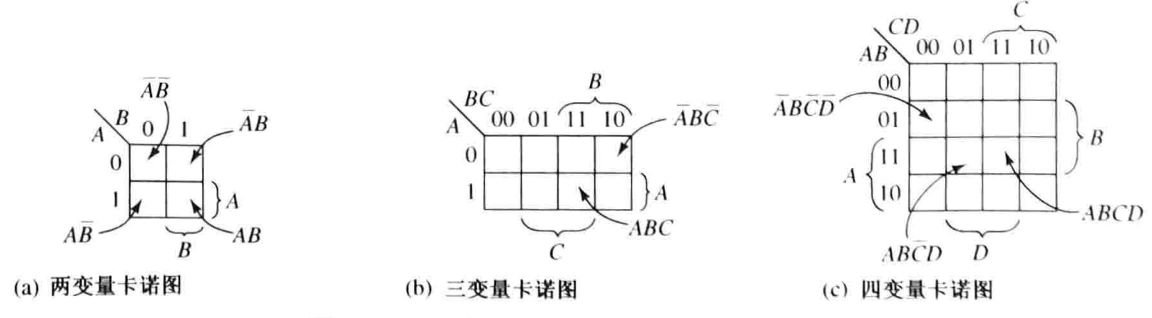


图 7.28 可表示各方格对应最小项的卡诺图

包含有一个共同边的两个方格的矩形框称为 2-矩形框。类似地，具有共同边的含四个方格

的矩形框称为4-矩形框。在选定矩形框时，图的上边与下边、左边与右边被看作相邻。这样，右边的方格与左边的方格相邻，上边的方格与下边的方格相邻，因此，在卡诺图的四个角上的四个方格形成一个4-矩形框。图7.29给出了卡诺图中的几种矩形框。

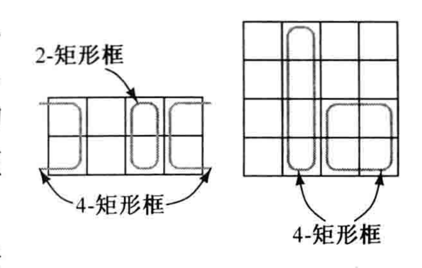


图7.29　卡诺图中的矩形框

为了得到逻辑函数的卡诺图，我们在使该函数取1的方格中标记1。将标有1的方格归入矩形框中。图7.30给出了一些两变量与项的图。

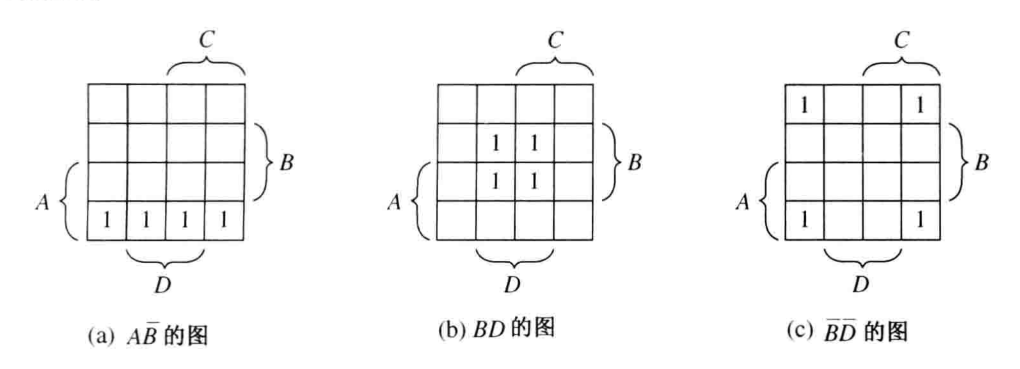


图7.30　在四变量卡诺图中由4-矩形框表示的两变量与项

在一个由16个方格组成的四变量卡诺图中，单个逻辑变量或者其反变量的图为一个8-矩形框，一个两变量与项的图为一个4-矩形框，一个三变量与项的图为一个2-矩形框。

$$F=\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}\bar{B}CD+\bar{A}B\bar{C}D+\bar{A}BCD+ABC\bar{D}+ABCD \tag{7.31}$$

逻辑函数式(7.31)的卡诺图如图7.31所示。图中的4-矩形框对应于与项 $\bar{A}D$，2-矩形框对应于与项 ABC，这些矩形框均是由标为1的方格组成的最大矩形框。于是，可得到 F 的最简SOP(与或)表达式为

$$F=\bar{A}D+ABC \tag{7.32}$$

观察卡诺图中能涵盖1方格的最大矩形框，即可方便地化简逻辑函数。

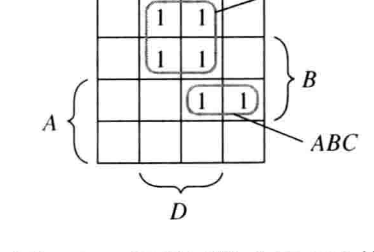
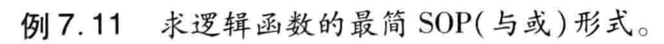


图7.31　逻辑函数式(7.31)的卡诺图。由图可见，它等于同 $F=\bar{A}D+ABC$



例7.11　求逻辑函数的最简SOP(与或)形式。

一个逻辑电路有 A、B、C 和 D 4个输入变量，其输出变量为

$$E=\sum m(1,3,4,5,7,10,12,13)$$

求 E 的最简SOP(与或)式。

解：首先画出卡诺图。由于有4个输入变量，因此卡诺图由16个方格组成，如图7.32所示。将输出函数表达式中的最小项行号转换为二进制数，得到：0001，0011，0100，0101，0111，1010，1100，1101。每一个二进制数对应于图中的一个方格，例如，1101对应于图中第三行、第二列的方格，0011对应于图中第一行、第三列的方格，等等。将每个最小项行号对应的方格标为1，如图7.32所示。

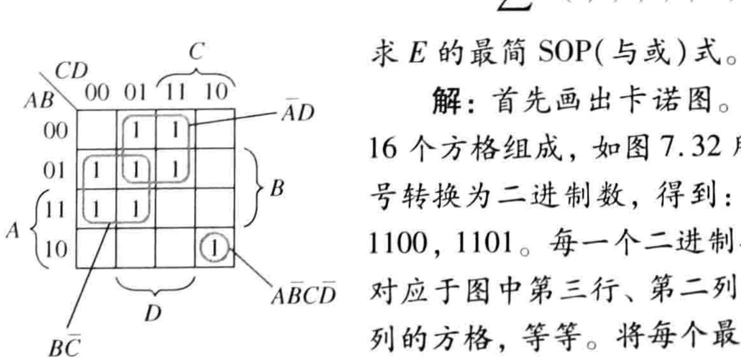


图7.32　例7.11的卡诺图

然后，确定图中涵盖1方格的最大尺寸的矩形框，且使这样的矩形框数量最少，所得结果即逻辑函数的最简形式。为了将所有标为1的方格包含到矩形框中，需要两个4-矩形框和一个1-矩形框(即由一个单独的方格构成的矩形框)，如图7.32所示。最后，得到该函数的最简SOP(与或)形式为

$$E=\overline{A}D+B\overline{C}+A\overline{B}C\overline{D}$$

7.5.2　如何获得最简的或与式

到目前为止，我们已探讨了如何获得最简的与或式。其实，参照此过程也可获得最简的或与式，步骤如下：

1. 对输出函数绘制卡诺图；
2. 对卡诺图的输出值取非运算，即逻辑1变为0；逻辑0变为1；
3. 尽量用最大的方框去涵盖取非之后的方格，并写出对应于输出反函数的与或式；
4. 应用摩根定理，将与或式转换为或与式即可。

举例如下。

例7.12　求一个逻辑函数的最简或与式。

求例7.11逻辑函数的最简或与式。

解： 如图7.32所示为函数E的卡诺图，将所有输出值从1变为0，0变为1，即可获得函数$\overline{E}$的卡诺图。结果如图7.33所示。

现在，用最少量的最大方框涵盖输出为1的方格。显然，图中没有能涵盖8个或者4个方格的方框。观察总计8个为1的方格，最好的办法是用4个方框分别包含2个方格。其中一种方法如图中的标注，即

$$\overline{E}=ABC+A\overline{B}D+\overline{A}C\overline{D}+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

采用摩根定理获得最简或与式，如下：

$$E=(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{D})(A+\overline{C}+D)(B+C+D)$$

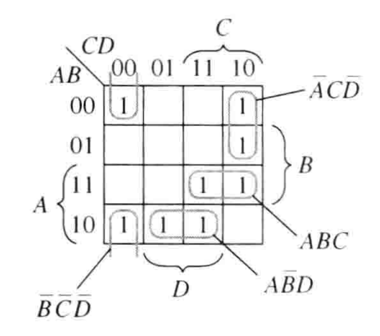


图7.33　例7.12的卡诺图(此图即对图7.32的卡诺图取非运算)

如果选择如图7.33所示的不同方框的组合，则可以获得另一种正确的表达式：

$$\overline{E}=A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}+ACD+BC\overline{D}$$

应用摩根定理获得的或与式如下：

$$E=(\overline{A}+B+C)(A+B+D)(\overline{A}+\overline{C}+\overline{D})(\overline{B}+\overline{C}+D)$$

练习7.17　构造下列逻辑函数的卡诺图并求出其最简SOP(与或)形式：

(a) $Z=\overline{W}\overline{X}\overline{Y}+\overline{W}X\overline{Y}+W\overline{X}Y+WXY$

(b) $D=\overline{A}\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+A\overline{B}C+\overline{A}BC$

(c) $E=\overline{A}BC\overline{D}+AB\overline{C}\overline{D}+AB\overline{C}D+ABC\overline{D}$

答案： 如图7.34所示。

练习7.18　构造练习7.17逻辑函数的卡诺图，并求出其最简POS(或与)形式。

答案： 如图7.35所示。

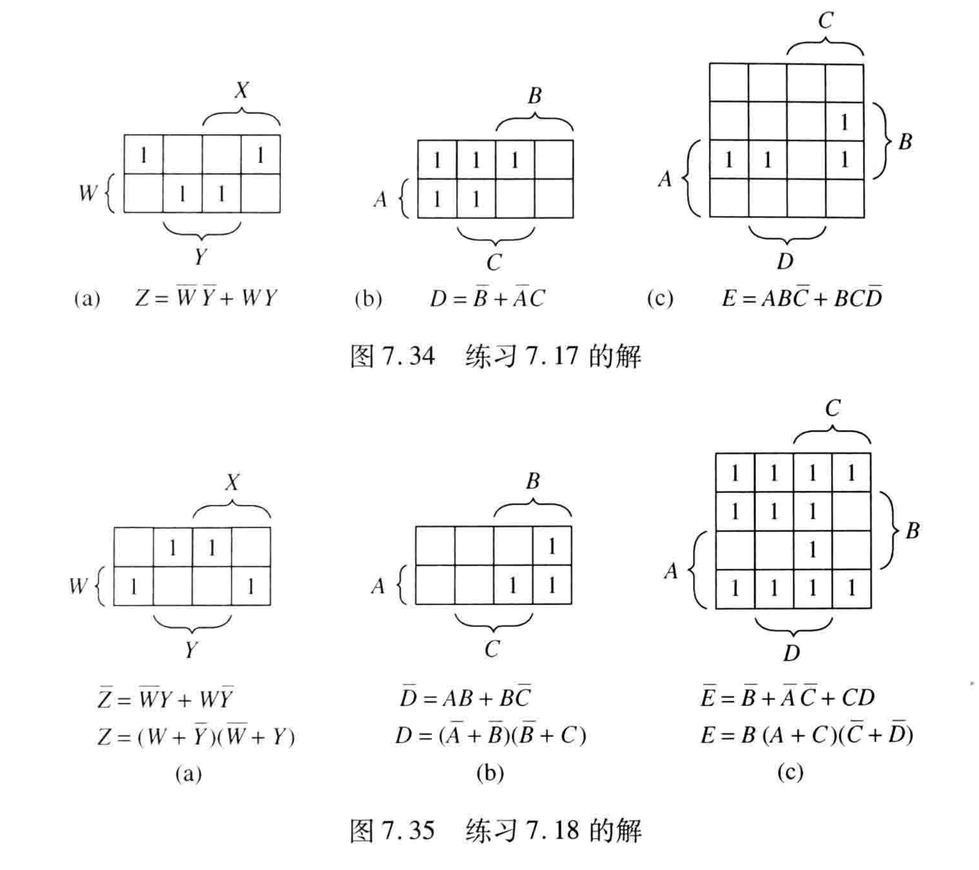


图 7.34 练习 7.17 的解

图 7.35 练习 7.18 的解

7.6 时序逻辑电路

到目前为止，我们研究的数字电路都是组合逻辑电路，即电路在某一时刻的输出完全取决于该时刻的输入，如门电路、编码器和译码器。本节将介绍时序逻辑电路，这种电路在某一时刻的输出不仅取决于该时刻的输入，而且还取决于该时刻以前的输入。我们称这种电路是具有记忆的，因为它们“记住”了过去时刻的输入值。

时序电路由周期性逻辑 1 脉冲组成的时钟信号来同步驱动，如图 7.36 所示。由于时钟信号控制电路对新的输入值的响应，因此，电路将按照时钟信号确定的时序运行。由同一个时钟信号控制的时序电路称为同步时序电路。

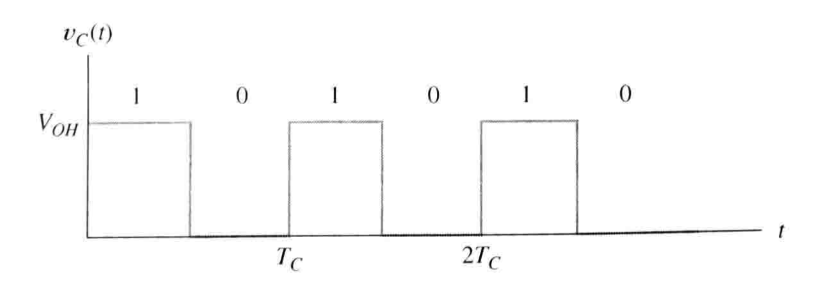


图 7.36 由周期性逻辑 1 脉冲组成的时钟信号

7.6.1 触发器

触发器是时序电路的一个基本组成单元。触发器有两个稳定状态，因此，它能存储一位信息。根据时钟信号和输入信号控制方式的不同，还有很多不同类型和功能的触发器。下面将简单地介绍其中的几种。

一个简单的触发器由两个非门构成，如图 7.37 所示，分别将一个非门的输出端与另一个非门的输入端相接即可得到。这个电路有两个稳定状态。一方面，当上方触发器的输出 Q 为高时，下方触发器的输出则为低。因此，将下方触发器的输出记为 $\overline{Q}$。注意：由非门的逻辑功能可知，Q 高和 $\overline{Q}$ 低的状态将一直被保持，即这个电路能够保持这种状态。另一方面，这个电路也能保持 Q 低和 $\overline{Q}$ 高的状态。

1. *SR* 触发器。由于图 7.37 所示的简单触发器无法控制，其输出状态不能确定，所以这种电路没有实际应用价值。一种有用的电路是置位 - 复位触发器(*SR* 触发器)，它由两个或非门组成，如图 7.38 所示。当输入端 S 和 R 均为低时，或非门等效为非门，输出为其余输入信号的“非”。因此，当 S 和 R 均为低时，*SR* 触发器等效为图 7.37 所示的两非门电路。

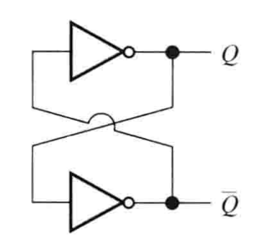


图 7.37　简单触发器的电路

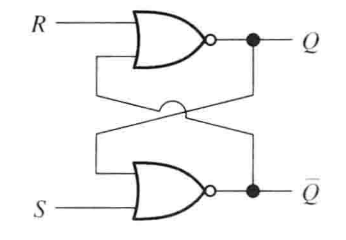


图 7.38　由两个或非门交叉连接实现的 *SR* 触发器

如果 S 为高电平，R 为低电平，则 $\overline{Q}$ 为低，Q 为高。当 S 变为低时，触发器输出仍然保持为高不变，称为置位状态。如果 S 为低，R 为高，则 $\overline{Q}$ 为高，Q 为低。当 R 变为低时，触发器输出保持为低不变，称为复位状态。在通常条件下，S 和 R 同时为高电平是不允许的。这里，当 S 和 R 均为低电平时，认为 *SR* 触发器具有记忆功能，保持最近的当 S 或 R 为高时的输出状态不变。

我们通过对变量加下标来表示状态的时序。例如，触发器的输出状态 Q_{n-1} 发生在 Q_n 之前，而 Q_n 又在 Q_{n+1} 之前，等等。*SR* 触发器的真值表如图 7.39(a)所示。在真值表中的第一行，当 S 和 R 均为逻辑 0 时，输出保持先前的状态($Q_n = Q_{n-1}$)。*SR* 触发器的电路符号如图 7.39(b)所示。

R	S	Q_n
0	0	Q_{n-1}
0	1	1
1	0	0
1	1	不允许

(a) 真值表

R　Q
S　$\overline{Q}$

(b) 电路符号

图 7.39　*SR* 触发器的真值表和电路符号

2. *SR* 触发器用于开关的消抖。*SR* 触发器的一个应用就是开关的消抖，如图 7.40(a)所示的单刀双掷开关。当开关从 A 端拨到 B 端时，将产生如图 7.40(b)所示的电压波形。首先，开关处在 A 端，V_A 为高电平。然后，开关断开，V_A 降为零。接着，开关掷到 B 端，V_B 变为高电平。由于开关掷到 B 端时会产生机械抖动，因此 V_B 将由高电平降为零，再升为高电平，如此反复几次后 V_B 才稳定为高电平。同样，当开关由 B 端拨到 A 端时也会发生抖动。

开关转换时发生抖动将会引起一些麻烦。例如，计算机键盘即开关，按下开关来选择相应的字母。在每次按一个键时，抖动将会引起计算机或者计算器连续输入几个字母。

SR 触发器能够消除这种触头抖动。如图 7.40(a)所示，将开关的 A 、B 端分别同触发器的 S 、R 端相连。开关连接 A 端时，触发器处在置位状态，Q 为高。当开关从 A 端断开后，V_A 降为零，但触发器的状态将保持不变，直到 V_B 变为高电平。即使发生接触抖动，触发器将保持 Q 为低的复位状态。触发器的输出波形如图 7.40(b)所示。

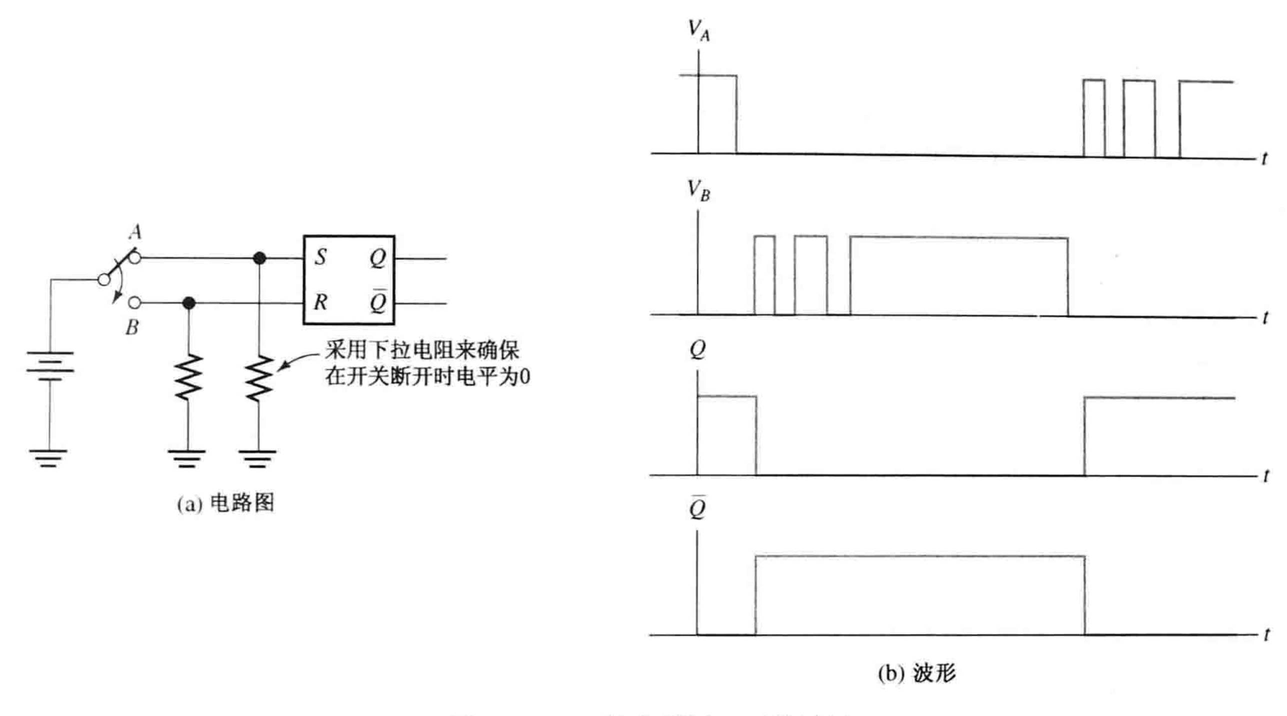


图 7.40　SR 触发器用于开关消抖

练习 7.19　SR 触发器的输入端波形如图 7.41 所示，画出输出 Q 的波形。

答案：见图 7.42。

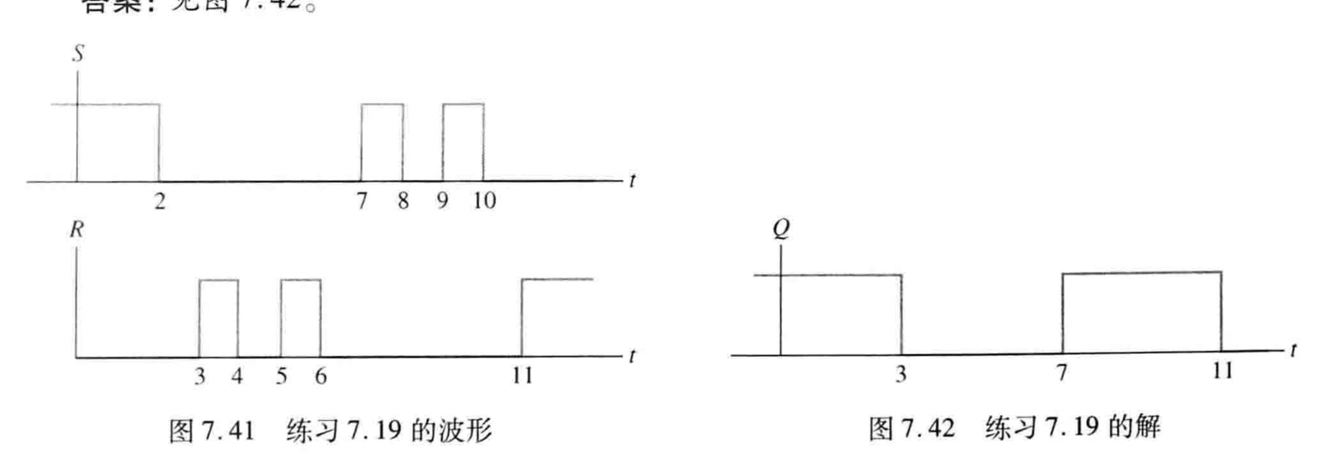


图 7.41　练习 7.19 的波形　　图 7.42　练习 7.19 的解

练习 7.20　给出图 7.43 所示电路的真值表。

答案：见表 7.9。

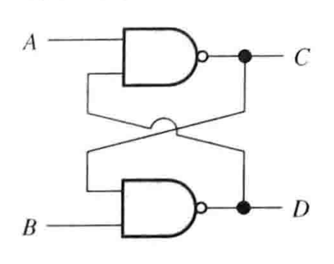


图 7.43　由与非门组成的触发器(练习 7.20)

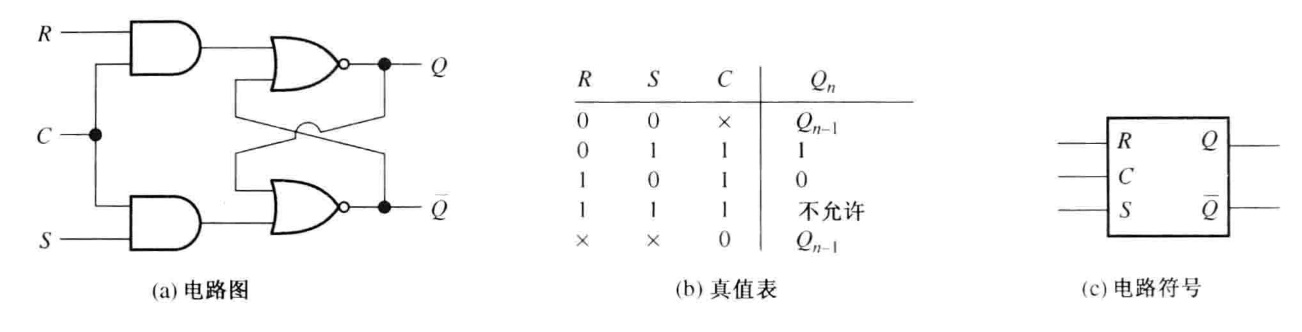
表 7.9　练习 7.20 的真值表

A	B	C_n	D_n
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	C_{n-1}	D_{n-1}

3. 钟控 SR 触发器。我们对基本 SR 触发器的结构进行改进，能够控制触发器状态改变的时刻。钟控 SR 触发器具有此功能，如图 7.44 所示。在 SR 触发器的两个输入端前分别加上一个与门。如果时钟信号 C 为低，则 SR 触发器的两个输入均为低，触发器的状态不变。只有当 C 为高时，信号 S 和 R 才能被传送到 SR 触发器的两个输入端。

钟控 *SR* 触发器的真值表和电路符号分别如图 7.44(b)和图 7.44(c)所示。当 *C* 为高时，“使能”作用：使触发器接收输入信号；否则，当 *C* 为低时，“禁止”作用：禁止触发器输入信号。

在设计数字系统时，*R*、*S* 和 *C* 不能同时为高。如果 3 个信号均为高，当 *C* 变为低时，触发器的状态可能为 $Q=1$ 或者 $Q=0$（或者在两种状态间摆动）。通常，我们不使用表现为不确定状态的系统。

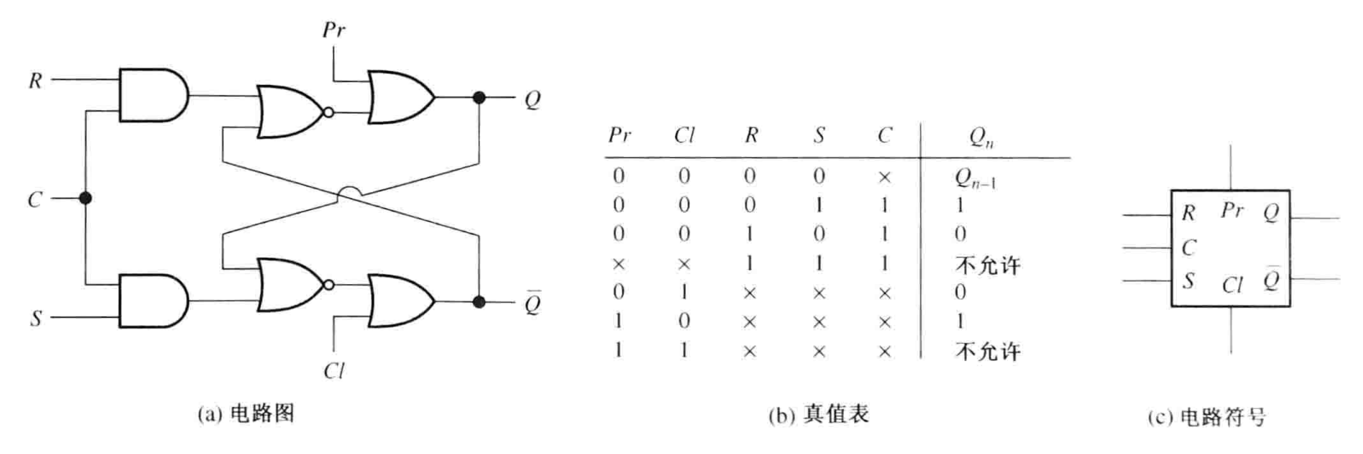


R	S	C	Q_n
0	0	×	Q_{n-1}
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	不允许
×	×	0	Q_{n-1}

(a) 电路图　　(b) 真值表　　(c) 电路符号

图 7.44　钟控 *SR* 触发器

有时，要求钟控 *SR* 触发器能独立于时钟信号，完成置位或清零的功能。图 7.45(a)所示为具有此功能的触发器。如果预置位输入 *Pr* 为高电平，即使时钟 *C* 为低电平，*Q* 也将输出高电平。类似地，清零输入 *Cl* 能独立使 *Q* 变为低。*Pr* 和 *Cl* 称为异步输入信号，因为其控制作用不受 *C* 的约束。另一方面，仅当 *C* 为高时，输入端 *S* 和 *R* 才能被使能，因此称输入 *S* 和 *R* 为同步输入信号。



Pr	Cl	R	S	C	Q_n
0	0	0	0	×	Q_{n-1}
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0
×	×	1	1	1	不允许
0	1	×	×	×	0
1	0	×	×	×	1
1	1	×	×	×	不允许

(a) 电路图　　(b) 真值表　　(c) 电路符号

图 7.45　具有异步置位和清零的钟控 *SR* 触发器

4. 边沿触发的 *D* 触发器。前面讲述的触发器由时钟 *C* 来“使能”或者“禁止”，这里，边沿触发电路仅在时钟信号跃变时刻才响应其输入信号。如果时钟信号不变，输入都被禁止，无论其为高还是低。正边沿触发电路在时钟信号从低到高转换的瞬间响应转换时刻之前的输入信号；相反，负边沿触发电路在时钟信号从高到低转换时响应转换时刻之前的输入信号。时钟信号的正边沿也称为上升沿，负边沿也称为下降沿。图 7.46 通过一个时钟信号波形表示这些概念。

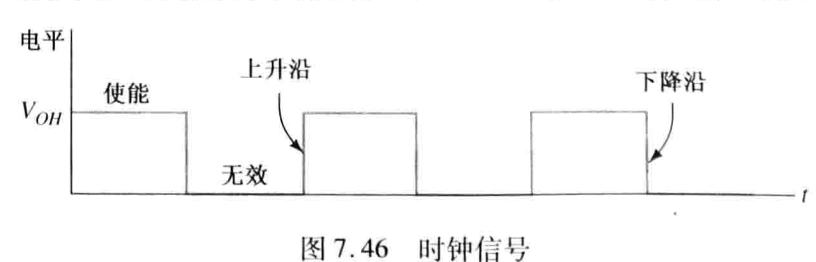
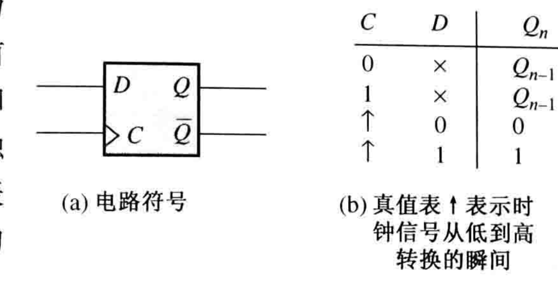


图 7.46　时钟信号

D 触发器是边沿触发电路的一个例子，也称为延迟触发器，它的输出值取决于在触发时钟转换前时刻的输入值。边沿触发的 *D* 触发器的电路符号如图 7.47(a)所示，在 *C* 输入端处的尖角符号表示触发器为边沿触发。正边沿触发的 *D* 触发器的真值表如图 7.47(b)所示。注意：在真值表的时钟列中的符号表示时钟信号从低到高的转换时刻。



C	D	Q_n
0	×	Q_{n-1}
1	×	Q_{n-1}
↑	0	0
↑	1	1

(a) 电路符号　(b) 真值表 ↑ 表示时钟信号从低到高转换的瞬间

图 7.47　正边沿触发的 *D* 触发器

练习 7.21　正边沿触发的 *D* 触发器的输入信号如图 7.48 所示，画出输出 *Q* 的波形图。(假定在 $t = 2$ 之前 *Q* 为低。)

答案：见图 7.49。

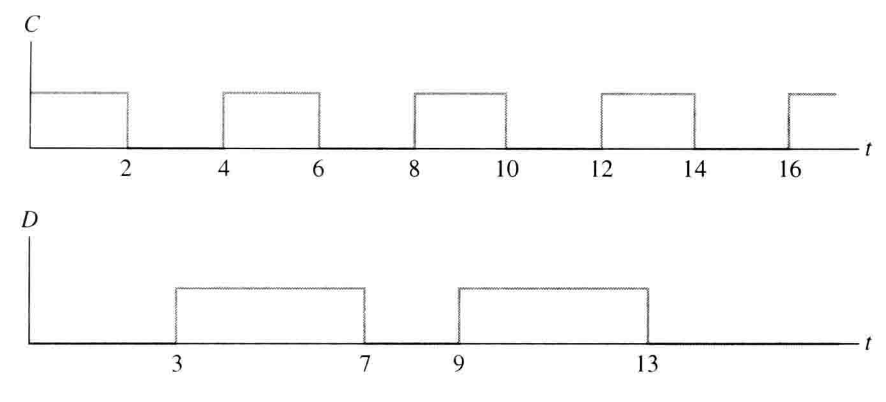


图 7.48　练习 7.21 的输入信号波形

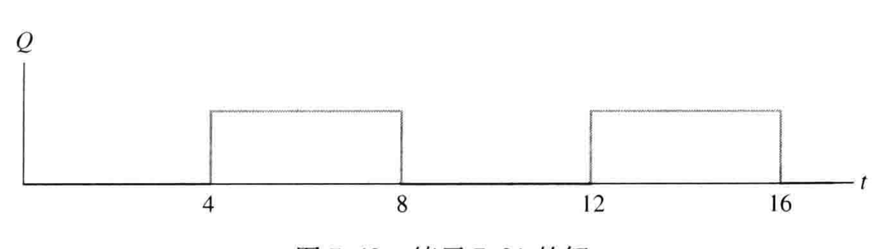
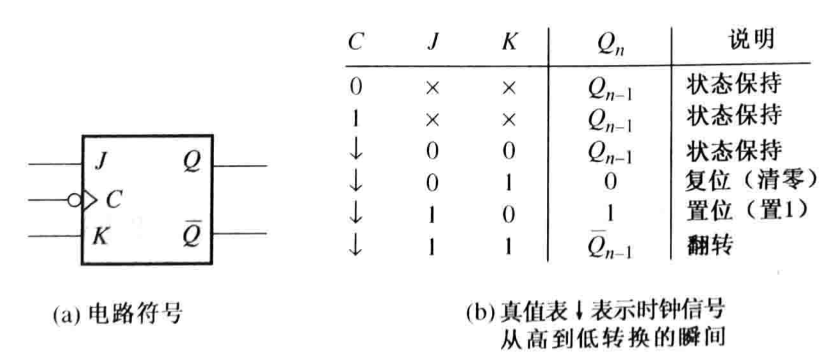


图 7.49　练习 7.21 的解

5. *JK* 触发器。负边沿触发的 *JK* 触发器的电路符号和真值表如图 7.50 所示。它与 *SR* 触发器非常相似，不同的是，在输入 *J*、*K* 均为高时，其状态在下一个时钟的负边沿处改变，而且输出处于翻转状态，即：在一次时钟转换时，输出由高变为低；在下一次时钟转换时，输出又由低回到高，如此反复翻转。



C	J	K	Q_n	说明
0	×	×	Q_{n-1}	状态保持
1	×	×	Q_{n-1}	状态保持
↓	0	0	Q_{n-1}	状态保持
↓	0	1	0	复位（清零）
↓	1	0	1	置位（置1）
↓	1	1	$\overline{Q}_{n-1}$	翻转

(a) 电路符号　(b) 真值表 ↓ 表示时钟信号从高到低转换的瞬间

图 7.50　负边沿触发的 *JK* 触发器

7.6.2 寄存器

1. 串入并出移位寄存器

寄存器由一组触发器构成，用于存储或操作数字字的各个位。例如，将几个正边沿触发的 D 触发器按图 7.51 相连接，就可得到一个串入并出移位寄存器。这种移位寄存器实现的功能是：在每个时钟脉冲作用下将输入字移动一位。

图 7.51 所示的波形图说明了移位寄存器的运行方式。假设所有的触发器初始状态为复位状态($Q = 0$)。输入数据(按位依次)送至第一级的输入：在第一个时钟脉冲的上升沿时刻，第一个数据位被传送到第一级；在第二个时钟脉冲的上升沿，第一个数据位被传送至第二级，而第二个数据位被传送到第一级。在经过 4 个时钟脉冲后，输入数据的 4 位被传送到整个移位寄存器。这样，串行的输入数据可以转换为并行形式输出。

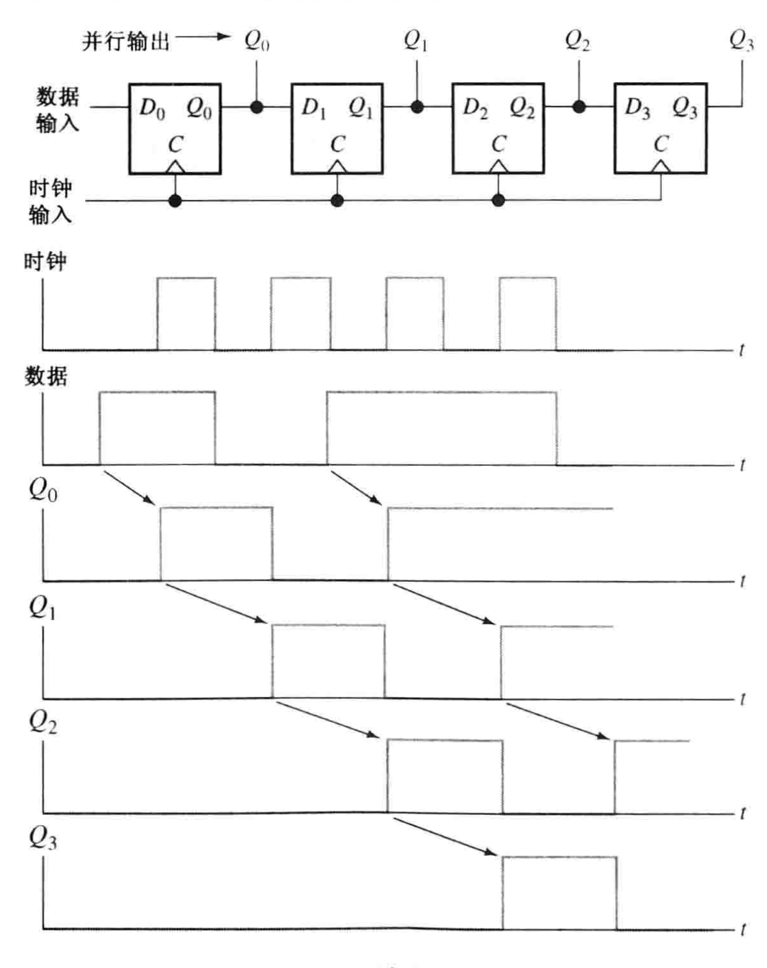


图 7.51 串入并出移位寄存器

7.6.3 并入串出移位寄存器

有时，我们需要将并行的数据串行传输，图 7.52 表示一个并入串出移位寄存器。该寄存器由 4 个带异步预置和清零输入端的正边沿触发的 D 触发器组成。通过在清零输入端加一正脉冲使寄存器清零。(由于清零输入端是异步的，所以在寄存器清零时不需要时钟脉冲。)并行数据通过 A 、B 、C 和 D 这 4 个输入端输入。然后，在并行输入使能端(PE)加一正脉冲，使对应数据线为高的所有触发器输入数据。这样，4 个并行数据被加载到寄存器的各级中。最后，用时钟脉冲控制寄存器，从最后一级寄存器依次串行输出数据。

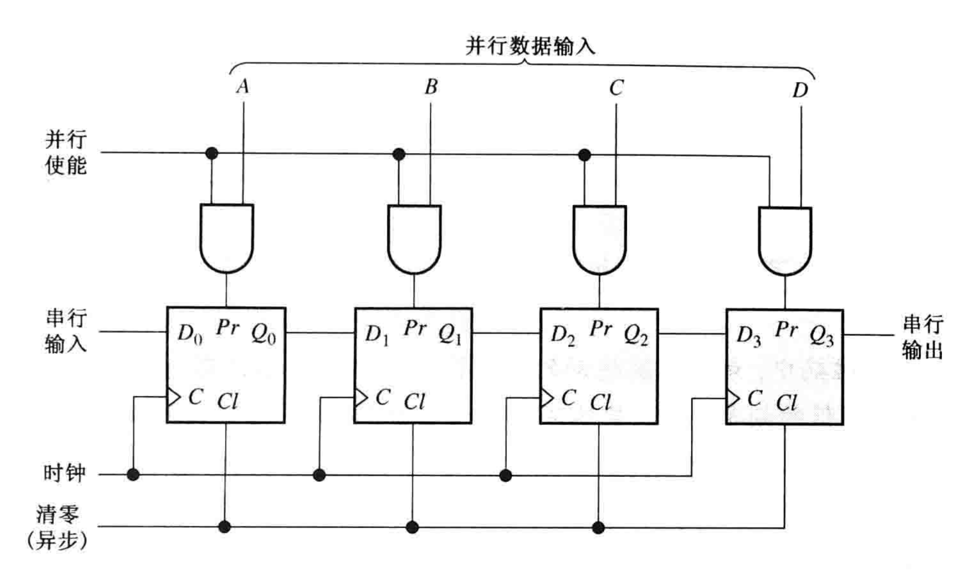


图 7.52 并入串出移位寄存器

7.6.4 计数器

计数器用于计算输入信号的脉冲数。例如，图 7.53 所示为脉冲计数器，它由多个 JK 触发器相级联构成。由图 7.50 说明：当 J 、K 均为高电平时，触发器的输出 Q 在时钟下降沿处翻转。需要计数的输入脉冲信号与第一级触发器的时钟输入端相接，而第一级的输出端与第二级的时钟输入端相接。

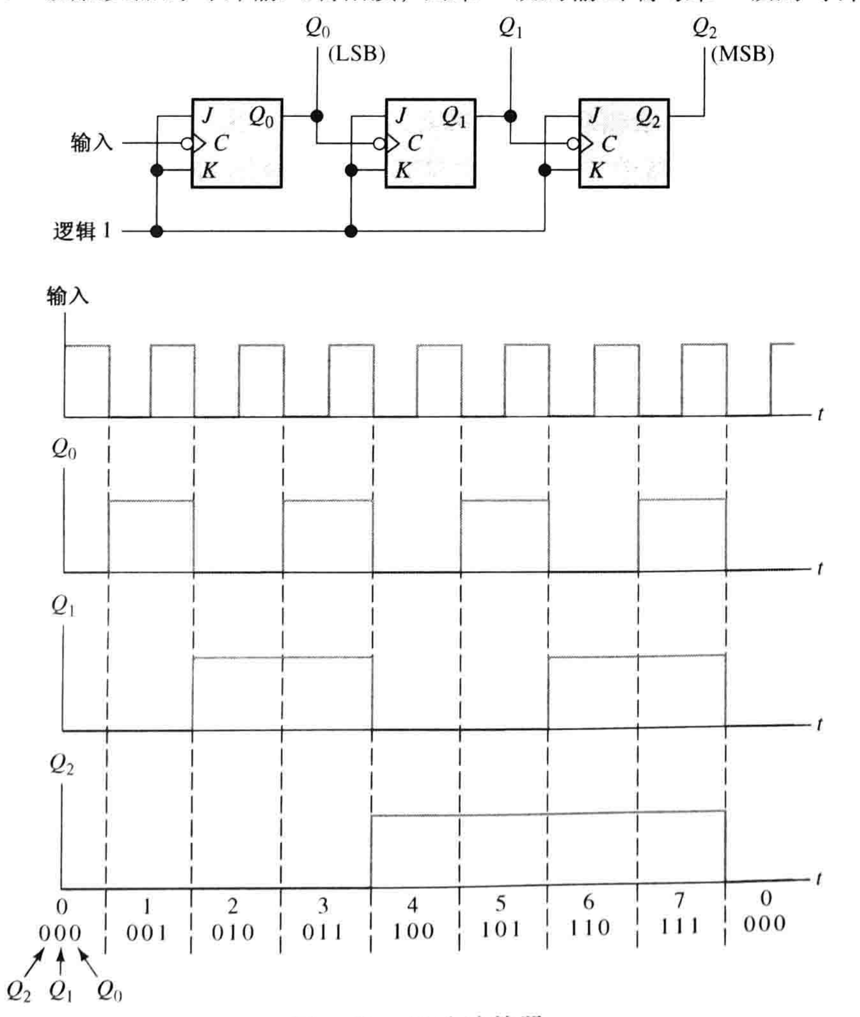


图 7.53 脉冲计数器

假设所有触发器的初始状态为清零状态($Q=0$)。当第一个输入脉冲下降沿到来时,Q_0 变为逻辑1。在第二个输入脉冲下降沿到来时,Q_0 翻转为0。这时,Q_0 出现下降沿,导致 Q_1 变为1。各计数器的输出波形如图7.53所示,在第7个脉冲后,计数器的输出 $Q_2Q_1Q_0=111$。在第8个脉冲后,计数器重新回到了 $Q_2Q_1Q_0=000$。因此,该计数器也被称为模8计数器。

实际应用7.1 电子学在生物医学工程中的应用:心脏起搏器

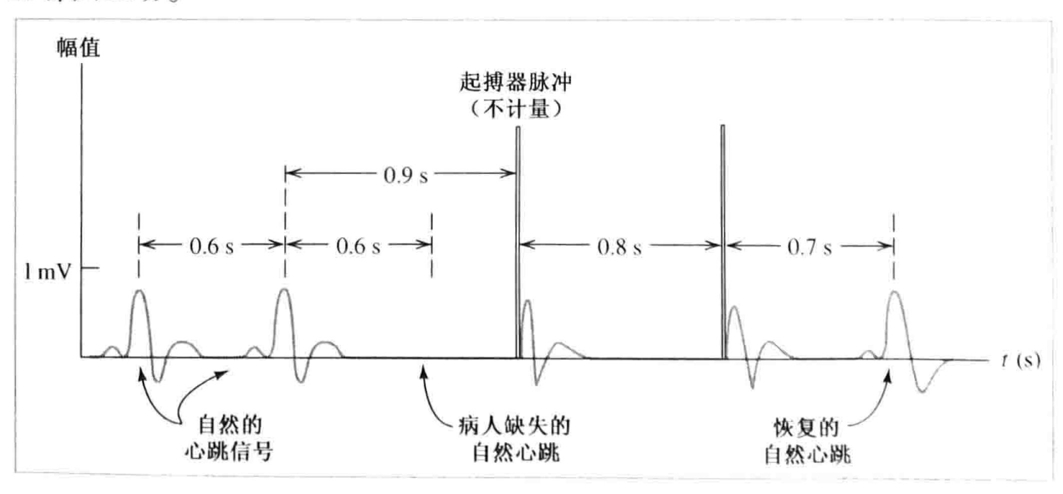
在某些类型的心脏病中,刺激心脏跳动的生物信号被阻塞而不能到达心肌。当这种阻塞发生时,心肌自然以一个很低的频率跳动,虽然不会致人死亡,然而,由于心率太低,会导致病人不能进行正常的活动。这时,采用电子起搏器波动来强迫心脏以一个较高的频率跳动是非常有益的。

有时,自然起搏的阻塞不是持续性的,即在部分时间里心脏正常跳动,只是偶尔停止搏动这时,采用按需心脏起搏器对偶尔起搏受阻的病人是合适的。按需心脏起搏器包含感知自然心跳的电路,并仅在预先设置的时间间隔内没有心跳时,采用电脉冲刺激心肌。如果检测到自然心跳,则停止加电脉冲。这种类型的电路称为按需心脏起搏器,因为仅在需要的时候才发出脉冲。

尽量促进自然的心跳被证明是对病人有利的(只要自然的心率大于阈值)。另一方面,如果需要人工脉冲,则产生略高一些的频率更好。典型的自然起博阈值为每分钟66.7次(对应为脉搏间隔0.9 s),强迫起搏阈值为每分钟75次。因此,在一般情况下,需要在病人的一个自然跳动后等0.9 s,再启动电路产生人工起搏脉冲;而在施以连续的人工起博时,两个人工脉冲之间的时间间隔为0.8 s。

起搏器的另一个特征是在检测到自然心跳之后或者在产生一个起搏脉冲之后,需忽略一个短期内(约0.4 s)来自心脏的信号,它来自于心肌收缩和松弛期间发出的脉冲。上述这种信号不应该引起起搏器的定时功能复位,因此,当电路检测到一次心肌收缩(或者电脉冲刺激)开始时,定时电路就复位,而直到心脏的收缩和舒张期结束后定时电路才能再次复位。

出现在起搏器输出端的典型电信号如图PA7.1所示。在记录图左边显示的是发生在自然心跳期间的信号。接下来,自然心跳阻塞发生,一个起搏器脉冲在最后一次自然心跳后延时0.9 s后发出。这些脉冲幅度的典型值为5 V,其持续时间为0.7 ms。在起搏器脉冲刺激之后,产生了心脏收缩和舒张的自然信号,不过这些信号被电路忽略了。在经历两个强力搏动周期后,心脏再次开始自然跳动。



图PA7.1 按需起搏器终端的典型电子信号

起搏器的电路和电池都被装在一个金属盒子里。这个盒子被植入到患者胸部的皮肤下，电线（包在一根称为导管的绝缘管内）穿过动脉从起搏器通向心脏内部。起搏器的电子终端为金属盒子和导管的端部，起搏器和导管如图 PA7.2 所示。

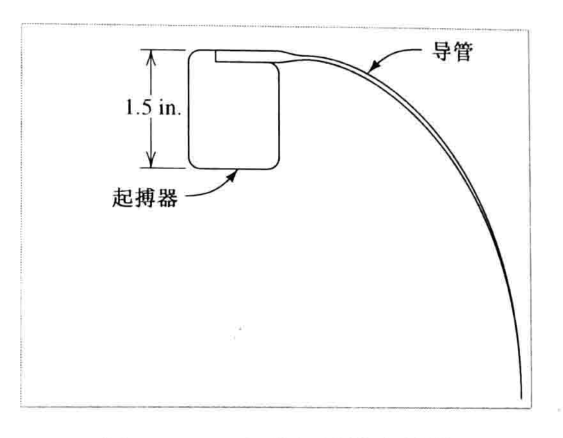


图 PA7.2 心脏起搏器和导管

典型的按需心脏起搏器的结构如图 PA7.3 所示。注意：电子终端既是放大器的输入端又是脉冲发生器的输出端。输入放大器增加了输入自然信号的幅度。由于自然心脏信号的幅度非常小（大约 1 mV），应该被放大后再到达比较器电路，去判断自然心跳是否存在。放大器中的滤波电路可除去信号的部分频率成分，以加强检测心跳的能力。此外，合适的滤波也除去了可能的无线电波和电线的干扰。因此，放大器的重要指标参数是其增益和频率响应。

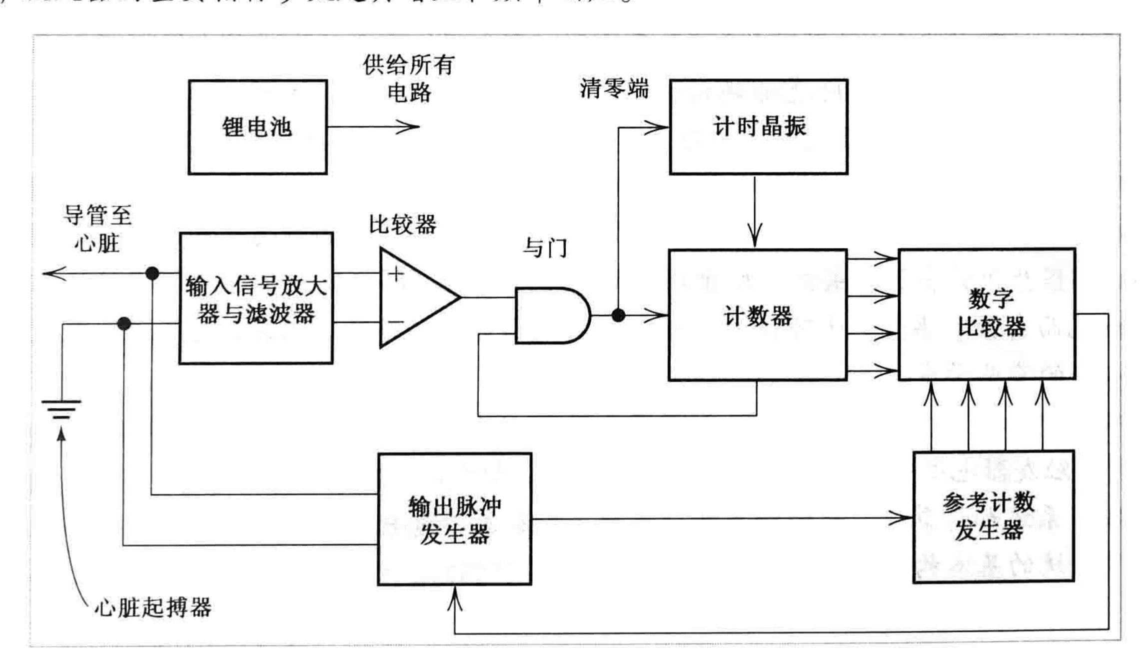


图 PA7.3 按需起搏器的结构框图

放大器和比较器将在本书第 III 部分详细介绍。

放大器的输出与模拟比较电路相连，比较器将放大和滤波后的信号与一个阈值进行比较。如果输入信号比门限值高，则比较器输出高电平。因此，比较器输出的数字信号表示了检测结果是自然心跳还是强制电脉冲。

这个检测结果通过一个与门送到计数器和计时电路。与门的第二个输入信号来自计数器，输入值为 0，并持续 0.4 s。因此，在前一个检测结果之后的 0.4 s 内，与门避免了再一次检测。这样，起搏器忽略了在一个自然的或强迫心跳开始后 0.4 s 内的输入信号。

计时功能通过对一个定时振荡器的输出周期计数来实现。定时振荡器产生周期为 0.1 s 的方波，当检测到一个心跳时，定时振荡器复位到一个周期的起始点。这样，在心跳后的每个振荡器周期的结束时间为 0.1 s 的整数倍。电路的正确工作取决于精确定时，因此定时振荡器必须保持精确的周期，显然，定时振荡器的频率稳定性即是其关键的性能参数。

计数器是一个计算定时振荡器输出周期数的数字电路。当检测到心跳或起搏器脉冲时，计

数器自动置为零。计数器产生的数字信号被送到比较器，基准电路产生的信号也被送到比较器。如果最近的跳动是自然的，则基准计数值为9；如果最近的跳动是强迫的，则基准计数值为8。当输入到比较器的计数值与基准计数值相等时，数字比较器输出为高电平，这时，脉冲发生器将产生一个输出脉冲。

脉冲发生器必须产生一个指定幅度和持续时间的脉冲。在某些设计中，输出脉冲幅度需要比电池电压高。这时，可将充电电容先与电池并联，再切换为与电池串联的电路结构，这样便可产生更高的电压了。

对于所有的起搏器电路，超低功耗是最重要的技术指标，因为电路必须依靠一块很小的电池工作很多年，而更换电池是需要做外科手术的。当不需要起搏脉冲时，该电路的工作电流仅为几毫安，由2.5 V电池供电。当需要起搏脉冲时，电路的平均电流消耗增加到几十毫安。由于在产生起搏脉冲时需要的输出功率较大，这个较高的电流消耗是不可避免的。

高可靠性也是非常重要的，设备故障可能危及生命。对电路中每个部分进行详细的故障模式分析是十分必要的，因为某些故障是非常危险的。例如，即使起搏器不能产生起搏脉冲，患者也可能由于心肌的自然(低频率的)搏动而幸存。但是，如果定时脉冲发生器因故障而运行太快，则患者的心脏将被强迫快速地跳动，使人迅速致命，尤其是那些因心脏疾病而十分虚弱的人。

显然，电路设计不是解决这个问题的全部。起搏器的详细规格参数需要内科医生提出；导管和金属盒的形式以及材料的选择需要机械工程师和化学工程师的参与。通过团队的协作，工程师和内科医生设计出能显著改善健康状况的电子起搏器。那些致力于这项研究的工作人员以他们的成就而自豪。当然，还可以对心脏起搏器做出更多的改进，也许，完成这些改进的人正是研读本书的某些学生。

在本章中，我们了解到复杂的组合逻辑函数可以由与非门(或者或非门)的组合连接来实现。此外，触发器也是由逻辑门的组合连接构成的，触发器的相互联结又构成了寄存器。一个复杂的数字系统如计算机，是由许多的门电路、触发器和寄存器组成的。因此，逻辑门电路是复杂数字系统的基本构成单元。

本章小结

1. 数字信号的抗干扰能力优于模拟信号。在噪声幅度不太高的情况下，能够识别出加入噪声后的数字信号的逻辑电平。
2. 数字电路中对元件值的要求不需要像模拟电路那样精确。
3. 数字电路比逻辑电路更容易由大规模集成电路实现。
4. 在正逻辑系统中，高电平代表逻辑1。
5. 数据可用十进制、二进制、八进制、十六进制或者BCD码的形式表示。
6. 在格雷码中，每两个相邻码之间仅有一位不同。格雷码常用于描述位置和角度的变化。
7. 在计算机中，数据通常用有符号补码的形式表示。
8. 逻辑变量取两个值——逻辑1和逻辑0。根据布尔代数运算法则，逻辑变量可由与、或、非运算构成。真值表列出了所有的输入变量的组合和对应的输出变量。
9. 摩根定理：

$$ABC = \overline{\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}}$$

和

$$A+B+C=\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$$

10. 与非(或者或非)门电路可实现任何的组合逻辑电路。
11. 任何的组合逻辑函数都能改写为与或式(最小项之和，SOP)，其中的每个与项是与真值表中输出变量为逻辑1的行对应的最小项。
12. 任何的组合逻辑函数都能改写为或与式(最大项之积，POS)，其中的每个和项是与真值表中输出变量为逻辑0的行对应的最大项。
13. 许多有用的组合电路，如译码器、编码器和转换器可由集成电路实现。
14. 卡诺图用于简化逻辑表达式，减少实现给定逻辑函数的门电路数。
15. 时序逻辑电路在某时刻的输出与该时刻及以前的输入有关，因此这种电路具有记忆特性。同步或钟控时序电路是由时钟信号控制的。
16. 触发器类型有：*SR* 触发器，钟控触发器，*D* 触发器，*JK* 触发器。
17. 寄存器由触发器构成，用于存储或处理数字字。
18. 逻辑门的组合连接构成了触发器。触发器的相互联结又构成了寄存器。一个复杂的数字系统如计算机，是由许多的门电路、触发器和寄存器组成的。因此，逻辑门电路是复杂数字系统的基本构成单元。

习题

7.1节 逻辑电路的基本概念

*P7.1 描述数字方式相比模拟方式的三个优点。

P7.2 给出下列术语的定义：位、字节和半字节。

P7.3 解释正逻辑系统与负逻辑系统的不同。

P7.4 什么是噪声容限？噪声容限为什么重要？

P7.5 试述串行传输与并行传输之间的不同点。

7.2节 二进制数的表示

P7.6 将下列二进制数转换为十进制形式：
(a)101.101；(b)011.11；(c)1010.01；(d)111.111；(e)1000.0101；(f)10101.011。

P7.7 将下列十进制数转换为二进制和BCD码形式：
(a)17；(b)8.5；(c)9.75；(d)73.03125；(e)67.375。

P7.8 求整数0~100，0~1000及0~10^6分别需要用多少位的字来表示？

P7.9 求下列二进制数之和：
(a)1101.11和101.111；(b)1011和101；(c)10001.111和0101.001。

P7.10 求下列BCD数之和：
(a)10010011.0101和00110111.0001；(b)01011000.1000和10001001.1001。

P7.11 将下列十进制数转换为二进制、八进制和十六进制形式：
(a)173；(b)299.5；(c)735.75；(d)313.0625；(e)112.25。

P7.12 写出下列十进制数的8位有符号补码：
(a)19；(b)−19；(c)75；(d)−87；(e)−95；(f)99。

P7.13 将以下十六进制数分别表示为二进制数、八进制数和十进制数：(a)$FA.F_{16}$；(b)$2A.1_{16}$；(c)777.7_{16}。

P7.14 将以下八进制数分别表示为二进制数、十六进制数和十进制数：(a)777.7_8；(b)123.5_8；(c)24.4_8。

P7.15 按下列进制计数时，777 之后的数为何值？(a)十进制；(b)八进制；(c)十六进制。

P7.16 请问十进制整数的最大值分别为什么？能够被转换为：(a)3 位二进制数；(b)3 位八进制数；(c)3 位十六进制数。

*P7.17 参照图 7.9 所示的三位格雷码的列表构建 4 位格雷码的列表，格雷码的优势体现在哪些应用中？为什么？

P7.18 试将以下数转换为十进制数：(a)* $FA5.6_{16}$；(b)* 725.3_8；(c)$3F4.8_{16}$；(d)73.25_8；(e)$FF.F0_{16}$。

P7.19 写出下列二进制数的反码和补码：

(a)11101000；(b)00000000；(c)10101010；(d)11111100；(e)11000000。

P7.20 用 8 位有符号补码计算下列各式：

(a) $17_{10}+15_{10}$；(b) $17_{10}-15_{10}$；(c) $33_{10}-37_{10}$；(d) $15_{10}-63_{10}$；(e) $49_{10}-44_{10}$。

P7.21 怎样判断有符号补码运算中发生上溢或下溢？

7.3 节 组合逻辑电路

P7.22 什么是真值表？

*P7.23 表述摩根定律。

P7.24 画出以下门电路的符号，并列出真值表：与门、或门、非门、与非门、或非门和异或门，假设每个门电路都是二输入门(除非门以外)。

P7.25 描述一种方法能够证明布尔代数等式的有效性。

P7.26 写出以下布尔表达式的真值表。

(a) $D = ABC + A\overline{B}$

(b) * $E = AB + A\overline{B}C + \overline{C}D$

(c) $Z = WX + \overline{(W + Y)}$

(d) $D = A + \overline{A}B + C$

(e) $D = \overline{(A + BC)}$

P7.27 写出图 P7.27 中各逻辑电路的输出的布尔代数式。

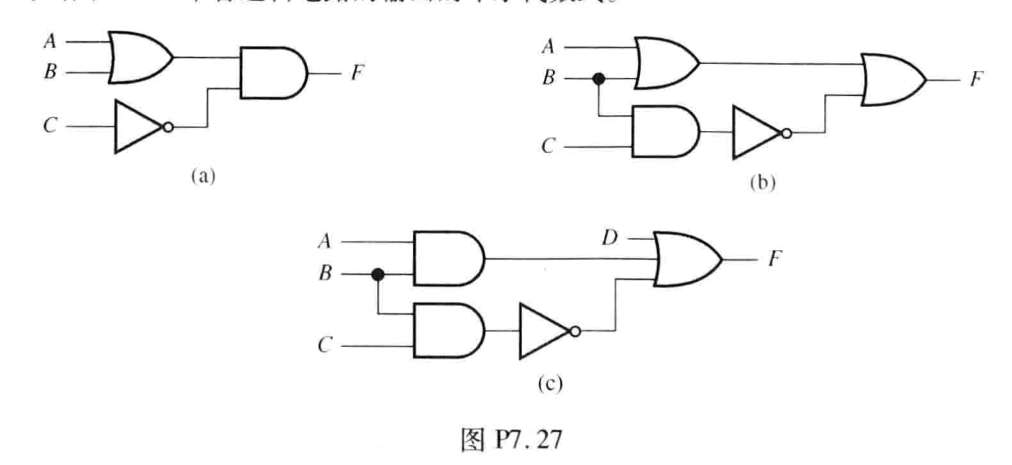


图 P7.27

*P7.28 采用真值表证明等式：

$$(A+B)(A+C)=A+BC$$

P7.29 采用真值表证明等式：

$$(A+B)(\overline{A}+AB)=B$$

P7.30 采用真值表证明等式：

$$A+\overline{A}B=A+B$$

P7.31 采用真值表证明等式：

$$ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}C=A$$

P7.32　画出用与门、或门和非门实现下列表达式的电路。

(a) $F = A + \bar{B}C$

(b) $F = A\bar{B}C + AB\bar{C} + \bar{A}BC$

(c) $F = (\bar{A} + \bar{B} + C)(A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + C)$

P7.33　应用摩根定理交换下列表达式中的与运算和或运算。

(a) $F = AB + (\bar{C} + A)D$

(b) $F = A(\bar{B} + C) + D$

(c) $F = A\bar{B}C + A(B + C)$

(d) $F = (A + B + C)(A + \bar{B} + C)(\bar{A} + B + \bar{C})$

(e) $F = ABC + A\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C}$

P7.34　为什么说与非门足以构成任何组合逻辑电路？还有什么门电路也可以实现此功能？

P7.35　电路如图 P7.35 所示。开关由逻辑变量控制，如果 A 为高，则开关 A 闭合；如果 A 为低，则开关 A 断开。相反，如果 B 为高，则开关 $\bar{B}$ 断开；如果 B 为低，则开关 $\bar{B}$ 闭合。如果输出电压为 5 V，则输出变量为高；如果输出电压为零，则输出变量为低。写出输出变量的逻辑表达式，并做出该电路的真值表。

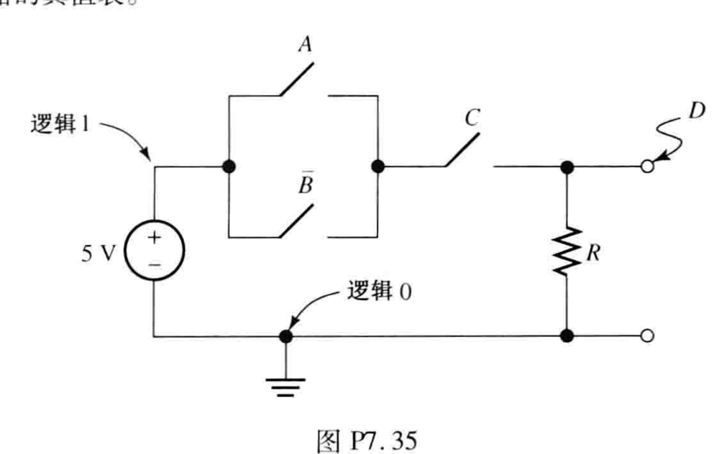


图 P7.35

P7.36　电路如图 P7.36 所示，题设及所求同习题 7.35。

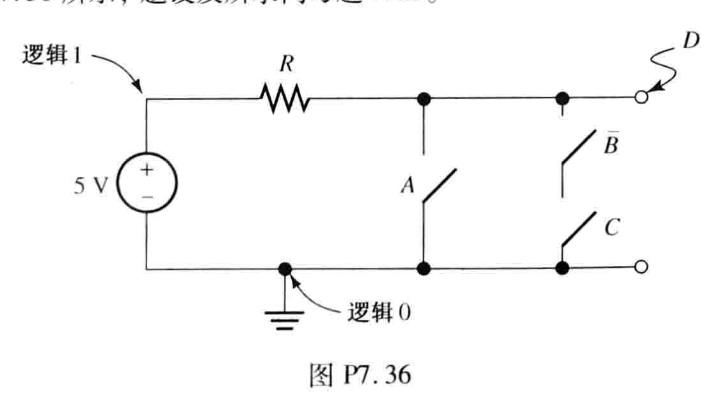


图 P7.36

P7.37　门电路输入端上的小圆圈表示对输入变量取反，如图 P7.37 所示。求与图中电路等效的门电路。

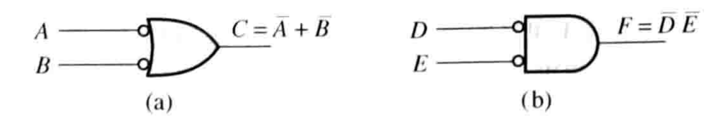


图 P7.37

7.4 节 逻辑电路的综合

P7.38 采用与或式,描述如何根据一个真值表写出逻辑表达式;同理,采用或与式来描述。

P7.39 举例说明译码器的应用。

*P7.40 在表 P7.40 中, A 、B 和 C 为输入逻辑变量, F 到 K 为输出逻辑变量。根据输入求 F 的与或式和或与式。

表 P7.40

A	B	C	F	G	H	I	J	K
0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1

P7.41 同习题 P7.40, 根据输入, 求 G 的与或式和或与式。

P7.42 同习题 P7.40, 根据输入, 求 H 的与或式和或与式。

P7.43 同习题 P7.40, 根据输入, 求 I 的与或式和或与式。

P7.44 同习题 P7.40, 根据输入, 求 J 的与或式和或与式。

P7.45 同习题 P7.40, 根据输入, 求 K 的与或式和或与式。

P7.46 仅用与非门实现图 P7.46 所示电路的与或式。

P7.47 如图 P7.47 所示电路,仅采用或非门来完成或与式结构的逻辑电路。

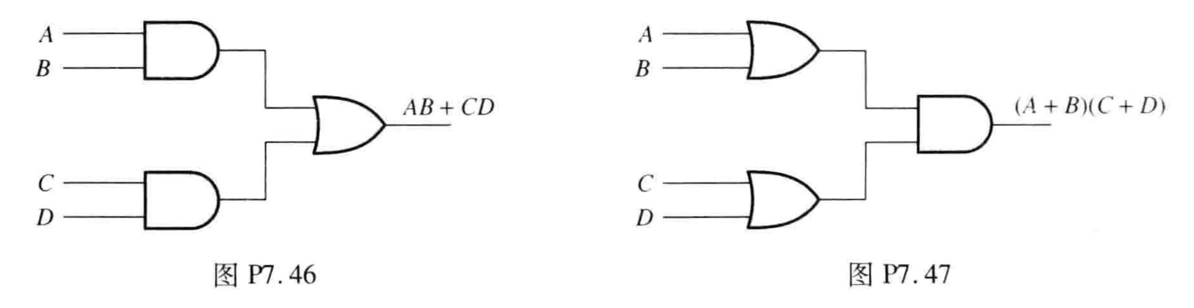


图 P7.46 图 P7.47

P7.48 设计一个控制快艇引擎点火装置的逻辑电路。如果对点火装置供电, 则逻辑输出 I 变为高, 其他情况 I 为低。在引擎间隙中弥散的汽油烟会引起爆炸。如果有汽油烟存在, 则传感器产生的逻辑输出 F 将变为高, 在这种情况下不能对点火装置供电。为了防止事故发生, 在行驶过程中不能对点火装置供电。如果处于行驶状态, 则逻辑信号 G 为高, 反之则为低。风扇用于清除引擎间隙中的汽油烟, 应先于点火装置供电前运行 5 分钟。在风扇运行满 5 分钟时逻辑信号 B 变为高。在风扇运行没有满 5 分钟或者处于行驶状态但没有油烟存在时, 可进行应急手动控制, 对应的信号为 E。(a) 列出包含所有输入信号 B、E、F 和 G 组合的真值表, 并给出每行对应输出 I 的值; (b) 求布尔表达式 I 的 SOP 形式; (c) 求布尔表达式 I 的 POS 形式; (d) 试对上述(b) 和(c) 中得到的表达式进行化简, 用最少的门电路实现对应的逻辑电路, 门电路可采用与门、或门和非门。

*P7.49 仅用与非门实现两输入 A 和 B 的异或运算。(提示: 将与非门的两个输入端相连可得到一个非门, 列出真值表并写出 SOP 式。最后, 应用摩根定理将或运算转换为与运算。)

P7.50 仅采用二输入或非门来实现二输入变量(A 和 B)的异或逻辑电路。(提示:一个或非门的二输入端可以短接,从而形成一个非门。首先列出真值表,写出或与式,然后采用摩根定律将与运算转化为或运算。)

P7.51 如图7.26所示的BCD-七段译码器。假设逻辑变量B_8、B_4、B_2和B_1表示BCD码数据。例如，十进制数7用BCD码表示为字0111，其中最高位$B_8=0$，第二位$B_4=1$，等等。(a)输出A为高表示显示块中A段为开，求输出A的或与式实现的逻辑电路。(b)输出B为高表示显示块中B段为开，求输出B的或与式实现的逻辑电路。

*P7.52 有两个补码相加，S_1是第一个数的符号位，S_2是第二个数的符号位，S_T是总和的符号位。如果用输出E为1表示加法结果的上溢或者下溢，E为零表示正常的结果。要求：(a)写出真值表；(b)给出E的最小项与或式；(c)用与门、或门、非门实现E，并绘出逻辑电路图。

7.5节 逻辑电路的化简

*P7.53 (a)画出下列逻辑函数的卡诺图：

$$F=\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}+AB\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}D+AB\overline{C}D+\overline{A}BC\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$$

(b)求该逻辑函数的最简SOP(与或)式。

(c)求该函数的最简POS(或与)式。

P7.54 一个逻辑电路的输入有A,B和C，逻辑电路的输出表达式为$D=\sum m(0,3,4)$，要求：(a)画出输出D的卡诺图；(b)解得最简SOP(与或)式；(c)获得两个等值的最简POS(或与)式。

P7.55 一个逻辑电路的输入有A,B和C，逻辑电路的输出表达式为$D=\prod M(1,3,4,6)$，要求：(a)画出输出D的卡诺图；(b)解得最简SOP(与或)式；(c)获得最简POS(或与)式。

P7.56 (a)画出下列逻辑函数的卡诺图：

$$D=ABC+\overline{A}BC+AB\overline{C}+BC$$

(b)求逻辑函数D的最简SOP(与或)式，并用与门、或门和非门实现该函数的逻辑电路。

(c)求该函数的最简POS(或与)式。

P7.57 (a)画出下列逻辑函数的卡诺图：

$$F=AB\overline{C}\,\overline{D}+ABCD+ABC\overline{D}+\overline{A}BCD$$

(b)求该逻辑函数的最简SOP(与或)式。

(c)用与门、门和非门实现(b)中所得函数的逻辑电路。

(d)求解最简POS(或与)式。

*P7.58 表P7.58中$ABCD$是输入变量，$FGHI$是输出变量，要求：(a)画出输出F的卡诺图；(b)获得F的最简与或式；(c)用与门、或门、非门实现F的与或式；(d)获得F的最简或与式。

表P7.58

A	*B*	*C*	*D*	*F*	*G*	*H*	*I*
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0

P7.59 针对输出变量 G 重复习题 P7.58 的要求。

P7.60 针对输出变量 H 重复习题 P7.58 的要求。

P7.61 针对输出变量 I 重复习题 P7.58 的要求。

P7.62 设有一逻辑电路，其输出为 X。仅当给定的十六进制数小于等于 7 时，X 为高。逻辑电路的输入为与十六进制数等值的二进制数的位：B_8、B_4、B_2 和 B_1，其中 B_8 为最高位，B_1 为最低位。列出真值表并画出卡诺图，写出 X 的最简 SOP(与或)式。

P7.63 设有一逻辑电路，其输出为 X。当给定的 BCD 码字为不可用的错误形式时，X 为高。逻辑电路的输入分别为 BCD 码的各位：B_8、B_4、B_2 和 B_1，其中 B_8 为最高位，B_1 为最低位。要求画出卡诺图，写出 X 的最简 SOP(与或)式。

P7.64 设计一个逻辑电路，要求仅当十六进制数为 4、6、C 或者 E 时输出高电平。设逻辑电路的输入变量为 B_8、B_4、B_2。(注意：B_8 是最高位，B_1 是最低位。)画出卡诺图，并写出输出变量 X 的最简与或式和或与式。

P7.65 设有一实现两个逻辑信号互换的逻辑电路。电路有 3 个输入 I_1、I_2、S 和两个输出 O_1、O_2。当 S 为低时，应有 $O_1 = I_1$，$O_2 = I_2$；当 S 为高时，应有 $O_1 = I_2$，$O_2 = I_1$。因此，S 相当于控制两个输入交换的开关。用卡诺图求解逻辑函数的最简 SOP(与或)式，并画出相应的逻辑电路。

P7.66 一个市政府委员会有 A、B、C 3 个成员。当委员对某个议案投票时，1 表示赞成，0 表示反对。在多数投赞成票时，输出 X 为高，反之则为低。求 X 的最简 SOP(与或)式。画出检测是否有两张赞成票的最简电路。在有 5 个成员的情况下，重复上面的问题。(提示：此时的电路为检测是否有三张赞成票。)

P7.67 一个市政府有 4 位领导 A、B、C、D，在对一个提案投票时，设定 1 表示同意，0 表示反对。另外，设定在票数等于和少于半数时投票结果 X 为高，表示提案不通过。请给出输入变量 A、B、C、D 构成的最简与或式 X。

P7.68 一种帮助确保数据正确传输的方法是在传输的每个数据字后加上一个奇偶校验位使得每个数据中有偶数个 1。如果在接收到的数据中有奇数个 1，则表明在传输过程中至少产生了一个错误。

(a)说明图 P7.68 所示电路用于求出半字节(4 位数据字) $ABCD$ 的校验位，即传输的数据为 $ABCDP$

(b)求 P 的最简 SOP(与或)式。

(c)如果接收到的数据有一位出错，则该数据中会有奇数个 1。求一个由 4 个异或门组成的逻辑电路。当接收到的数据 $ABCDP$ 中有奇数个 1 时，其输出为 1，反之则为 0。

P7.69 如表 P7.69 所示，设一电路将 3 位二进制码转换为 3 位格雷码。分别求出 X、Y 和 Z 的最简 SOP(与或)式。

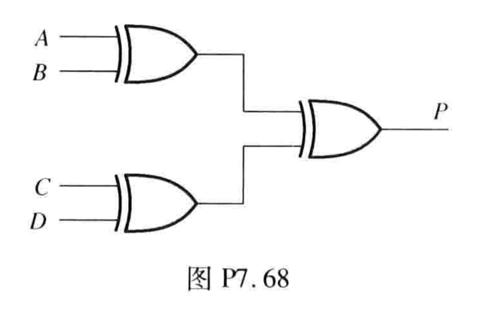


图 P7.68

表 P7.69

二进制码 ABC	格雷码 XYZ
000	000
001	001
010	011
011	010
100	110
101	111
110	101
111	100

P7.70 如表 P7.69 所示，设某电路将 3 位格雷码转换为 3 位二进制码。分别求出 A、B 和 C 的最简 SOP(与或)式。

*P7.71 前面已经讨论过表示十进制整数的位权分别为 8、4、2、1 的 BCD 码，而另一种表达方式则是位权分别为 4、2、2、1 的 4221 码，表 P7.71 为编码表。

表 P7.71 表示十进制数的 BCD、4221 和余 3 码表

十进制数	BCD 码 *ABCD*	4221 码 *FGHI*	余 3 码 *WXYZ*
0	0000	0000	0011
1	0001	0001	0100
2	0010	0010	0101
3	0011	0011	0110
4	0100	1000	0111
5	0101	0111	1000
6	0110	1100	1001
7	0111	1101	1010
8	1000	1110	1011
9	1001	1111	1100

试设计一个逻辑电路，将 BCD 码输入转化为 4221 码输出。要求：(a)对 *F* 函数填写卡诺图，并在无关项对应的方格填入 *X*，*X* 可视为 1 或者 0，以此求得最简与或式；(b)对逻辑函数 *G* 重复以上要求；(c) 对逻辑函数 *H* 重复以上要求；(d) 对逻辑函数 *I* 重复以上要求。

P7.72 试设计一个逻辑电路，将 4221 码输入转化为 BCD 码输出。要求：(a)对 *A* 函数填写卡诺图，并在无关项对应的方格填入 *X*，*X* 可视为 1 或者 0，以此求得最简与或式；(b)对逻辑函数 *B* 重复以上要求；(c)对逻辑函数 *C* 重复以上要求；(d)对逻辑函数 *D* 重复以上要求。

P7.73 余 3 码也是另一种表示十进制整数的编码。为了将一个十进制数转换为其对应的余 3 码，我们将这个数加上 3，并用 4 位二进制数表示得到的和。例如，将十进制数 9 转换为余 3 码：

$$9_{10}+3_{10}=12_{10}=1100_2$$

因此，1100 就是与十进制数 9 对应的余 3 码。其他十进制数的对应余 3 码见表 P7.71。

设计一个实现 BCD 码转余 3 码的逻辑电路。

(a)画出 *W* 的卡诺图。卡诺图中无 BCD 码对应的方格标为 *x*。通过卡诺图求出 *W* 的最简 SOP (与或)表达式。在卡诺图中，*x* 可作为 1，也可作为 0。

(b)重复(a)，求 *X*。

(c)重复(a)，求 *Y*。

(d)重复(a)，求 *Z*。

P7.74 设计一个实现余 3 码转 BCD 码的逻辑电路。

(a)画出 *A* 的卡诺图。卡诺图中无 4221 码对应的方格标为 *x*。通过卡诺图求出 *A* 的最简 SOP(与或)表达式。在卡诺图中，*x* 可作为 1，也可作为 0。

(b)重复(a)，求 *B*。

(c)重复(a)，求 *C*。

(d)重复(a)，求 *D*。

7.6 节 时序逻辑电路

P7.75 用或非门绘制一个 *SR* 触发器的电路图，同理，用与非门绘制一个 *SR* 触发器的电路图。

P7.76 画出一个 *SR* 触发器的符号，给出真值表。

P7.77 画出一个钟控 *SR* 触发器的符号，给出真值表。

P7.78 说明触发器的同步输入与异步输入之间的差别。

P7.79 什么是边沿触发器?

P7.80 画出一个上升沿触发 D 触发器的符号，给出真值表。

*P7.81 假设移位寄存器的初始状态为100($Q_0=1, Q_1=0, Q_2=0$)，如图 P7.81 所示。求寄存器接下来的几个状态，问：移位寄存器在第几次移位后回到初始状态。

P7.82 在以下情况下，问题同习题 P7.81：

(a)用或门代替异或门；

(b)用与门代替异或门。

P7.83 图 P7.83 中的 D 触发器是正边沿触发的。设在 $t=0$ 之前的状态为 $Q_0=Q_1=0$，绘出对应时刻 Q_0 和 Q_1 的波形。假设逻辑电平为 0 V 和 5 V。

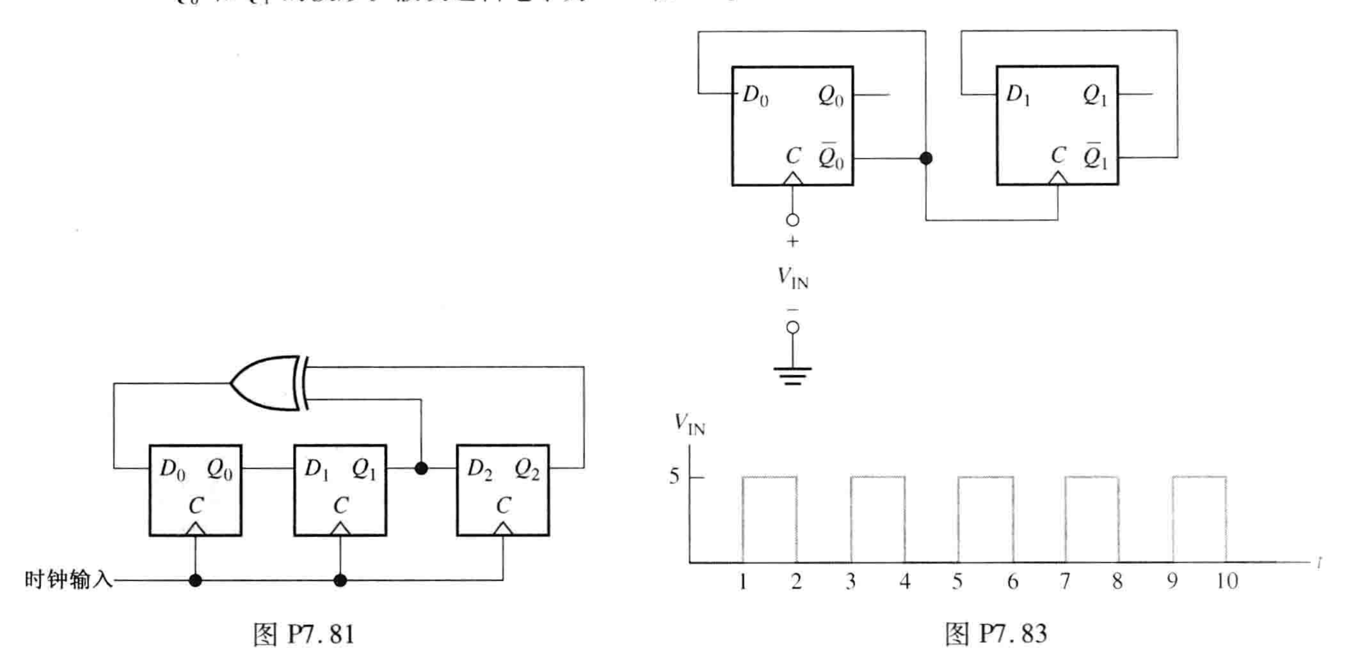


图 P7.81　　图 P7.83

P7.84 图 P7.84 中的 D 触发器是正边沿触发的，输入 Cl 为异步清零。设在 $t=0$ 时的状态为 $Q_0=Q_1=Q_2=Q_3=0$，时钟输入 V_{IN} 如图 P7.84 所示。绘出对应时刻 Q_0、Q_1、Q_2 和 Q_3 的波形，假设逻辑电平为 0 V 和 5 V。

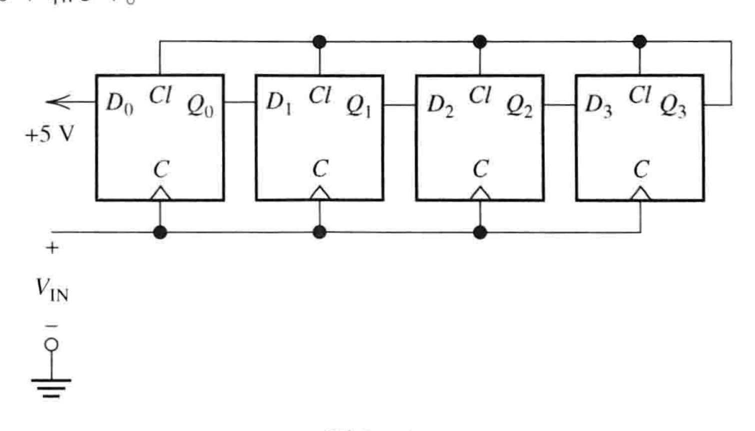


图 P7.84

*P7.85 用与门、或门、非门和一个负边沿触发的 D 触发器构成图 7.50 所示的 JK 触发器。

P7.86 如图 7.53 所示的脉冲计数器。设触发器具有异步清零输入。怎样通过加门电路实现在计数到 6 时马上复位计数到 0，即构成一个模 6 计数器。

P7.87 一种用于赌博游戏的电子模具系统的功能框图如图 P7.87 所示。该系统由一个高速时钟，一个放松状态为逻辑 1 的按钮开关，以及一个状态按 001、010、011、100、101、110 顺序循环的计数器组成。计数器的二进制计数值与模具各边上点的个数等值。Q_3 为最高有效位(MSB)，Q_1 为最

低有效位(LSB)。系统的显示部分由 7 个发光二极管组成，每个二极管在逻辑 1 时点亮。编码器是一个将计数器状态转换为显示部分的输入逻辑信号的组合逻辑电路。当按下开关时，计数器开始工作；当释放开关时，计数器停止在一个随机状态。

(a)用带有异步预置数和清零输入的 *JK* 触发器画出计数器的具体电路。

(b)设计系统中的编码器，并用卡诺图简化电路。

P7.88 4 个发光二级管分别位于菱形的四个角，如图 P7.88 所示。发光二极管在逻辑 1 时被点亮。每次仅有一个二极管被点亮。根据 *X* 为高或为低，二极管将沿着顺时针方向或者逆时针方向依次被点亮。每两秒内应完成一次循环。

(a)时钟的频率是多少?

(b)画出计数器的逻辑电路。

(c)列出真值表，并用卡诺图分别求出 D_1 到 D_4 的最简 SOP(与或)式。

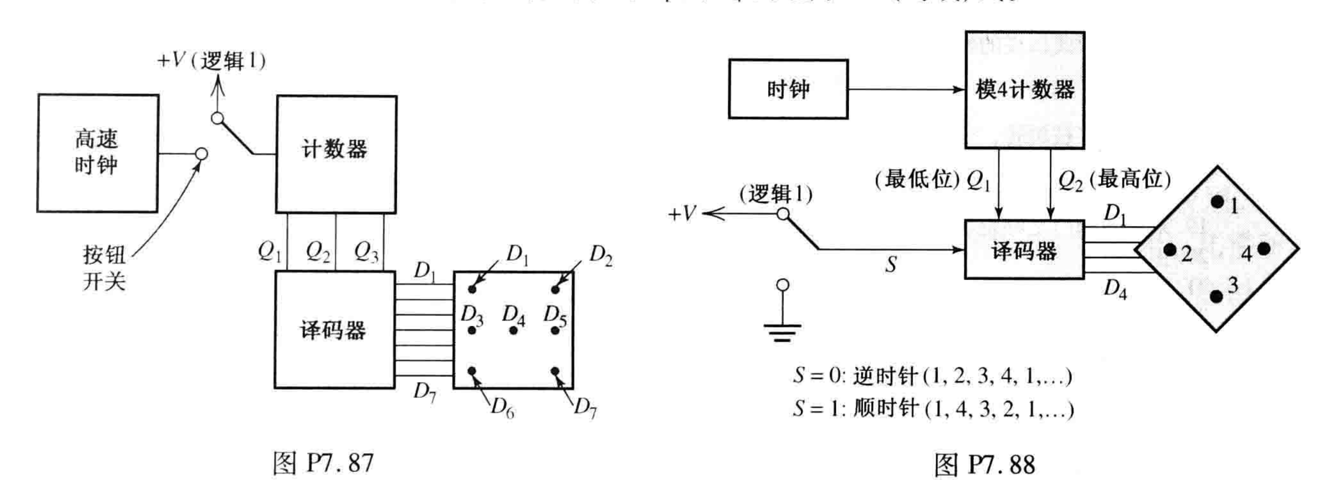


图 P7.87

图 P7.88

测试题

以下是一组测试题，以此检测自己是否掌握了本章的重要概念。测试题的答案在附录 E 中，详解则在在线学生资源的文档中。附录 F 说明了学生资源的详细信息。

T7.1 采用一种甚至多种方法来完善表 T7.1(a)的描述；从表 T7.1(b)的选项清单中选择最合适的内容。[表 T7.1(b)的内容可以使用多次，也可以不用。]

表 T7.1

内容(a)	最好的匹配项
a. 一个逻辑表达式的真值表包括……	
b. 摩根定理认为……	
c. 如果更高的电压值表示逻辑 1，较低的电压表示逻辑 0，则……	
d. 对于格雷码……	
e. 如果把一个二进制数的每一位均取非，再加 1，则……	
f. 将两个负的补码相加，结果的最左位值为零，则……	
g. 一个卡诺图的顶部和底部方格被认为是……	
h. 如果将上升沿触发的 *D* 触发器的输出 $\overline{Q}$ 接至 *D* 输入端，在每次时钟的上升沿，触发器状态为……	
i. 只要噪声的幅值不大，则噪声可以从……中完全抹去	
j. 寄存器的组成是……	
k. 一个与或式逻辑电路的组成是……	
l. 对十进制数，从小数点开始分别对整数和小数按 4 位 BCD 码为一组，将各组转换为十六进制数	

续表

(b)
1. 十进制等效
2. 过去录音的方式
3. 非逻辑
4. 等边的或者全等的
5. 或门
6. 几个与门和一个或门
7. 数字信号
8. 几个非门、与门和一个或门
9. 非或者反
10. 触发器
11. 上溢
12. 一张表格，涵盖所有输入变量的组合及其对应的输出
13. 含有0和1的一张表格
14. 以数字形式出现的码字
15. 模拟信号
16. 邻近的
17. 每个码字被旋转，形成下一个字
18. 如果与运算改变为或运算，反之也成立，并对结果求反，则结论等于原来的表达式
19. 采用与非门足够表达任意的逻辑表达式
20. 正逻辑
21. 补码
22. 负逻辑
23. 相邻的字，有一位代码不同
24. 下溢
25. 翻转

T7.2 把一个十进制数 353.875_{10} 转换为以下几种形式：(a)二进制；(b)八进制；(c)十六进制；(d)BCD(二-十进制)。

T7.3 对以下两项有符号的补码获得其等效的十进制数。
(a)01100001； (b)10111010。

T7.4 如图7.4所示的逻辑电路，要求：(a)根据输入 ABC 写出 D 的逻辑表达式；(b)画出真值表和卡诺图；(c)计算 D 的最简与或式；(d)获得 D 的最简或与式。

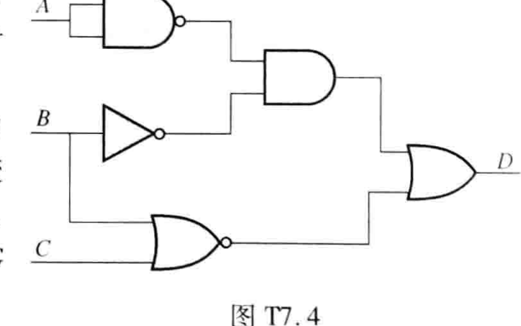


图 T7.4

T7.5 对输出函数 G 搭建逻辑电路，条件是：仅当输入的十六进制数为1、5、B 和 F 时，G 输出为1。设输入变量 B_8、B_4、B_2、B_1 表示十六进制数的位(最高位是 B_8，最低位是 B_1)。要求：(a)对图 T7.5 填空；(b)获得 G 的最简与或式；(c)求解 G 的最简或与式。

T7.6 一个移位寄存器如图 T7.6 所示。如果寄存器的初始状态是100(即 $Q_0=1, Q_1=0, Q_3=0$)，请画出后续的6种状态。问：经过多少次移位之后，寄存器回到初始状态？

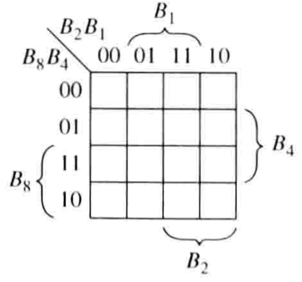


图 T7.5 需填空的函数 G 的卡诺图

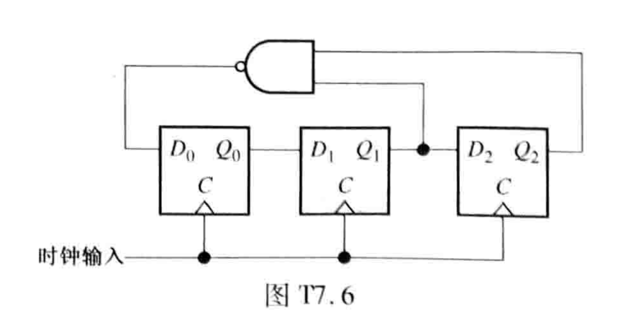


图 T7.6

第8章　微型计算机

本章学习目标

- 识别且描述微型计算机各个模块的功能
- 能够为给定的应用程序选择内存
- 了解微机或微控制器在不同专业领域的应用
- 能够识别68HC11/12和CPU12微控制器的内部寄存器及其功能
- 能够列出68HC11/12和CPU12微控制器的指令及其寻址模式
- 能够使用68HC11指令集编写简单的程序

本章介绍

你必定熟悉多功能电子计算机，它们广泛用于商务、工程设计、文字处理和其他应用，在汽车、家电、照相机、传真机、车库开门器以及仪器仪表中都能发现专用微机。事实上，几乎所有最近生产的设备都包含一个嵌入式计算机。嵌入式计算机只是某个产品的一部分，比如说是汽车、打印机或者面包机的一部分，它不能称为计算机。

具有控制功能的相对简单的计算机完全可以用一个价值几美元的单晶硅芯片实现。这种计算机有时也称为微控制器(MCU)或者单片机，在洗衣机或烤箱的控制问题方面非常有用。

本章概述了微机的结构以及指令集。虽然许多概念也适用于一般用途的计算机，然而本章仅专注微机和微控制器，为各种嵌入式仪器仪表及其控制问题提供更经济的解决方案。

广泛使用的微处理器有数百个种类，但是基本概念都是类似的。我们以飞思卡尔半导体公司(曾经是摩托罗拉公司的一部分)的68HC11微控制器为例来阐述微机的基本知识和功能。

本章讲述的经典68HC11微控制器是直接适用于更强大的(和更复杂的)飞思卡尔半导体CPU12微控制器系列产品。

计算机的容量迅速提高且成本大幅下降，这一趋势在未来也将持续。在过去的几十年，对于一个特定容量的计算机，价格每18个月就会减半，因此可以把计算机看成是一种功能强大但价格低廉的资源，适用于解决各工程领域中的几乎所有控制或仪器仪表问题，而不管是多么复杂或简单的问题。

8.1　计算机结构

图8.1为一台计算机或微机的体系层次图。中央处理器(CPU)由算术逻辑单元(ALU)和控制单元组成。[如果将CPU、存储器和输入/输出(I/O)设备集成在一个集成电路上，那么这个芯片就叫作微机。]

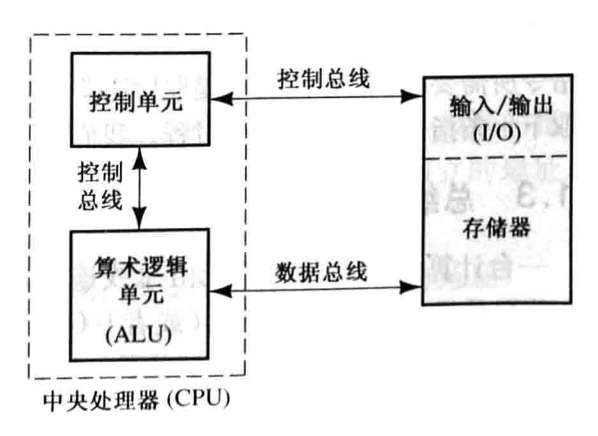


图8.1　一台计算机由中央处理器、内存和输入/输出设备组成

ALU主要是实行数据的算术逻辑运算，例如加法、减法、比较或者乘法。从根本上说，ALU是一种逻辑电路，与第7章讨论的电路相似(但要复杂得多)。

控制单元负责监控计算机的运算，例如从存储器中检索下一条指令的位置，并驱使 ALU 对数据进行运算。ALU 和控制单元含有各种寄存器，以控制操作数、结果和控制信号。(回忆 7.6 节，寄存器是由大量触发器构成的，可以存储二进制数组成的字。)接下来将讨论各种 CPU 寄存器的功能。

8.1.1 存储器

存储器可以看成是存储数据和指令的地址序列。每个存储单元都有唯一的地址，通常存储一个字节的数据，数据方便地用两个十六进制数表示。(当然，在计算机电路中，数据以二进制形式存在。)

通常，我们用 KB 来表示存储容量，1 K = 2^{10} = 1024。类似地，1 MB 就是 2^{20} = 1 048 576 字节。图 8.2 展示了一个 64 KB 的存储器。在控制单元的指导下，信息可以被写入或从每个存储单元读取。(这里假设有读/写类型的存储器。随后，我们可以看到另外一种类型的存储器，称为只读存储器，也是非常有用的。)

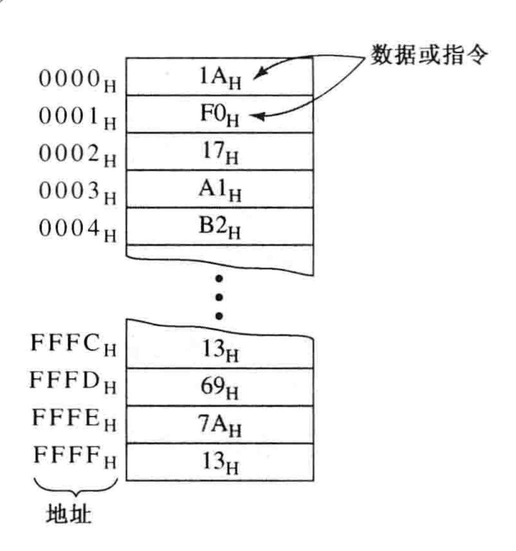


图 8.2 一个 64 KB 的存储器有 2^{16} = 65 536 个存储单元，每个存储单元含有一个字节(8位)的数据，每个单元有一个16位的地址。图中用十六进制来表示地址和数据是非常方便的，地址范围可以从0000_H表示到$FFFF_H$，例如内存单元0004_H含有$B2_H$ = 10110010_2这个字节

8.1.2 程序

程序是存储在存储器中的指令序列。通常情况下，控制器读取(即检索)指令，确定哪些运算是指令所需要的，从存储器中提取所需要的数据让 ALU 执行运算，并将结果写入存储器中。然后，读取下一条指令，并重复这个过程。我们将会看到，微机可以执行的指令类型丰富多样。

8.1.3 总线

一台计算机中的各种单元由总线连接。总线是一个导线束，一次可以传输多位数据。例如，数据总线在 CPU 和存储器(或者 I/O 设备)之间传送数据(和指令)。在小型计算机中，数据总线的宽度(即一次能够传送的位数)通常是 8 位。一个字节可以同时在 CPU 和存储器(或者 I/O 设备)之间进行传送。(在更强大的多功能 CPU 中总线更宽，例如个人计算机的数据总线通常有 64 位。)

几个控制总线用于指导计算机的操作。例如，一个控制总线将地址发送到存储单元(或者 I/O 设备)中，而且指导数据被读取或者写入。一个 16 位宽度的地址总线能够调用 $2^{16}=64$ K 的存储单元(和 I/O 设备)。另一个控制总线到 CPU 内部将信号从控制单元传送到 ALU，这些控制信号指导 ALU 执行特定的操作，如加法运算。

总线是双向作用的，换言之，它们可以在任何一个方向传送数据。数据总线连接着 CPU 和存储器，但是存储器和 CPU 不能同时向总线发出冲突的数据信号请求。冲突是可以避免的，通过将数据传送到总线上的三态缓冲器来实现，如图 8.3 所示。根据控制信号的作用，三态缓冲器的功能就是一个开启或关闭的开关。当需要将一个字节的数据从 CPU 传送到存储器中时，三态缓冲器使得微处理器工作(开关关闭)，并且使存储器禁用(开关打开)。在任何时候，CPU 和存储器的输入数据都连接着总线，所以在总线上可以获得所需的数据。因此，微处理器中的数据出现在总线上，并可以通过存储器存储。当数据需要从存储器传送到 CPU 中时，三态缓冲器的工作条件就是相反的。

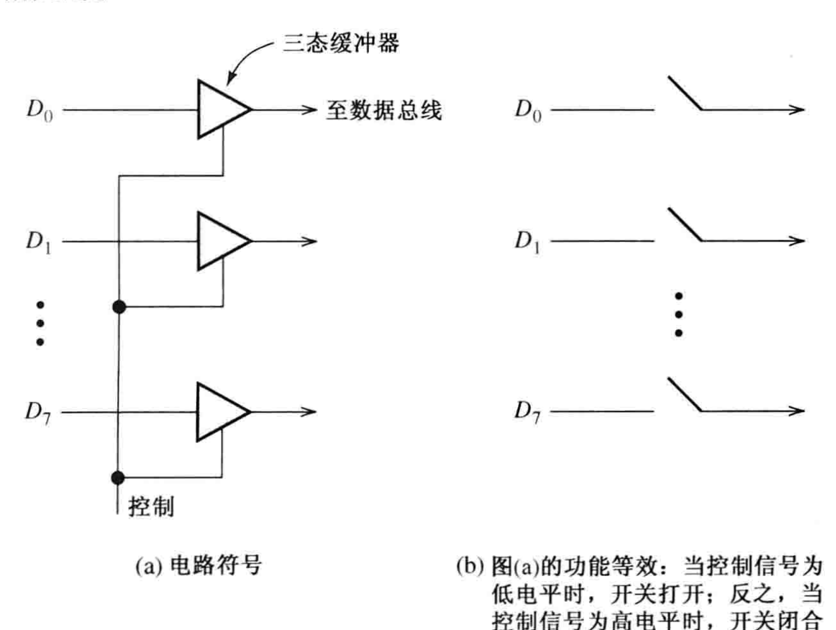


图 8.3　数据通过三态缓冲器传送到数据总线上，三态缓冲器的作用就是一个开启或关闭的开关

8.1.4　输入/输出设备

键盘、显示器和打印机都是 I/O 设备。在控制应用程序中，传感器是一种很重要的输入设备，将温度、压力、位移、流量以及其他物理参数转换为数字信号，以便于计算机读取。阀门、电机、开关等执行器是输出设备，它们使计算机控制系统运行。

有些计算机拥有内存映射 I/O，这些 I/O 设备和内存位置分配有相同的总线。相同的指令用来从内存中存储和读取数据，同样也可用于 I/O，其他计算机的 I/O 都有一个独立的地址总线和指令。本书主要讨论使用内存映射 I/O 的系统。

练习题 8.1　设一个微处理器有一个 20 位的地址总线，问它可以访问多少内存地址？

答案： $2^{20}=1\ 048\ 576=1024$ K $=1$ M。

练习题 8.2　一个 64 KB 的存储器能够存储多少位？

答案： 524 288 位。

8.2 存储器类型

计算机中应用的存储器有以下几种类型:(1)随机读写存储器(RAM);(2)只读存储器(ROM);(3)海量存储器。我们依次讨论每种类型,然后再针对各种应用选择合适的存储器。

8.2.1 RAM

随机读写存储器(RAM)用于在执行程序时存储数据、指令和结果。半导体RAM包含一个或者更多的硅集成电路(每个电路有很多存储单元)和控制逻辑,使信息可以进入或者离开特定的地址单元。

通常情况下,当没有电源时,存储在RAM中的信息会丢失。因此,RAM是不可靠的。本来RAM的缩写表示随机存取存储,但随着时间的推移这个词已经改变了意义,现在RAM的意思就是不稳定半导体存储器。(事实上,在停电情况下,RAM仍然得到小型电池的供电而得以保存信息。)

所有存储单元访问RAM中数据的时间都一样,最快的RAM的访问时间是几纳秒,以随机顺序方式访问地址是没有时间处罚的。

常用的RAM有两种类型。静态RAM的存储单元是*SR*触发器,只要保持电源供电,便能无限期地存储数据。动态RAM中的信息以电容有电荷(或无电荷)形式存储在每个单元中。由于电容会漏电,所以有必要定期刷新信息,这使得动态RAM比静态RAM的使用更复杂。动态RAM的优点是基本存储单元更小,所以芯片的容量更大。大多数控制应用仅需要相对少量的RAM,因此使用静态RAM更简单。

图8.4是一个8 K字(word)的8位静态RAM芯片。该芯片有13根地址线、8根数据线和3根控制线。控制输入线的“圆圈”表明低电平有效。除非芯片选择的线是低电平,否则芯片无法存储数据,也不能将数据放置到数据总线。如果输出使能和芯片选择都是低电平,那么存储在地址中特定存储单元上的数据将会出现在地址总线上。如果写使能和芯片选择线均是低电平,那么出现在数据总线上的数据将会被存储在地址信号的指定存储单元中。

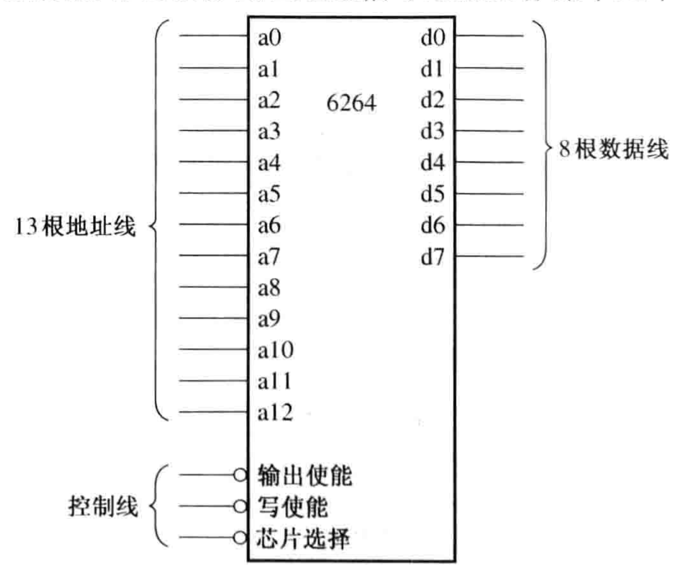


图8.4 6264静态RAM芯片

8.2.2 ROM

在正常运行的情况下，只读存储器(ROM)只能读取数据，而不能写入数据。ROM 的主要优点是可以按照随机顺序快速读取数据，并且当电源关闭时信息不会丢失，因此我们说 ROM 是非易失性的(即永久的)。ROM 主要用于存储程序，比如说计算机通电时自动执行的启动程序。一般简单的专用应用程序，如洗衣机的控制器，都是存储在 ROM 中的。

ROM 有几种类型。例如，掩模可编程 ROM，生产厂家在制造芯片时就将数据写入存储器了。在生产这种类型的 ROM 时，其较大的成本主要用于写数据的掩码。然而，当掩码的成本分摊到大量单元时，掩模可编程 ROM 却是最便宜的 ROM。如果在开发初始系统时需要频繁改变存储信息，那么掩模可编程 ROM 并不是一个好的选择。

对于可编程只读存储器(PROM)，用一个特殊的电路可以实现数据的写入，即通过数据位是 0 还是 1 来熔断或者不熔断小保险丝。因此，PROM 可以一次性写入数据，并根据需要读取多次。如果需要少量的单元，PROM 是一个比较经济的选择。

可擦除 PROM(EPROM)是另外一种永久的 ROM，通过紫外线照射(通过芯片封装上的窗口)擦除数据，并采用特殊电路改写。对芯片加以适当的电压，可擦除电可擦除 PROM (EEPROM)的信息。虽然可以将数据写入 EEPROM，但这个过程比 RAM 要慢得多。

闪存存储器是一种相对较新的非易失性存储技术，能够非常快地擦除或写入数据，数据范围从 512 B 到 512 KB。闪存的使用寿命有限，通常大约在 1 万到 10 万次读/写周期。闪存是一个迅速发展的技术，可能很快取代通用计算机中用于海量存储的硬盘设备。

8.2.3 海量存储器

海量存储单元包括硬盘、软盘和数字磁带，这些都是读/写存储器。另外一种类型是 CD-ROM 光盘，主要用来存储大量数据，如字典、百科全书和图片。海量存储器的单位容量是存储器类型中最便宜的。所有种类的海量存储器初始访问一个特定的单元都需要相对较长的时间。与 RAM 或者 ROM 的微秒分数相比，海量存储器的初始访问时间要几毫秒。然而，如果顺序访问海量存储单元，则传输率相当高(但仍比 RAM 或 ROM 慢)。通常情况下，在程序的执行过程中，以随机形式访问数据和指令需要更快的速度。因此，在执行时程序是存储在 RAM 或 ROM 中的。

8.2.4 存储器的选择

在选择存储器类型时需要考虑的因素有以下几点：

1. 速度与成本之间的权衡。
2. 信息是否需要永久保存，或是否必须频繁改变。
3. 数据的访问方式是随机访问还是顺序访问。

在执行前，通用计算机的程序和数据从海量存储器(如硬盘)读入内存中。因需要很多不同的程序，所以将这些程序全部存储在半导体 ROM 上不太实际，因为这样会需要大量的存储空间而导致成本昂贵。此外，相比于硬盘，要修改存储在 ROM 中的信息是比较困难的。通用计算机只有少量的 ROM 用于计算机的启动或者执行根程序，大多数存储器都是 RAM 和海量存储器。

另一方面，嵌入式微控制器的程序通常存储在 ROM 中，只有少量的 RAM 存储临时结果。

例如，一个电视机遥控器控制电视的程序就存储在 ROM 中，但由用户输入的时间和频道的信息则存储在 RAM 中。这样，即使关闭了电视机，RAM 仍然有电供应。不过，由于电视机停电，存储在 RAM 中的数据将丢失(除非该电视有备用电池)。通常，嵌入式计算机中无须海量存储器。

8.3 数字过程控制

图 8.5 是一个微机控制方案的大体方块图，主要是控制化工厂或者内燃机的工作过程。各种物理输入信号，如电能和物料流等均由微机依次控制的执行器来调整。

有些执行器是模拟电路，有些是数字电路。数字执行器的例子如开关或者阀门开关，主要是根据控制信号的逻辑值来驱动的。数字执行器可以直接由微机控制。模拟执行器需要模拟信号输入。例如，飞机的方向舵可以由与其角度呈正比的模拟输入信号控制而转向。由于微机输出的是数字信号，所以需要一个数模(D/A)转换器来实现数字信号向模拟信号的转换，这样才能控制模拟执行器。

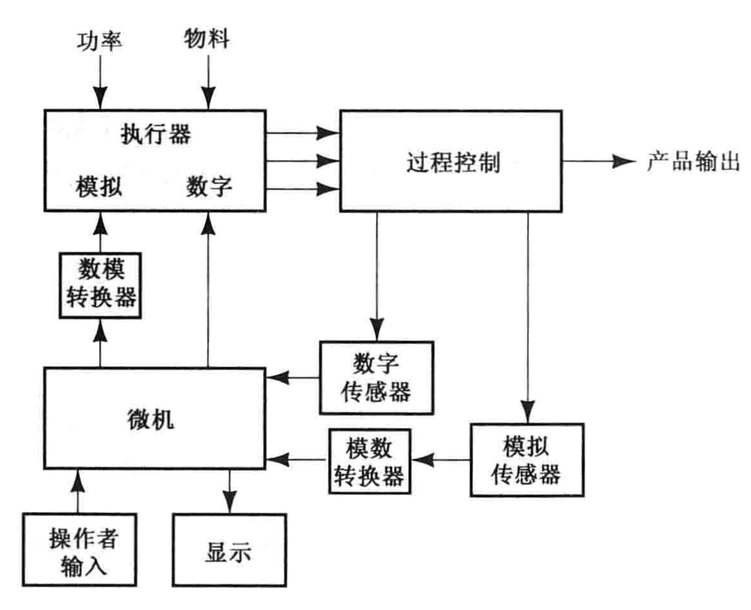


图 8.5 基于微机控制的物理过程

在控制过程中，各种传感器产生的电信号与工艺参数(如温度、压力、PH 值、速度或位移)相关。有些传感器是数字的，有些是模拟的。例如，一个压力传感器可能含有一个开关，当压力超过某个特定值时，开关关闭，并产生一个高电平输出信号。另一方面，模拟压力传感器则产生一个与压力成正比的输出电压。由于微机的输入必须是数字的，所以必须用一个模拟数字(A/D)转换器将模拟信号转变为数字形式。

通常情况下，需要一个显示器展示进程信息，便于操作者观察，也需要键盘或者其他输入设备，这样操作者才能直接操作控制过程。

实际应用 8.1 人人都能做新鲜面包

这里举一个相当简单的微机控制的例子：面包机的控制器。也许你已经有操作这种流行设备的经验。按照大厨的方法，将配料(面粉、水、奶粉、糖、盐、酵母和黄油)放在面包锅中，然后通过按键从菜单中选择，大约 4 个小时后就完成了新鲜面包的制作。

图 PA8.1 是一个面包机的电路原理图。在面包机中有 3 个数字执行器：一个控制加热元

件，一个控制混合和揉合电机，第三个则控制风扇，冷却烘烤后的面包。在这个应用中没必要采用模拟执行器。

模拟传感器用于测量温度。传感器的输出通过 A/D 转换器转换为数字信号，才能被微机读取。

我们需要一个计时器来设定完成面包制作的时间。计时器是一个倒计时的数字电路，类似于 7.6 节讨论的计数器。计时器显示在面包制作过程中剩余的小时和分钟数，微机通过剩余时间来做决定，剩余时间显示也为厨师们带来了极大的方便。

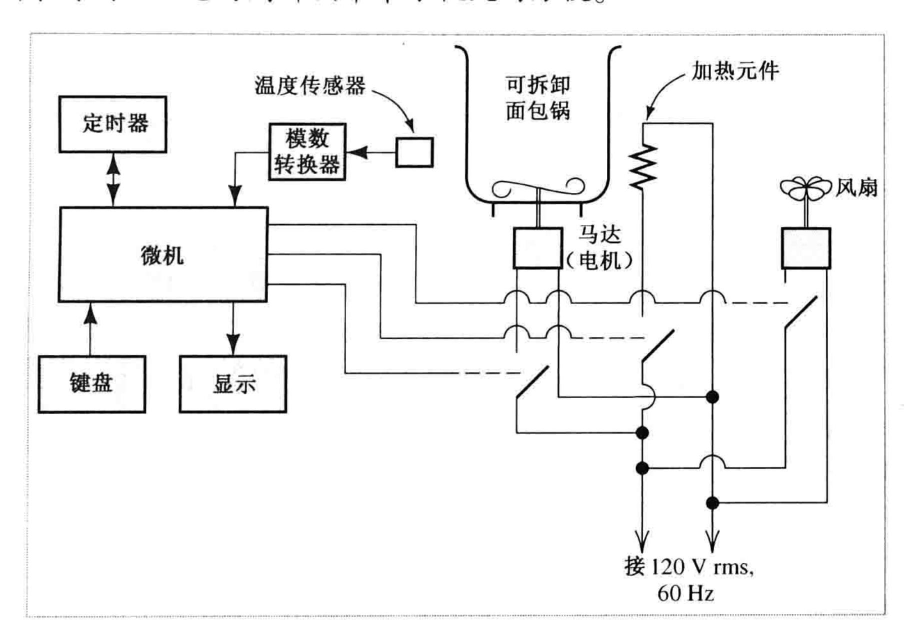


图 PA8.1　一个与微机控制器相关的简单应用——面包机

控制程序存储在 ROM 中，由厨师输入的参数则写入到 RAM 中(例如，面包皮是浅色，中等深度，还是深色?)。微机不断地检查剩余时间以及温度。计算机执行存储在 ROM 中的程序，确定面包机混合配料的时间，何时打开加热元件加热面团使其膨胀，然后揉合面团，再烘烤，再冷却。各阶段加工时间的长短和温度都取决于厨师的初始设定。

首先，面包机将配料混合几分钟，然后打开加热元件加热酵母，使面团膨胀。虽然面团膨胀了，不过仍然需要一个较高的温度，比如说 90℉。因此加热元件又开启，微处理器频繁地读取温度。当温度达到所需温度值时，加热元件便关闭。如果温度降得太低，加热元件将再启动。

微机持续检查剩余的时间和温度，根据存储在 ROM 中的程序和厨师输入的参数(保存在 RAM 中)决定电机和加热元件工作还是停止。

在这个应用中，大约需要 100 B 的 RAM 来存储由操作者输入的信息和临时数据，此外，还需要 16 KB 的 ROM 来存储程序。与该设备的总价格相比，此小容量 ROM 的成本非常低，因此，在 ROM 中可以存储很多程序，使面包机应用起来非常灵活。除了制作面包，还可以烤蛋糕、煮米饭、做果酱或者制作用于其他目的的面团，如肉桂卷。

图 8.5 所示的系统可能有很多种变化。例如，有时我们只需要检测过程并给操作者呈递信息。汽车仪表就是这种情况，它的传感器可提供速度、燃料储备量、机油压力、发动机温度、电池电压等信息，这些数据由一个或者多个显示器展示给驾驶员。

实际上，几乎所有系统都可以被微机控制或者监控。以下是一个简短的清单：交通信号、发动机、化工厂、防滑刹车、加工过程、结构压力测量、机床、航空仪表、心电监护仪、核反应堆以及实验室实验等。

8.3.1 中断与轮询

在很多控制应用中，微机必须很快地应对某些输入信号。例如，核电厂的超压迹象需要及时关注。当这样的事件发生时，微机必须马上中断正在做的事情，启动中断处理程序以确定中断源，并采取适当的行动。许多微型处理器就有处理这些中断的硬件容量与指令。

微机管理员可以通过轮询方式来替代中断，以确定系统的某些部分是否需要注意。处理器检查每一个传感器，并根据需要采取适当的措施。然而，持续轮询是非常浪费处理器时间的。在复杂的应用程序中，处理器大部分时间可能需要执行广泛但低优先级的活动。在这种情况下，中断比轮询提供更快的响应速度。对于一个面包机，采用轮询方式更合理，因为与微处理器相关的任何动作都没有超过几毫秒。此外，任何一次行动可以被推迟几十毫秒，却不会引起麻烦。

8.4 68HC11 微控制器

此前，我们讨论了图 8.1 所示的通用微机，本节将对摩托罗拉 68HC11 微控制器进行更加详细的说明。该微控制器首次出现在 1985 年。这里讨论的概念也适合于 1997 年产的 68HC12，它是 68HC11 的一个增强版，概念也同样适合于飞思卡尔的 CPU12。由于篇幅有限，不允许我们讨论这些微控制器的所有特点、指令和编程技术。但是，我们将讲述编程模型、指令选择和一些简单的程序，以便于更好地了解微控制器在专业领域的嵌入式应用。

图 8.6 所示是 68HC11 的一个版本 68HC11A8 的模块结构图，它含有 8 KB 的 ROM，512 B 的 EEPROM，256 B 的 RAM，一个 8 位 8 通道 A/D(模数)转换器，38 条并行 I/O 线，一个 16 位定时器，以及其他特征。自 1985 年以来，摩托罗拉已经推出了 68HC11 的其他版本，主要区别是含有的存储器类型和数量不同。除了一些微小的差别，各种版本都执行同样的指令集。图 8.7 展示了 68HC11A8 的包装方式和引脚分配。

8.4.1 68HC11 的编程模型

68HC11 的 ALU 和控制单元含有各种寄存器，用于保存操作数、下一条执行指令的地址、数据地址和结果。例如，基于 68HC11 的程序寄存器如图 8.8 所示(其实，68HC11 包含许多其他的寄存器——图中只展示了与程序相关的寄存器，因此图 8.8 为 68HC11 的编程模型)。

累加器是一种通用的寄存器，用于保存某个参数以及所有算术和逻辑运算的结果。寄存器 A 和 B 分别包含右侧最低有效位(图 8.8 的 0 位)和左侧最高有效位的 8 位。有时 A 和 B 作为独立寄存器，其他时间则结合为一个 16 位的寄存器，用寄存器 D 表示。切记，寄存器 D 并非独立于寄存器 A 和 B。

程序计数器(PC)是一个 16 位的寄存器，含有控制单元，可以从存储器中读取下一条指令的第一个字节的地址。PC 的大小与存储器地址的大小是相同的。因此，存储器可能包含 2^{16} = 64 K 个位置，每个位置含有图 8.2 显示的一个字节的数据或者指令。

索引寄存器 X 和 Y 主要用于寻址(对于数据)，称为索引寻址。我们将会在后面讨论。

条件代码寄存器是一个 8 位的寄存器，每位要根据处理器或之前的逻辑或算术运算的结果而定。图 8.8 描述了一个条件代码寄存器的结构。例如，如果在算术运算之前进位(或借位)，则进位 C(条件代码寄存器的 0 位)被置位(逻辑 1)。如果上述操作的结果是上溢或者下溢，那么第 1 位(上溢或者 V)将被置 1。如果之前的操作结果是零，那么第 2 位(零或者 Z)将被置 1。如果结果是负值，那么第 3 位(负或者 N)将被置 1。根据需求的增加，我们以后再讨论剩余位的意义和使用方法。

MODA/LIR　MODB/V_{STBY}　XTAL　EXTAL　E　IRQ/　XIRQ　RESET

模式控制　振荡器　时钟逻辑　中断逻辑　8 K ROM　V_{DD}　V_{SS}

COP　周期性中断　CPU　512字节EEPROM　256 字节 RAM　V_{RH}　V_{RL}

脉冲累加器　定时器系统　总线扩展地址　地址/数据　R/W　AS　SPI　SCI　A/D 转换器

选通和握手并行I/O　SS　SCK　MOSI　MISO　TxD　RxD

端口A　端口B　控制　端口C　控制　端口D　端口E

PA7/PA1/OC1　PA6/OC2/OC1　PA5/OC3/OC1　PA4/OC4/OC1　PA3/OC5/OC1　PA2/IC1　PA1/IC2　PA0/IC3

PB7　PB6　PB5　PB4　PB3　PB2　PB1　PB0　PC7　PC6　PC5　PC4　PC3　PC2　PC1　PC0　STRB　STRA

单芯片模式

PD5/SS　PD4/SCK　PD3/MOSI　PD2/MISO　PD1/TxD　PD0/RxD

PE7/AN7　PE6/AN6　PE5/AN5　PE4/AN4　PE3/AN3　PE2/AN2　PE1/AN1　PE0/AN0

A15　A14　A13　A12　A11　A10　A9　A8　A7/D7　A6/D6　A5/D5　A4/D4　A3/D3　A2/D2　A1/D1　A0/D0　R/W　AS

扩展模式

点线框内的电路等同于MC68HC24

图 8.6　MC68HC11A8 微控制器的方块图

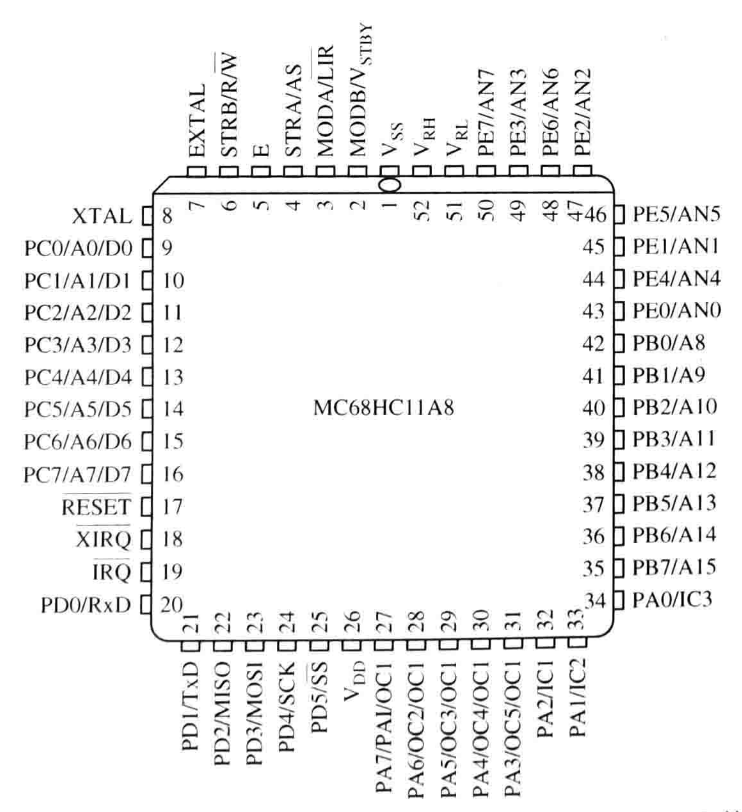


图 8.7　带引线的塑料芯片载体(PLCC)封装的 52 引脚 MC68HC11A8 的引脚分配

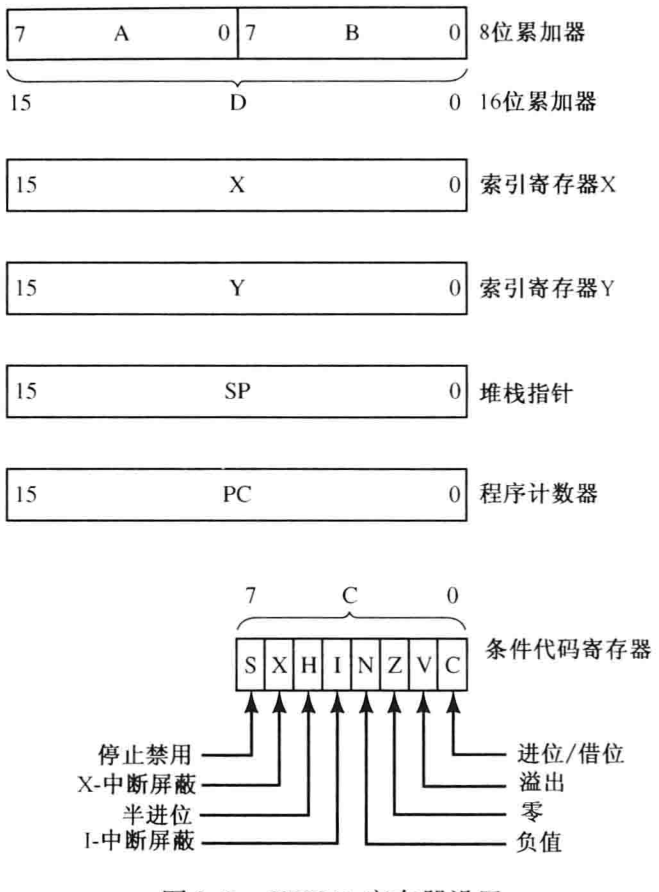


图 8.8 68HC11 寄存器设置

8.4.2 堆栈和堆栈寄存器

堆栈是存储器中一种用于存储信息的位置的序列，如存储当子程序正在执行或者发生中断时程序计数器和其他寄存器中的内容(我们将简短地讨论子程序)。顾名思义，信息加到(或推入)堆栈的顶部，当要被写入时再按照相反的顺序读出(或拖出)信息。这与清洗餐盘类似，在清理餐桌时将盘子逐个叠放至最高；当要将盘子放入洗碗机时，则需要从堆栈的顶部依次拿下。数据从堆栈中被取出后，不再存在于存储器中，然后根据后续的推动命令写入数据。入栈的第一字最后拉出，所以堆栈被称为后进先出(LIFO)存储器。

堆栈指针这个寄存器保存了堆栈的栈顶位置。每当寄存器的内容被推入到堆栈时，如果寄存器包含一个字节，堆栈指针值便减 1。如果寄存器包含两个字节，堆栈指针值便减 2(越往堆栈的顶部走，地址的值越小)。相反，当数据从堆栈中拉出并转移到寄存器时，堆栈指针的内容便加 1 或者加 2(视寄存器的长度而定)。

当一个 8 位寄存器(A 或者 B)的内容被推入堆栈中(通过 PSHA 或者 PSHB 命令)时，下面这些操作将发生变化：

1. 8 位寄存器的内容将被存储在与其相对应的堆栈指针内容的地址中。
2. 堆栈指针的内容减 1。

当一个 16 位寄存器 X 或者 Y 的内容被推入到堆栈中(通过 PSHX 或者 PSHY 命令)时，下面这些操作将发生变化：

1. 该 16 位寄存器内容中的最低有效字节(8 ~ 15 位)存储在与堆栈指针内容相对应的地址

中。该 16 位寄存器内容中的最高有效字节将被存储在与其堆栈指针内容减 1 相对应的地址中。

2. 堆栈指针的内容将减 2。

从堆栈中拉出数据，操作是相反的。对于一个 8 位寄存器(通过 PULA 或者 PULB 命令)：

1. 堆栈指针的内容将加 1。
2. 堆栈指针指向的存储器位置的数据将存储到寄存器中。

对于一个 16 位寄存器(通过 PULX 或者 PULY 命令)：

1. 堆栈指针的内容将加 2。
2. 堆栈指针指向的存储器位置的数据存储到寄存器中，存储器中下一个较小地址的数据被写入到最高有效字节的寄存器中。

图 8.9 是执行指令序列(PSHA，PSHB，PULX)后寄存器和存储器的内容。图 8.9(a)是相关寄存器和存储单元的原始内容。(通常，存储单元内总有信息而不是空白。但是，若存储单元的内容是未知的或者无关紧要，我们就让存储单元置为空白)。图 8.9(b)是执行命令 PSHA 后的新内容。请注意，寄存器 A 的初始内容已经存储在 090A 的单元，并且指针 SP 值已经减 1(此外，A 和 B 的初始内容是不变的)。图 8.9(c)是执行命令 PSHB 后的内容。请注意，寄存器 B 的内容已经被存储在 0909 的存储单元，并且 SP 值减 1。最后，图 8.9(d)是执行命令 PULX 后的新内容。需要注意的是，存储单元 0909 的内容已经存储在寄存器 X 的第一个字节，并且存储单元 090A 的内容存储在寄存器 X 的第二个字节。当然，SP 值加 2。

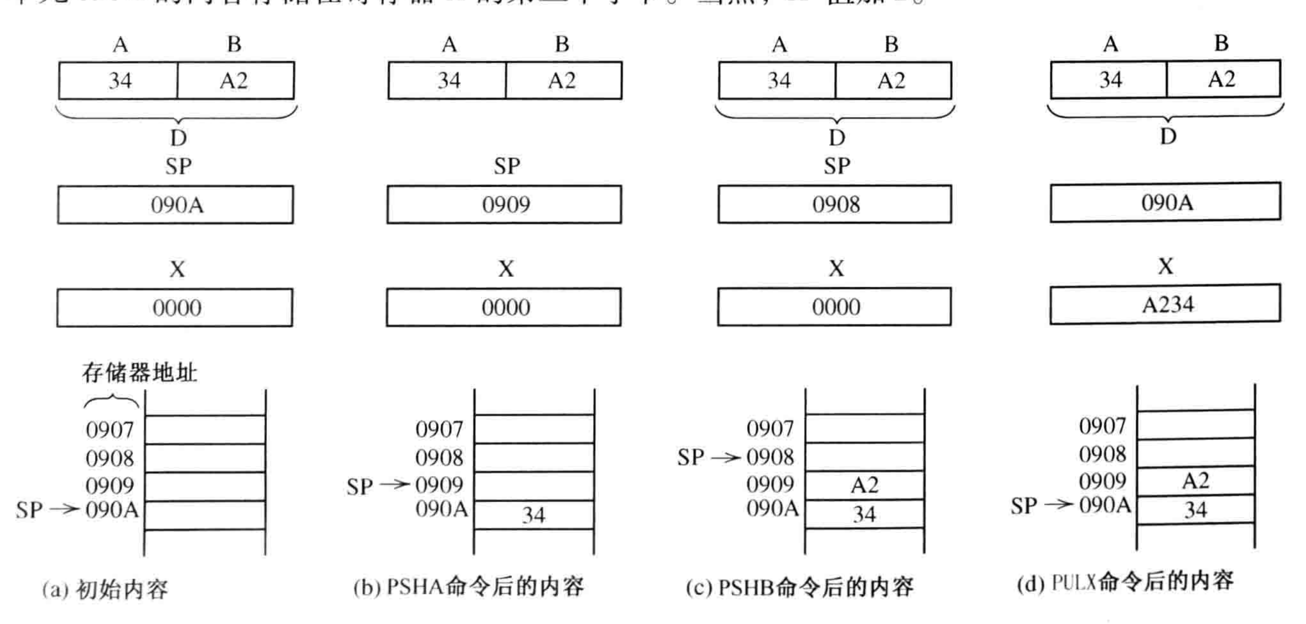


图 8.9　执行指令序列(PSHA，PSHB，PULX)后寄存器和存储器的内容

练习 8.3　设指针的初始内容如图 8.9(a)所示，请问在执行指令序列 PSHB、PSHA、PULX 后，寄存器 X 中的内容是什么？

答案：寄存器 X 中的内容是 34A2。

练习 8.4　设指针的初始内容如图 8.9(a)所示，请问在执行指令序列 PSHX、PSHA、PULX 后，寄存器 X 中的内容是什么？

答案：寄存器 X 中的内容是 3400。

练习8.5 假设堆栈中所有存储单元的初始内容是00，且堆栈指针寄存器包含0805。然后，按照以下顺序操作：

1. 数据$A7_H$被推到堆栈中；
2. 78_H被推到堆栈中；
3. 从堆栈中拉出一个字节；
4. FF被推到堆栈中。

试列出在每步操作后，0800～0805之间存储单元的内容，同时给出堆栈指针(SP)中的内容。

答案：第一步操作后：

```
0800: 00    SP: 0804
0801: 00
0802: 00
0803: 00
0804: 00
0805: A7
```

第二步操作后：

```
0800: 00    SP: 0803
0801: 00
0802: 00
0803: 00
0804: 78
0805: A7
```

第三步操作后：

```
0800: 00    SP: 0804
0801: 00
0802: 00
0803: 00
0804: 78
0805: A7
```

第四步操作后：

```
0800: 00    SP: 0803
0801: 00
0802: 00
0803: 00
0804: FF    (新数据替换老数据)
0805: A7
```

8.5 68HC11的指令集和寻址模式

计算机擅长执行简单的指令，如在给定寄存器内容中迅速准确地添加一个数字到给定存储单元中。在执行程序或软件的指令序列时，计算机具有高精度计算和高智能的能力。这些程序都是由程序员编写的。

然而，在程序中即使出现一个很微小的疏忽都会导致程序无法执行，直到错误被纠正。在设计一个微机控制器时，大部分时间都是在编写软件。为了更有效率，程序员必须对微处理器使用的指令集了如指掌。在本节以及下一节只做一个简单的概述，因为并不要求大家成为专业的程序员。

一般来说，不同类型微处理器的指令集是类似的，但细节不同。一旦掌握了给定计算机的编程，就能很容易学习和很好地使用任何处理器的指令集。这里，我们以摩托罗拉 68HC11 微处理器为例，在网上很容易发现更多相关的内容。

8.5.1　68HC11 指令

表 8.1 列出了从 68HC11 选出的部分指令。表中第一列给出了每条指令的助记符，第二列是指令的简要说明，第三列是指令的等价布尔表达式。例如，ABA 指令的意思是将寄存器 B 中的内容添加到寄存器 A 中，然后将结果存储在 A 中。我们将这个操作表示如下：

$$A + B \rightarrow A$$

如表中第三列所示。

助记符是大家很容易记住的。但是，在微机的存储器中，指令是以一个或多个 8 位操作代码(操作码)的形式存储的。表中的每个代码表示两位十六进制数,例如，在 ABA 的指令行中，操作码是 1B。因此，ABA 的指令在存储器中的二进制数是 00011011。

由表可见，ADDA(opr)指令中的行代表一个存储单元。该指令的作用是将存储单元的内容添加到累加器 A 中，并将结果保存于累加器 A。用表达式表示如下：

$$A + M \rightarrow A$$

其中，M 表示存储单元的内容。一些指令可以允许使用多种寻址模式进行存储单元访问。例如，ADDA 指令可以采用 5 种不同寻址模式中的任何一种。现在讨论 68HC11 的寻址模式。

表 8.1 还展示了条件代码寄存器的内容中每条指令的作用。条件代码中每个位的符号意义如下：

- \-　表示该指令位是不变的；
- 0　表示该指令位总是被清零；
- 1　表示该指令位总是被置位；
- ↕　表示根据结果，该位被置 1 或清零。

表 8.1　从 68HC11 选出的部分指令

源代码形式	操作	布尔表达式	地址，模式	机器码		字节	循环	条件代码							
				操作码	操作数			S	X	H	I	N	Z	V	C
ABA	Add Accumu lators	A + B→A	INH	IB		1	2	-	-	↕	-	↕	↕	↕	↕
ADDA(opr)	Add Memory to A	A + M→A	A IMM	8B	ii	2	2	-	-	↕	-	↕	↕	↕	↕
			A DIR	9B	dd	2	3								
			A EXT	8B	hh 11	3	4								
			A IND,X	AB	ff	2	4								
			A IND,Y	18 AB	ff	3	5								
ADDB(opr)	Add Memory to B	B + M→B	B IMM	CB	ii	2	2	-	-	↕	-	↕	↕	↕	↕
			B DIR	DB	dd	2	3								
			B EXT	FB	hh 11	3	4								
			B IND,X	EB	ff	2	4								
			B IND,Y	18 EB	ff	3	5								
ADDD(opr)	Add Memory to D	D + M→B	D IMM	C3	jj kk	3	4	-	-	-	-	↕	↕	↕	↕
			D DIR	D3	dd	2	5								
			D EXT	F3	hh 11	3	6								

续表

源代码形式	操　　作	布尔表达式	地址,模式	机器码		字节	循环	条件代码							
				操作码	操作数			S	X	H	I	N	Z	V	C
			D IND,X	E3	ff	2	6								
			D IND,Y	18 E3	ff	3	7								
BCS(rel)	Branch if Carry Set	? C=1	REL	25	rr	2	3	-	-	-	-	-	-	-	-
BCQ(rel)	Branch if = Zero	? Z=1	REL	27	rr	2	3	-	-	-	-	-	-	-	-
BCO(rel)	Branch if Lower[U]	? C=1	REL	25	rr	2	3	-	-	-	-	-	-	-	-
BMI(rel)	Branch if Minus[S]	? N=1	REL	2B	rr	2	3	-	-	-	-	-	-	-	-
BCE(rel)	Branch if Not = Zero	? Z=0	REL	26	rr	2	3	-	-	-	-	-	-	-	-
BCL(rel)	Branch if Plus[S]	? N=0	REL	2A	rr	2	3	-	-	-	-	-	-	-	-
BRA(rel)	Branch Always	? 1=1	REL	20	rr	2	3	-	-	-	-	-	-	-	-
CLRA	Clear Accumulator A	00→A	A INH	4F		1	2	-	-	-	-	0	1	0	0
CLRB	Clear Accumulator B	00→B	B INH	5F		1	2	-	-	-	-	0	1	0	0
COMA	Complement A	$FF→A→A	A INH	43		1	2	-	-	-	-	↕	↕	0	1
INCA	Increment Accumulator A	A+1→A	A INH	4C		1	2	-	-	-	-	↕	↕	↕	-
INCB	Increment Accumulator B	B+1→B	B INH	5C		1	2	-	-	-	-	↕	↕	↕	-
INX	Increment Index Register X	X+1→X	X INH	08		1	3	-	-	-	-	-	↕	-	-
JMP(opr)	Jump	Address→PC	EXT	7E	hh 11	3	3	-	-	-	-	-	-	-	-
			IND,X	6E	ff	2	3								
			IND,Y	18 6E	ff	3	4								
JSP(opr)	Jump to Subroutine	See Text	DIR	9D	dd	2	5	-	-	-	-	-	-	-	-
			EXT	8D	hh 11	3	6								
			IND,X	AD	ff	2	6								
			IND,Y	18 AD	ff	3	7								
LDAA(opr)	Load Accumulator A	M→A	A IMM	86	ii	2	2	-	-	-	-	↕	↕	0	-
			A DIR	96	dd	2	3								
			A EXT	B6	hh 11	3	4								
			A IND,X	A6	ff	2	4								
			A IND,Y	18 A6	ff	3	5								
LDAB(opr)	Load Accumulator B	M→B	B IMM	C6	ii	2	2	-	-	-	-	↕	↕	0	-
			B DIR	D6	dd	2	3								
			B EXT	F6	hh 11	3	4								
			B IND,X	E6	ff	2	4								
			B IND,Y	18 A6	ff	3	5								
LDD(opr)	Load Accumulator D	M:(M+1)→0	D IMM	CC	jj kk	3	3	-	-	-	-	↕	↕	0	-
			D DIR	DC	dd	2	4								
			D EXT	FC	hh 11	3	5								
			D IND,X	EC	ff	2	5								
			D IND,Y	18 EC	ff	3	6								
LDX(opr)	Load Index Register X	M(M+1)→X	X IMM	CE	jj kk	3	3	-	-	-	-	↕	↕	0	-
			X DIR	DE	dd	2	4								
			X EXT	FE	hh 11	3	5								
			X IND,X	EE	ff	2	5								
			X IND,Y	CD EE	ff	3	6								

续表

源代码形式	操　作	布尔表达式	地址，模式	机器码		字节	循环	条件代码							
				操作码	操作数			S	X	H	I	N	Z	V	C
LDY(opr)	Load Index Register Y	M:(M+1)→Y	Y IMM	18 CE	jj kk	4	4	-	-	-	-	↕	↕	0	-
			Y DIR	19 DE	dd	3	5								
			Y EXT	18 FE	hh 11	4	6								
			Y IND,X	IA EE	ff	3	6								
			Y IND,Y	18 EE	ff	3	6								
MUL	Multiply A by B[U]	A B→D,D7→C	IND	3D		1	10	-	-	-	-	-	-	-	↕
PSHA	push A onto Stack	A→Stk,Sp-1→SP	A INH	36		1	3	-	-	-	-	-	-	-	-
PSHB	push B onto Stack	B→Stk,Sp-1→SP	B INH	37		1	3	-	-	-	-	-	-	-	-
PSHX	push X onto Stack	X→Stk,Sp-2→SP	X INH	3C		1	4	-	-	-	-	-	-	-	-
PSHY	push Y onto Stack	Y→Stk,Sp-2→SP	Y INH	18 3C		2	5	-	-	-	-	-	-	-	-
PULA	Pull A from Stack	SP+1→Sp,Stk→A	A INH	32		1	4	-	-	-	-	-	-	-	-
PULB	Pull B from Stack	SP+1→SP,Stk→B	B INH	33		1	4	-	-	-	-	-	-	-	-
PULX	Pull X from Stack	SP+2→SP,Stk→X	X INH	38		1	5	-	-	-	-	-	-	-	-
PULY	Pull Y from Stack	SP+2→SP,Stk→Y	Y INH	18 38		2	6	-	-	-	-	-	-	-	-
RTS	Return from Subroutine	See Text	INH	39		1	5	-	-	-	-	-	-	-	-
STAA(opr)	Store Accumulator A	A→M	A DIR	97	dd	2	3	-	-	-	-	↕	↕	0	-
			A EXT	B7	hh 11	3	4								
			A IND,X	A7	ff 11	2	4								
			A IND,Y	18 A7	ff	3	5								
STAB(opr)	Store Accumulator B	B→M	B DIR	D7	dd	2	3	-	-	-	-	↕	↕	0	-
			B EXT	F7	hh 11	3	4								
			B IND,X	E7	ff	2	4								
			B IND,Y	18 E7	ff	3	5								
STD(opr)	Store Accumulator D	D→M	D DIR	DD	dd	2	4	-	-	-	-	↕	↕	0	-
			D EXT	FD	hh 11	3	5								
			D IND,X	ED	ff	2	5								
			D IND,Y	18 ED	ff	3	6								
STOP	Stop Internal Clocks		INH	CF		1	2	-	-	-	-	-	-	-	-
TSTA	Test Accumulator A	A-00	A INH	4D		1	2	-	-	-	-	↕	↕	0	0
TSTB	Test Accumulator B	B-00	A INH	5D		1	2	-	-	-	-	↕	↕	0	0

S 表示仅用于有符号的二进制补码的指令。

U 表示仅用于无符号数的指令。

ii　8 位即时数据。

dd　直接地址的低字节。

hh 11　扩展地址的高字节和低字节。

ff　索引导址指令的无符号 8 位偏移量。

jj kk　16 位即时数据的高字节和低字节。

rr　分支指令中的有符号 8 位偏移量。

68HC11 的指令比表中列出来的要多很多，这里只是举例说明多种指令。接下来，我们将简述 68HC11 采用的 6 种寻址模式。

8.5.2 扩展寻址

回想一下，68HC11 采用的是 16 位存储地址(通常书面表达为 4 个十六进制数)。在扩展寻址中，完整的操作数的地址包含在指令中。因此，指令 ADDA $CA01 将存储单元 CA01 中的内容添加到寄存器 A 中(稍后将介绍汇编程序，将助记符转换为操作码。$ 符号表示汇编地址是十六进制形式)。正如所见，操作码将出现在 3 个连续的存储单元中，首先给出的是地址的高位字节，然后是低位字节。

BB (ADDA 指令扩展寻址的操作码)

CA (地址的高位字节)

01 (地址的低位字节)

8.5.3 直接寻址

直接寻址操作只给出了地址的两位最低有效位(十六进制)，并且假设最高有效位的两位为零。因此，有效地址从 0000 直到 00FF。举例如下，指令

```
ADDA $A9
```

表示将 00A9 存储单元的内容加到寄存器 A 相应位置的内容中。也就是说，这个指令将出现在两个连续的存储单元中：

9B (ADDA 指令直接寻址的操作码)

A9 (地址的低位字节)

请注意，用扩展寻址的方式可以得到相同的结果。这种情况下，指令变为

```
ADDA $00A9
```

但是，采用扩展寻址方式的指令将占用存储器中的 3 个字节，直接寻址方式只占用两个字节。此外，直接寻址方式的完成速度更快。(从表 8.1 第 8 列可以看出，如果采用扩展寻址，ADDA 指令需要 4 个循环来完成，但直接寻址只需要 3 个循环，周期更短，执行速度更快。)

虽然扩展寻址可以获得与直接寻址相同的结果，但直接寻址占用存储器的空间更少，且执行速度更快。程序中经常使用的数据应该存储在存储单元 0000 到 00FF 之间，并且通过直接寻址的方式访问。

8.5.4 固有寻址

某些指令(如 ABA)只访问微型处理器的寄存器，这种指令采用了固有寻址方式。如果用一个指令序列将数字添加到存储单元 23A9 和 00AA，然后将结果存储在 23AB 单元，则表示为

LDAA $23A9 (扩展寻址，从 23A9 单元中载入 A)

LDAB $AA (直接寻址，从 00AA 单元中载入 B)

ABA (固有寻址，将 B 添加到 A 中)

STAA $23AB (扩展寻址，将结果存储在 23AB 单元中)

8.5.5 立即寻址

立即寻址用字符#表示，其操作数的地址紧跟着指令的地址。例如，指令 ADDA #$83 的含义是将十六进制数 83 添加到寄存器 A 的内容中。该指令存储在两个连续的存储单元中：

8B （ADDA 指令立即寻址的操作码）

83 （操作数）

由于 A 是一个单字节寄存器，所以只需要存储器的一个字节来存储操作数。

此外，D 是一个双字节(16 位)寄存器，所以假设其操作数占用两个存储字节。例如，指令 ADDD #$ A276 的含义是将两个字节的十六进制数 A276 添加到寄存器 D 的内容中。该指令存储在如下 3 个连续的存储单元中：

C3 （ADDD 指令立即寻址的操作码）

A2 （操作数的高位字节）

76 （操作数的低位字节）

8.5.6 变址寻址

变址寻址操作时，将指令的偏移量和寄存器 X(或 Y)的内容相加，得到有效地址。偏移量和寄存器的内容作为无符号数字处理。如采用变址寻址的命令 ADDA $03,X 中，03 是偏移量，X 是变址寄存器。偏移量的范围从 00 到 FF，变址寄存器可以是 X，也可以是 Y。

设寄存器 X 含 A900 单元，并执行命令 ADDA $03,X，那么有效地址是 X + 偏移量 = A900 + 03 = A903。这样，存储单元 A903 的内容便被添加到寄存器 A 中，X 中的内容是不变的。

8.5.7 相对寻址

转移指令用于改变程序流的顺序。回想一下，如果两个数字相加的结果不是零，那么条件代码寄存器的 Z 位将被清零；如果结果是零，那么 Z 位将被置 1。根据 Z 位的值，BEQ 命令(即结果等于零的转移指令)可以改变程序流。

在 68HC11 中，转移指令只用于相对寻址。反过来，相对寻址也只使用转移指令。

例如，假设寄存器 A 包含 FF，寄存器 B 包含 01，然后执行指令 ABA，如图 8.10(a)所示的二进制加法。因为结果是零，条件寄存器的 Z 位将被置 1。如果执行转移指令 BEQ $05，那么下一条指令则是程序计数器的内容加上偏移量(这里指 05)。如果 Z 位被清零，则执行紧随转移指令的指令，如图 8.10(b)所示。

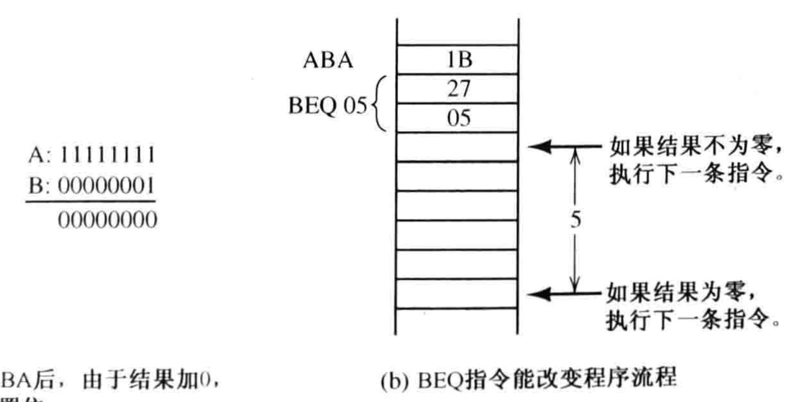


图 8.10　使用 BEQ 指令

偏移量是一个有符号的 8 位二进制补码，因此，偏移量的范围从 -128_{10} 到 $+127_{10}$。

表 8.2 总结了 68HC11 使用的 6 种寻址模式，更强大的 CPU12 有更多种额外的寻址模式。

表 8.2 68HC11 的寻址模式

模　式	数据位置(有效地址)	范　例
扩展	指令包含 16 位地址	ADDA $ A906
直接	00ii 中的 ii 被包含在指令中 (地址 0000 仅通过 00FF)	$0F
固有	引伸指令	ABA CLRA
立即	下条指令的位置	ADDA #$C2 ADDD #$765A
索引	X + 偏移量或 Y + 偏移量 (偏移量范围从 00 到 FF)	ADDA $0A,X LDAA $57,Y
相对	程序计数器加偏移量的内容 (偏移量范围从 -128_{10} 到 $+127_{10}$) 仅用于分支指令	BCS $0A BEQ -$05

8.5.8 机器代码和汇编程序

ADDA 是处理器执行一条指令的助记符。在 68HC11 中，采用扩展寻址的指令 ADDA 以 BB $=10111011_2$的形式存储在存储器中。其中，BB 是扩展寻址的指令 ADDA 的机器代码。机器代码也称为操作码或简称 OP 代码。在扩展寻址中，操作数的地址存储在紧接着指令码的两个存储单元中。指令 ADDA $070A 按以下形式存在于 3 个连续的存储单元中：

BB
07
0A

对人们来说，将指令助记符转化为机器代码是一项非常艰巨的任务，但是，计算机却擅长这种类型的任务。此外，助记符相比于机器代码更容易记忆。因此，我们一般使用助记符编写程序。计算机程序称为汇编程序，可以将助记符转化为机器代码，也可以做与程序相关的其他琐事。例如，将十进制数转换为十六进制数，并记录转移地址和操作数地址。下一节将对摩托罗拉汇编语言展开更多的讨论。

对于指令助记符 ADDA $0A,X，X 表示使用变址寻址，68HC11 汇编器用以下操作码序列代替指令：

AB (使用 X 寄存器的变址寻址的 ADDA 的操作码)
0A (偏移量)

请注意：如果采用扩展寻址，ADDA 指令占用存储器中的 3 个字节；如果采用变址寻址，ADDA 指令占用存储器中的两个字节。

练习 8.6 设寄存器 A 的内容为零，然后执行以下指令：

(a) LDAA $0202
(b) LDAA #$43
(c) LDAA $05,X
(d) LDAA $06
(e) LDAA $07,X

此外，设寄存器 X 包含 0200。请指出每个指令后 A 中的内容。存储器的内容如图 8.11 所示。

答案：(a)1A；(b)43；(c)FF；(d)13；(e)16。

练习 8.7 设从存储单元 0200 开始，连续存储单元含以下指令操作码：

```
CLRA
BEQ $15
```

(a)指出这些指令的存储地址和内容(以十六进制形式)；

(b)执行转移指令后下一指令的地址是什么？

答案：(a)存储地址和内容分别是

0200:4F (CLRA 操作码)

0201:27 (BEQ 操作码)

0202:15 (转移指令的偏移量)

(b)下一指令的地址是 0218。

地址	内容
0200	10
0201	04
0202	1A
0203	10
0204	07
0205	FF
0206	A3
0207	16

地址	内容
0000	EF
0001	01
0002	AE
0003	F1
0004	78
0005	96
0006	13
0007	A4

图 8.11 练习 8.6 的存储内容

8.6 汇编语言编程

程序由能完成任务的指令序列组成。毫无疑问，大家都熟悉使用高级语言编程，如 BASIC、C、FORTRAN、MATLAB 或 Pascal 语言。使用高级语言时，在程序执行前，编译器或解释器需将程序语句转换为机器代码。对于烦琐复杂的工程分析，用机器语言编写程序显得太过冗长。对于面向应用的软件，比如计算机辅助设计包，采用易于使用的程序尤为重要。但是，在控制应用中使用嵌入式计算机编写程序时，需要保证指令数量相对少，最大限度地减少各种操作所需的时间，且能对系统中的受控事件做出快速反应，这点尤为重要。

我们经常使用机器语言来为计算机的控制应用编程，若用汇编器将会减轻很多负担，这会带来许多便利，如编写助记符指令、标记存储地址，以及在源程序文件中添加用户评论等。

事实上，在通用计算机的主机中，用文本编辑器编写的程序称为源代码。接着通过汇编程序，源代码被转换为目的代码(机器代码)。最后，再将机器代码载入到称为目的系统的微机的存储器中。有时我们说源代码是用汇编语言编写的，不过，汇编语言代码与计算机执行的实际操作码非常相似。

摩托罗拉汇编语言通常采用以下形式：

```
LABEL       INSTRUCTION/DIRECTIVE      OPERAND       COMMENT
```

通常情况下，每一行源代码被转换成一个机器指令。一些源代码语句称为指令，主要是命令汇编程序。其中之一就是起始指令 ORG。例如，

```
ORG       $0100
```

其作用是指示汇编器将第一条指令放置在存储单元 0100 中。

在摩托罗拉汇编语言中，标签必须从第一行开始，各个区域由空格划分开。因此，当我们把 ORG 作为指令而不是标签时，需要在它前面放置一个或者多个空格。如果某行的首字符是 *，该行将被汇编程序忽略，表明此行用于注释。行距的使用使得源代码更易于理解。

编写程序时，一般首先描述完成任务的算法。接着，创建指令序列以执行算法。通常情况下，有多种方法来编写给定任务的程序。

例 8.1 一个汇编语言程序。

编写一个程序，从存储单元 0400 开始，检索存储单元 0500 中存储的数据，然后加 5，将结

果写入0500单元中，程序停止。(虽然68HC11有多种其他指令让编写的程序更短，建议这里只使用表8.1中所列的指令。)

解：源代码如下：

```
*    例8.1的源代码
*    此行是会被汇编程序忽略的注释
*
          ORG     $0400     起始指令
BEGIN     LDAA    $0500     加载数据给A
          ADDA    #$05      加5，立即寻址
          STAA    $0500     存储结果
          STOP
          END
```

为了解释每行，每行后面给出了注释。BEGIN是标识LDAA指令地址的标签。(在这里，BEGIN是存储单元0400的值。)如果在更复杂的程序中需要引用该单元，可使用该标签。STOP是指令助记符，停止微机的进一步行动。END指令是通知汇编程序接下来没有更多的指令了。

例8.2 绝对值汇编程序。

试写一个程序的源代码，从存储单元0300开始，从寄存器A中载入一个有符号的二进制补码到存储单元0200中，计算其绝对值，并将结果返回到存储单元0200中，然后清除寄存器A，停止程序。请使用表8.1中所列指令。(设存储单元0200中的初始内容绝不会是10000000 = -128_{10}，因为没有8位二进制补码形式的正数。)

解：回想一下，根据条件代码寄存器中某些位的值，转移指令(也称条件指令)执行不同的指令集。例如，在表8.1中，如果条件代码寄存器的N位被清零(即逻辑0)，加法指令(BPL)的转移指令将会产生转移。

很多指令会自动测试。例如，载入A的指令LDAA，如果值分别是负数或者零，则条件代码寄存器的N位或Z位将被置1。

为了载入数字，如果是负数，则计算其二进制补码，存储结果，并清空寄存器A，然后停止程序。获得二进制补码的方式是首先找到二进制反码，然后加1。如果是正数，就没必要再计算。源代码如下：

```
*  SOURCE CODE FOR EXAMPLE 8.2
*
          ORG     $0300     起始指令
          LDAA    $0200     加载数据给寄存器A
          BPL     PLUS      如果A是正值就转移
          COMA              求补码
          INCA              加1求补码
          STAA    $0200     结果置入存储器
PLUS      CLRA              A寄存器清零
          STOP
          END
```

在该程序中，数字首先从存储单元0200载入到寄存器A中。如果数字是负数(即如果最高有效位是1)，条件代码寄存器的N位将被置位(逻辑1)，否则就不置位。如果N位是0，BPL PLUS指令将执行起始单元标签为PLUS的下一条指令。另外，如果N位是1，那么执行的下一条指令则是紧随着转移指令的指令。如果存储单元的内容是负数，则计算二进制补码来改变符号。然后，将结果写入初始单元中，并清空A。

为了说明汇编程序的一些任务，接下来将前面例子的源代码手动地转换为机器代码。

例 8.3　源代码向机器代码的手动转换。

请手动确定例 8.2 的源代码所产生的每个存储单元的机器代码。标签 PLUS 的值是多少？（提示，用表 8.1 来确定每个指令的操作码。）

解： 汇编程序会忽略标题和其他注释。因为 ORG 指令，机器代码被放置在起始存储单元 0300 以后的位置。存储地址及其内容是

```
0300:  B6  LDAA扩展寻址的操作码
0301:  02  地址的高位
0302:  00  地址的低位
0303:  2A  使用相对地址的BPL的操作码
0304:  05  偏移量（在第一遍执行时这个值是未知的）
0305:  43  计算变量补码的COMA的操作码
0306:  4C  INCA的操作码
0307:  B7  STAA扩展寻址的操作码
0308:  02  地址的高位
0309:  00  地址的低位
030A:  4F  A寄存器清零
030B:  CF  暂停处理器
```

每一行之后添加了注释，汇编程序不会产生这些注释。

回想一下，转移指令使用相对寻址。第一次执行源代码时，BPL 命令所需的偏移量是未知的。然而，在第一次执行源代码后，与标签 PLUS 相对应的存储单元是 030A，且 BPL 命令所需的偏移量为 05。END 指令不产生目标代码。

8.6.1　子程序

有时，指令的某些序列在许多不同的地方被反复使用。如果这些序列一旦存入存储器，这些序列就可以在任何地方使用。这种指令的序列称为子程序。若在主程序的任何一点需要执行子程序，只需使用跳转指令转到子程序指令：

```
JSR address
```

其地址是子程序的第一条指令的直接、扩展或者索引地址，当子程序结束时，则从使用子程序命令

```
RTS
```

跳回主程序，并执行主程序中紧跟着 JSR 指令的存储单元中的下一条指令，如图 8.12 所示。

堆栈用于记录子程序完成后的返回地址。在执行跳转后，紧跟着 JSR 指令的地址将被推入系统堆栈中。在执行返回指令时，该地址从堆栈中被取出来，并加载到程序计数器中。子程序结束后，接下来执行的下一条指令便是紧跟着 JSR 的指令。

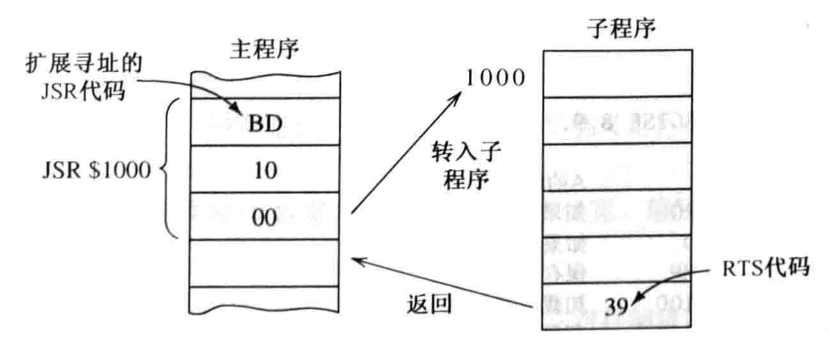


图 8.12　采用扩展寻址的跳转子程序命令的示意图（JSR 指令也允许其他寻址模式）

汇编程序可以执行的琐事之一便是记录子程序的起始地址，我们只需标注源代码中子程序

的第一条指令，这样非常方便。因为在编写程序时，我们通常不知道最终在什么地方会导入子程序。在完成所有源代码的编写后，汇编程序可以计算出每部分程序所需的存储量，并且决定子程序的起始位置，这些起始位置将被标签取代。

例 8.4 子程序源代码。

设寄存器 A 的内容是一个有符号的二进制补码数 n。试用表 8.1 中的指令，写一个名为 SGN 的子程序，其作用是如果 n 是正数，用 +1 代替 A 中的内容(有符号的二进制补码形式)；如果 n 是负数，用 −1 代替；如果 n 是零，则不用改变。

解答： 子程序的源代码如下：

```
*   例8.4子程序的源代码
*
SGN       TSTA                  A的测试内容
          BEQ       END         如果A是0就转移
          BPL       PLUS        如果A是正值就转移
          LDAA      #$FF        加载-1, 立即寻址
          JMP       END         跳转到子程序结尾
PLUS      LDAA      #$01        加载+1, 立即寻址
END       RTS                   从子程序返回
```

首先，数字会自检。如果是零，将设置 Z 标记；如果是负数，将设置 N 标记。接下来，如果数字是零，BEQ 指令将使程序强制进入 END 分支，从子程序返回。如果数字是正数，子程序转移到 PLUS，导入二进制补码数 +1 的十六进制代码，然后返回。如果数字是负数，将执行 LDA#FF 指令，然后返回。[注意，在该子程序中，END 是一个标签(而不是指令)，因为它是从第一行开始的。]

练习 8.8 写一个程序，从位置$0100 开始，在位置$0500 的内容上加 5210，将结果存储在位置$0501 中，然后停止。设所有的值都是二进制补码形式。

答案： 源代码如下：

```
*   SOLUTION FOR EXERCISE 8.8
*
          ORG       $0100
          LDAA      #$34        加载十进制数52的等值十六进制数
          ADDA      $0500       添加内容0500
          STAA      $0501       结果存储在0501
          STOP
          END
```

练习 8.9 写一个名为 MOVE 的子程序，用以检测寄存器 A 中的内容。如果 A 是零，子程序则移动单元 0100 的内容到 0200 中；否则就不移动。返回时 A 中的内容与子程序被调用之前的内容必须是相同的。

答： 子程序如下：

```
*   SUBROUTINE FOR EXERCISE 8.9.
*
MOVE      TSTA                  A的测试内容
          BEQ       ZERO        如果A的内容是0就转移
          JMP       END         如果A不是0就返回
ZERO      STAA      TEMP        保存A的内容
          LDA       $0100       加载内容0100
          STA       $0200       存储A的内容于0200
          LDA       TEMP        获取A的原始内容
END       RTS                   从子程序返回
```

本章讲述了微控制器和汇编语言的编程。开发一个产品(如家电)控制器的大部分成本在于

编写软件，因为高开发成本可以分摊到众多产品，所以微控制器适于大批量生产。但是，对于复杂的、用户定制的控制或仪表系统，使用更高级编程语言和通用计算机会使产品的性价比更高。我们在下一章将介绍这种方法。

本章小结

1. 微型计算机由中央处理器(CPU)、存储器、输入/输出(I/O)设备组成，它们由双向数据和控制总线连接在一起。CPU 包含控制单元、算术逻辑单元(ALU)和各种寄存器。
2. 在冯·诺依曼或普林斯顿计算机体系结构中，数据和指令都存储在相同的存储器中。
3. 存储器用来存储程序和数据。存储器的 3 种类型分别是 RAM、ROM 和海量存储器。
4. 传感器是将物理值转换为电信号的输入设备，执行器是允许微机控制系统的输出设备。
5. 图 8.5 展示了一个典型的将微机用于过程控制的元器件。
6. 模数转换器(A/D)将模拟电压转换为数字字，数模转换器(D/A)将数字字转换为模拟电压。模拟传感器和执行器与微机之间需要用转换器来接口。
7. 图 8.6 展示了 68HC11A8 微控制器的原理框图。68HC11 有许多其他版本可供选择。
8. 图 8.8 展示了 68HC11 微控制器的寄存器集。
9. 堆栈存储器的数据被逐步添加直到堆栈的顶部，或者从堆栈的顶部开始读取。它是一个后进先出(LIFO)的存储器。堆栈指针是记忆了堆栈顶部地址的寄存器。
10. 表 8.1 包含了 68HC11 的一些指令。
11. 68HC11 支持 6 种寻址模式：扩展寻址、直接寻址、固有寻址、立即寻址、变址寻址和程序 - 相对寻址。表 8.2 总结了这些寻址模式。
12. 在为嵌入式微控制器编写程序时，往往首先用标签和助记符编写源程序。汇编程序将源程序转换为目标程序，目标程序由载入到目标系统的机器代码组成。
13. 微控制器的软件开发成本较高。但是，当成本可以分摊到很多产品时，采用汇编语言编程是最好的解决办法。

习题

8.1 节　计算机结构

P8.1　列出微型计算机的功能部件。

P8.2　什么是三态缓冲器？它们有何用途？

P8.3　给出一些 I/O 设备的例子。

P8.4　什么是内存映射的 I/O？

P8.5　什么是总线？数据总线的功能是什么？地址总线的功能又是什么？

P8.6　什么是嵌入式计算机？

*P8.7　一台计算机的地址总线为 16 位宽，且数据总线为 32 位宽。请问存储器可能包含多少字节？

8.2 节　存储器类型

P8.8　什么是 RAM？列出两种类型。在嵌入式计算机中，它对存储程序有用吗？请解释。

*P8.9　什么是 ROM？列出四种类型。在嵌入式计算机中，它对存储程序有用吗？请解释。

P8.10　举出海量存储器的 3 个例子。

P8.11　哪种类型的存储器的每个存储单元是最便宜的？（设需要达到 MB 容量。）

P8.12 如果地址总线的宽度是32位，请问可以编址多少存储单元?

*P8.13 对于一个汽车点火系统的控制器来说，哪种类型的存储器是最好的?

P8.14 什么时候我们选择EEPROM，而不选择掩模编程ROM?

P8.15 什么类型的存储器是易失性的？哪种存储器是非易失性的?

8.3节 数字过程控制

P8.16 列出基于微机控制的应用中可能使用的电路单元。

P8.17 什么是传感器？举3个例子。

P8.18 什么是执行器？举3个例子。

*P8.19 请解释数字传感器和模拟传感器之间的区别，分别举一个例子。

P8.20 举出可能包含微机或者微控制器的5种常见家用产品。

P8.21 列出两个微机控制或仪器在你所在专业领域的潜在应用。

P8.22 什么是A/D？为什么在微机的控制器中需要它?

*P8.23 什么是D/A？为什么在微机的控制器中需要它?

P8.24 什么是轮询？什么是中断？与轮询相比，中断的主要优势是什么?

8.4节 68HC11微控制器

P8.25 68HC11微机的A、B、D寄存器分别有什么功能?

P8.26 程序计数器寄存器的功能是什么？条件代码寄存器的功能又是什么?

*P8.27 什么是堆栈？堆栈指针的作用是什么?

P8.28 什么是LIFO存储器?

*P8.29 设寄存器中的初始内容分别是

```
A:07      B:A9      SP:004E      X:34BF
```

且存储单元0048～004F的初始内容包含所有0，然后依次执行命令PSHA，PSHB，PULA，PULB，PSHX。请列出执行每步命令后寄存器A，B，SP，X以及存储单元0048～004F的内容。

P8.30 设寄存器中的初始内容分别是

```
A:A7      B:69      SP:004D      Y:B804
```

且存储单元0048～004F的初始内容包含所有零，然后依次执行命令PSHY，PSHB，PULY，PSHA。请列出执行每步命令后寄存器A，B，SP，X以及存储单元0048～004F的内容。

*P8.31 写一个推拉命令序列，用于交换寄存器X中的高位字节和低位字节。执行命令序列后，其他寄存器的内容与之前一样。

8.5节 68HC11的指令集和寻址模式

P8.32 设寄存器X包含2000，寄存器A的初值包含01。请为寻址类型命名，且给出以下每步指令后寄存器A的内容(存储器中的内容如图P8.32所示)：

(a)* LDDA $2002

(b)LDDA #$43

(c)* LDDA $04

(d)LDDA 6,X

(e)* INCA

(f)CLRA

(g)* LDAA $2007

(h)INX

地址	内容	地址	内容
0000	01	2000	37
0001	FA	2001	AF
0002	9B	2002	20
0003	61	2003	07
0004	9A	2004	20
0005	B6	2005	00
0006	73	2006	FF
0007	41	2007	F3

图P8.32

P8.33 (a)设寄存器A的初始值包含FF，且程序计数器是2000。请问转移命令执行后的第一条指令的

地址是什么？存储器的内容和相应的指令助记符如图 P8.33(a)所示。

(b)如图 P8.33(b)所示重复(a)的要求。

(c)如图 P8.33(c)所示重复(a)的要求。

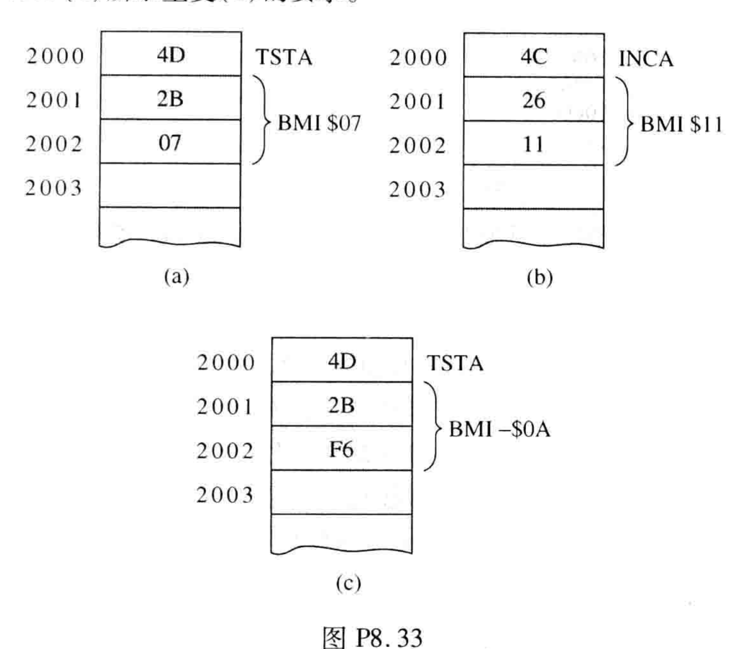


图 P8.33

P8.34　给出以下每条指令的机器代码：

(a)* CLRA

(b)* ADDA $4A

(c)ADDA $02FF

(d)BNE −$06

(e)ADDA #$0D

(f)ADDA 07,X

(g)ADDA 07,Y

问：每条指令占用多少存储单元？

P8.35　给出执行以下指令序列后寄存器 A 的内容：

```
LDAA  #$01
ADDA  #$F1
CLRA
```

问：条件代码寄存器的 N 位被置 1 还是清零？Z 位被置 1 还是清零？

*P8.36　(a)设寄存器 A 的内容是 43，执行指令 ADDA #$05 后，找出寄存器 A 的内容。

(b)设寄存器 A 的内容是 FA，执行指令 ADDA #$0F 后，找出寄存器 A 的内容。(这种情况下发生上溢。)

*P8.37　设寄存器 A 的内容是 $A7，寄存器 B 的内容是 $20。执行 MUL 命令后，找出 A 和 B 的内容。(提示：MUL 指令假设 A 和 B 的内容是无符号的整数。)

P8.38　(a)设 B 的内容是 $43，执行命令 SUBB 后，找出 B 的内容。

(b)设 B 的内容是 $43，执行命令 SUBB #$55 后，找出 B 的内容。

8.6 节　汇编语言编程

*P8.39　编写一个汇编语言程序，从单元 200 开始，将寄存器 A 的内容乘以 1110，然后将结果存储在存储单元 $FF00 和 $FF01 中，$FF00 中放置最高有效字节，然后停止该处理器。

P8.40　编写一个汇编语言程序，从单元 0400 开始，在单元 0800 中存储 00，在单元 0801 中存储 01，在单元 0802 中存储 02，在单元 0803 中存储 03，然后停止该处理器。

*P8.41 编写一个名为 DIV3 的子程序，将 A 的内容除以 3，设 A 的初始值是二进制补码形式的正整数。然后从子程序返回，将商值存储在 B 和 A 的剩余部分。

P8.42 考虑以下 68HC11 的汇编语言代码：

```
*     PROBLEM 8.42
          ORG       $0600
START     LDD       #$07AF
          LDX       #$0600
          STD       6,X
          STOP
          END
```

从单元 0600 开始，执行以上代码后，列出存储单元 0600 ~ 060F 的内容。

P8.43 编写一个名为 MUL3 的子程序，寄存器 A 的内容由与它最接近的且为 3 的倍数的整数来代替。设 A 的初始内容是一个二进制补码形式的正整数，存储单元 $0A 用于临时存储。在源代码中，请用注释解释程序及其运作。[提示：反复减去 3，直到结果为负。如果结果是 -3，则 A 的初始内容是 3 的倍数，不用改变。如果结果是 -2，则 A 的初始内容是 1 + 整数(3 的倍数)，将初始值减去 1，即获得最接近的且为 3 的倍数的整数。如果结果是 -1，则 A 的初始内容是 2 + 整数(3 的倍数)，将初始值加 1 后获得最接近的且为 3 的倍数的整数。]

P8.44 设寄存器 B 包含一个数 n(BCD，二进制编码的十进制数)。编写一个名为 CONVERT 的子程序，将寄存器 B 的内容用其等效的二进制数代替，其他寄存器(程序计数器除外)的内容在执行完子程序后不能改变。存储单元 $1A，$1B 和 $1C 可以用于临时存储。[提示：需要将 n 的高 4 位与低字节分开，可以将 n 的高 4 位移到左边，然后将结果显示在寄存器 D 中。提示：将高 4 位移到左边可通过乘以 2^4 来完成。]

自测题

该自测题用于检查大家是否理解掌握本章中最重要的概念。在附录 E 中可以找到答案，在学生资源中能找到完整的解答。关于学生资源的更多信息，请参照附录 F。

T8.1 首先，在表 T8.1(b)中选择一种或多种正确答案完成表 T8.1(a)中的每一句表述。[表 T8.1(b)中的选项可以选择多次，也可以不用。]

表 T8.1

选项 (a)	最佳匹配
a. 三态缓冲器…	
b. 当 I/O 设备像数据存储单元一样采用相同的地址和数据总线进行访问时应当…	
c. 微控制器的程序通常存放在…	
d. 最容易被擦除的内存类型是…	
e. 最有可能用于微控制器中临时数据存放的内存类型是…	
f. 算术运算执行于…	
g. 微控制器可以设计为相应外部事件，依靠…	
h. 68HC11 中保持某个参数和算术逻辑运算的结果的寄存器是…	
i. 68HC11 中专门用于变址寻址的寄存器是…	
j. TSTA 指令可能改变内容的是…	
k. 堆栈是…	
l. ABA 指令使用的寻址类型是…	
m. ADDA $0AF2 指令使用的寻址类型是…	
n. ADDA #$0A 指令使用的寻址类型是…	
o. 保持从内存检索的下一个指令地址的寄存器是…	
p. BEQ 指令使用的寻址类型是…	

续表

(b)
1. 由常闭的开关组成
2. 海量存储
3. B 和 Y
4. I/O 设备有其自己的地址和数据总线
5. 由打开的开关组成
6. A 和 X
7. 控制单元
8. 扩展
9. A、B 和 D
10. 包含由程序计数器控制下的开关打开和闭合
11. 促进数据在总线任意方向上数据传输的能力
12. 条件代码寄存器
13. ALU
14. 轮询
15. 后进先出存储器
16. 固有
17. 内存映射 I/O
18. A 和 D
19. 中断
20. X 和 Y
21. ROM
22. 直接
23. 程序计数器
24. 动态 RAM
25. 堆栈指针
26. 使用中断或轮询
27. 静态 RAM
28. 索引
29. 立即
30. 相对的

T8.2 设有一个 68HC11 的微控制器。设寄存器 A 的初始内容是 00，B 的初始内容是 FF，Y 的初始内容是 2004，且所选存储单元的初始内容如图 P8.32 所示。要求命名所采用的寻址类型，并给出执行以下指令后寄存器 A 的内容(以十六进制形式)：(a)LDAA $03；(b)LDAA $03,Y；(c)COMA；(d)INCA；(e)LDAA #$05；(f)ADDD #A001。

T8.3 设 68HC11 微控制器的寄存器的初始内容是

```
A:A6    B:32    SP:1038    X:1958
```

且存储单元 1034 ~ 103C 的初始内容包含所有零，然后执行以下指令：PSHX，PSHB，PULA，PSHX。列出执行指令后寄存器 A，B，SP，X 的内容，以及存储单元 1034 ~ 103C 的内容。

第9章　基于计算机的仪表系统

本章学习目标

- 描述基于计算机的仪表系统的各模块电路的工作原理
- 识别仪表系统中可能遇到的错误类型
- 避免常见的接地环路、噪声耦合和传感器接入电路时的加载等问题
- 确定基于计算机仪表系统的模块电路规格，如数据采集板
- 知道如何使用 LabVIEW 在各工程领域中创建计算机辅助测试的虚拟仪表和控制系统

本章介绍

在第8章中，我们学会了如何用汇编语言来为家电或内燃发动机等仪表和控制产品的嵌入式微机进行编程。嵌入式微控制器的系统开发和编程同时伴随着高成本。当高成本分摊到大量产品时，嵌入式计算机和汇编语言编程便成为最经济有效的方法。但是，对于用户定制的仪表和控制系统，嵌入式计算机的解决方案则过于费时又费钱。

本章将学习通用的数据采集(DAQ)板、高级软件包和普通计算机，它们的组合将快速、轻松地构建精密仪器仪表和过程控制系统。这种方法对专门的控制系统尤为适用。

9.1　测量概念和传感器

9.1.1　基于计算机的仪表概述

图9.1是一个关于汽车或化学过程的基于计算机的测量系统。温度、角速度、位移和压力等物理现象使得传感器的电压、电流、电阻、电容或电感发生变化。如果传感器的输出还不是电压信号，信号调理器将提供一个激励源将电气参数的变化转换为电压。此外，信号调理器进行信号放大和滤波，将被调理的信号输入到数据采集(DAQ)板中。在 DAQ 板上，每个调理信号再被送入周期性采集信号和维持数值稳定的取样保持电路(S/H)中，接着，经多路转换器(MUX)将其连接到模数转换器(A/D 或 ADC)，将模拟信号转换为数字字被计算机读取和处理，最后，计算机存储并显示结果。例如，分别从一个应力传感器和速度传感器中产生的信号可以相乘，获得随时间变化的功率曲线。此外，功率可以被积分，表示在一段时间内消耗的能量。在一个过程中长期进行统计分析，将使得质量控制更为方便。

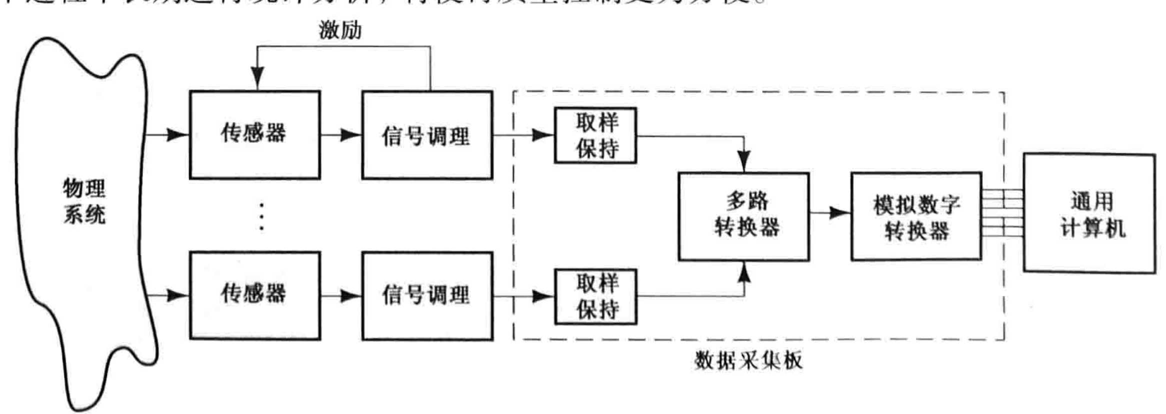


图9.1　基于计算机的 DAQ 系统

本节首先介绍传感器，在接下来的几节中，再讨论基于计算机的 DAQ 系统的其他模块电路。

9.1.2 传感器

我们重视传感器或信号调理器，因为它们能产生类似于物理量或被测量变化的电信号（通常是电压），然后，电信号再被测量。通常情况下，电压与被测量成正比，即传感器的电压：

$$V_{\text{sensor}} = Km \tag{9.1}$$

式中，V_{sensor}是传感器产生的电压，K 是灵敏度常数，m 是被测量。例如，负载单元是一个惠斯通电桥结构形式、含有 4 个桥臂元件（应力计）和负载连接的传感器。当力量施加到负载单元时，成比例的电压将出现在桥臂两端，再将一个恒定电压的激励作用于桥臂的其他两端。对于一个给定的激励电压，灵敏度常数的单位是 V/N 或 V/lbf。

表 9.1 是一些被测量和传感器的实例，它们仅仅是众多传感器类型中的一部分。

表 9.1　被测量和传感器类型

被测量	传感器类型
加速度	地震质量加速度计
	压电压加速度计
角位移	旋转式电位计
	光电轴编码器
	测速发电机
光	光电传感器
	光伏电池
	光电二极管
液位	电容探头
	电导探针
	超声波液位传感器
	压力传感器
线性位移	线性可变差动变压器
	(LVDT)
	应变计
	电位器
	压电器件
	可变面积电容式传感器
力/力矩	称重传感器
	应变计
流体流量	电磁流量计
	桨轮传感器
	收缩效应压力传感器
	超声波流量传感器
气体流量	热线风速计
压力	波登管/线性可变差动
	变压器组合
	电容式压力传感器
接近	微动开关
	可变-磁阻式接近传感器
	霍尔效应接近传感器
	光学接近传感器
	磁簧开关传感器
温度	二极管温度计
	热敏电阻
	热电偶

9.1.3 等效电路和负载

图9.2所示的等效电路适用于许多传感器。源电压 V_{sensor} 类似于被测量，R_{sensor} 是戴维南等效电阻。作为信号调理的一部分，传感器的电压被多级放大。图9.2表示传感器与放大器的输入端相连(放大器将在第11章中讨论)。从任何放大器的输入端看进去，都等效为一个有限的阻抗，即图9.2中的 R_{in}。根据分压公式，有

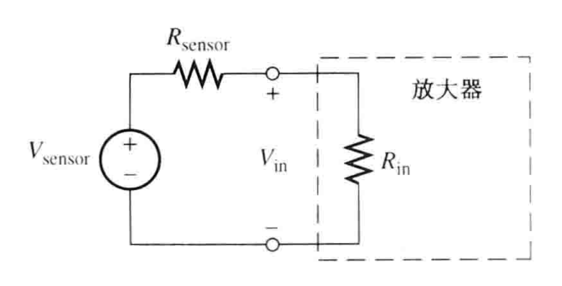


图9.2 传感器连接放大器输入端的模型

$$V_{in} = V_{sensor}\frac{R_{in}}{R_{in} + R_{sensor}} \tag{9.2}$$

因为电流通过电路，放大器的输入电压小于传感器的内部电压，这种效应称为负载效应。负载效应是不可预知的，也是不希望出现的。如果 R_{in} 比 R_{sensor} 大得多，则放大器的输入电压与内部传感器电压几乎相等。因此，当需要测量传感器的内部电压时，需要设计一个信号调理放大器，其输入阻抗要远远大于传感器的戴维南等效电阻。

例9.1 传感器的负载效应。

设有一个温度传感器，其开路电压与温度成正比。当传感器的戴维南电阻从15 kΩ 变为5 kΩ 时，要使系统的灵敏度常数变化小于0.1%，放大器的最小输入电阻是多少?

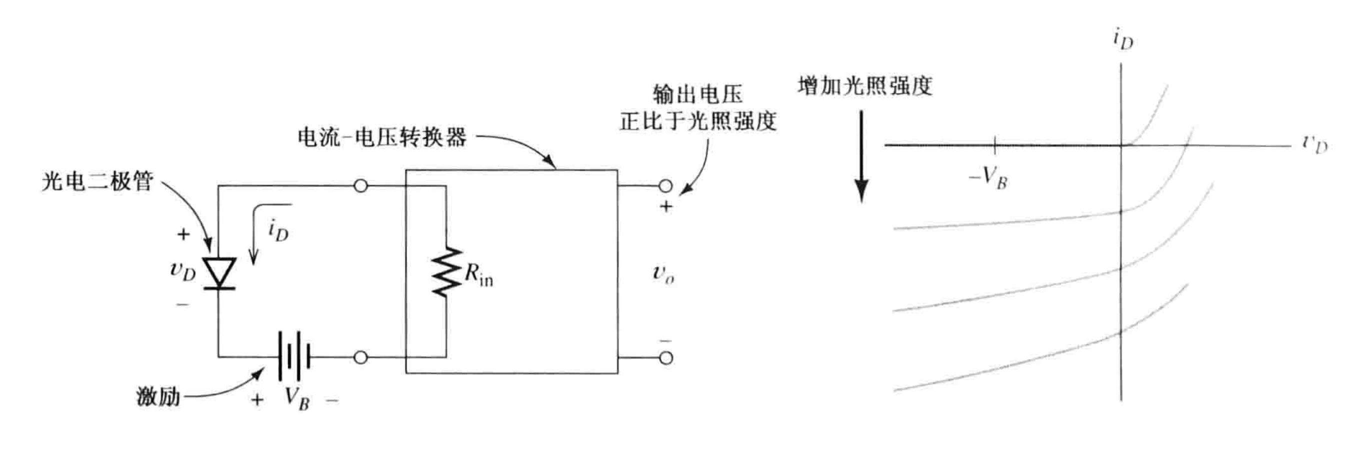
解: 灵敏度常数与输入电阻和传感器的戴维南电阻之间的分压比呈正比。当戴维南电阻变化时，常数变化需等于(或小于)0.1%。因此，根据kΩ量级的电阻，有

$$V_{sensor}\frac{R_{in}}{15 + R_{in}} \geqslant 0.999V_{sensor}\frac{R_{in}}{5 + R_{in}}$$

所以，R_{in} 必须大于9985 kΩ。

9.1.4 电流输出的传感器

某些类型的传感器产生的电流与被测量成正比。例如，在适当的外加电压下，光电二极管产生的电流与光强度成正比。光电二极管如图9.3(a)所示。与负载单元一样，光电二极管需要一个恒定电压的激励源。图9.3(b)所示是不同光强度下二极管的电流与电压关系曲线。若需要电流只取决于光强度，则二极管的电压必须基本保持不变。



(a) 与电流-电压转换器连接的光电二极管传感器

(b) 光电二极管的伏-安特性曲线

图9.3 光电二极管的光感应系统。因为二极管电压通常为常数，R_{in} 的理想值为零

通常，电流-电压转换器（又称为互阻放大器）用于获得与二极管电流成正比的输出电压（电流-电压转换器是习题P14.24分析的专用放大器）。以放大器为例，从电流-电压转换器的输入端看进去可获得等效输入阻抗，如图9.3(a)所示的R_{in}。当电流变化时，为了使二极管电压保持稳定，R_{in}必须非常小（这样，它两端的电压可以忽略不计）。因此，若需要检测传感器产生的电流，用一个具备非常小（最好是零）输入阻抗的电流-电压转换器即可。

9.1.5　变阻传感器

其他传感器在响应被测量的变化时会产生变化的电阻。例如，热敏电阻的电阻随温度的变化而变化，通过恒流源驱动传感器可将电阻的变化转换为电压的变化。为了避免轻载效应，需将电压施加到一个高输入阻抗放大器，如图9.4所示。使用类似的交流激励源可以将电容或电感的变化转换为电压的变化。

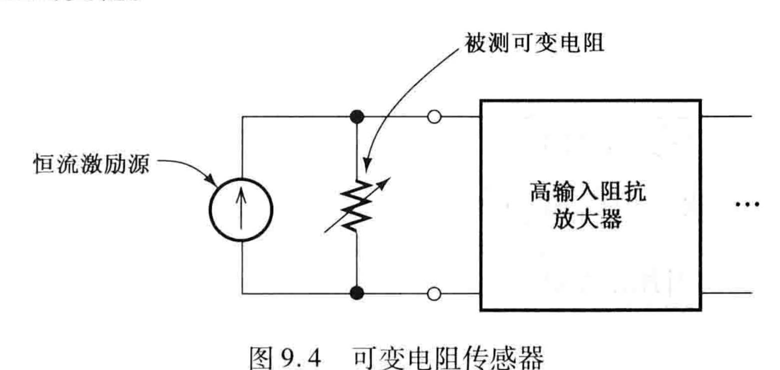


图9.4　可变电阻传感器

9.1.6　测量系统的误差

测量时可能产生多种误差。我们将测量误差定义为

$$\text{误差} = x_m - x_{\text{true}} \tag{9.3}$$

其中，x_m是测量值，x_{true}是被测量的真实值。通常，误差以满刻度值x_{full}（即系统测量的最大值）的百分比表示：

$$\text{误差的百分比} = \frac{x_m - x_{\text{true}}}{x_{\text{full}}} \times 100\% \tag{9.4}$$

误差来源有很多种，其中一些只针对特定的被测量和测量系统。但是，有必要对可能发生的误差进行分类。有些是固有误差，也称系统误差，即相同条件下每次测量都是一样的。有时，固有误差可以通过更精确标准的对比测量来计算。例如，可以通过称量高精确度标准的质量来校准体重秤，然后校准数据则用来纠正随后的体重测量。

固有误差包括偏移误差、刻度误差、非线性误差和滞后误差，如图9.5所示。偏移误差是一个与真值相加或相减的常数；刻度误差产生的测量误差与被测量的真值成正比；非线性误差由电子放大器的设计不当或过激励产生；产生滞后误差时，误差取决于被测量达到当前值的方向和距离。例如，滞后误差可以产生于测量位移的静摩擦或者磁场传感器的材料影响。所有类型的固有误差都可能受到老化或者温度、湿度等环境因素的变化而缓慢漂移。

虽然在相同的条件下（漂移除外）每次测量的固有误差都是一样的，但每个实例的随机误差却不同，且具有零平均值。例如，测定一个给定的距离时，与振动相结合的摩擦可能导致重复测量值不同。有时，我们可以通过重复测量和计算平均值来减少随机误差的影响。

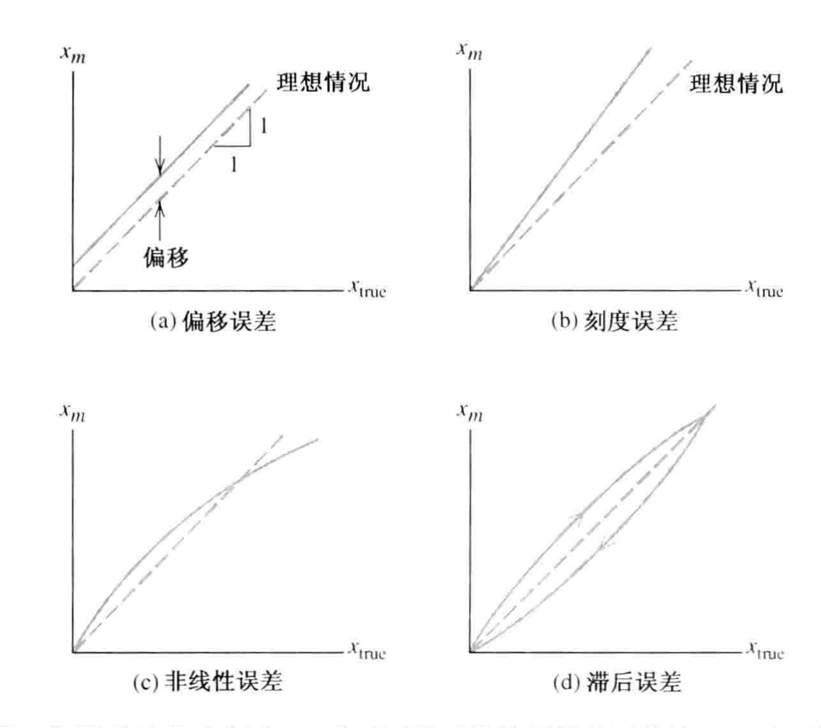


图 9.5 某些类型仪器误差的示意图。x_m 表示测量系统被测量的测量值，x_{true} 表示被测量的真实值

评估仪器性能的一些附加条件如下。

1. 准确度：测量值和真值之间的最大期望值差异(通常以满刻度值的百分比表示)；
2. 精度：仪器重复测量一个稳定测量物的能力，精度越高的测量随机误差越小。
3. 分辨率：测量值之间的尽可能小的增量。对于这个概念，更高的分辨率意味着更小的增量，因此，一个 5 位数字显示器(例如，0.0000 ~ 9.9999)的分辨率比一个 3 位(例如，0.00 ~ 9.99)数字显示器的分辨率要高。

练习 9.1 设一个磁流体传感器的内电阻(因为流体电导率可以变化)从 5 kΩ 变化到 10 kΩ。该传感器的内(开路)电压与流速成正比。随着传感器电阻的变化，设该测量系统(包括负载效应)灵敏度常数的变化小于 0.5%。问：该系统中放大器的输入电阻应该是什么规格?

答案： 该放大器的输入电阻必须大于 990 kΩ。

练习 9.2 问：(a)一个非常精确的仪器可能非常不准确吗?(b) 一个非常准确的仪器可能非常不精确吗?

答案：(a)是的。精确度意味着测量是可重复性的，但是，测量值之间可能有很大的固有误差。(b)不会。如果在相同条件下重复测量的结果差异很大，则某些测量值必定误差很大，结果肯定是不准确的。

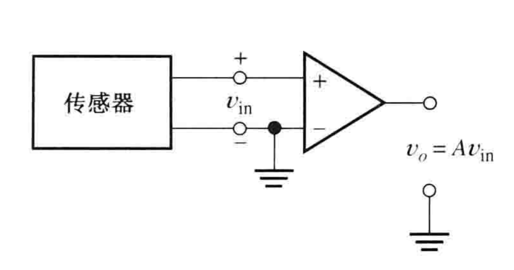
9.2 信号调理

信号调理器的功能包含放大传感器信号、将电流转换为电压、提供给传感器以激励源(交流或直流)，以便将电阻、电感或电容的变化转换为电压的变化，且过滤消除噪声或其他不需要的信号成分。信号调理器往往针对特定应用进行定制设计。例如，二极管温度计的信号调理器未必适合使用热电偶。

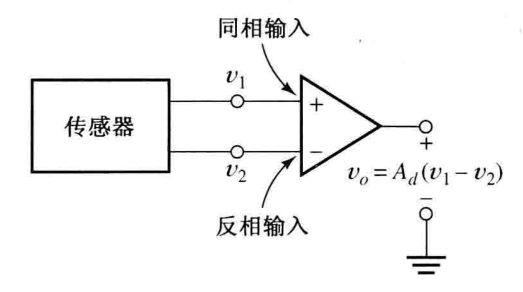
9.2.1　单端与差分放大器

通常情况下，传感器的信号非常小(1 mV 或更小)，且信号调理中重要的一步就是放大，因此传感器通常连接在放大器的输入端。在单端放大器的输入端中，其中一个输入端接地，如图 9.6(a)所示，输出电压等于输入电压乘以增益常数 A。

如图 9.6(b)所示，差分放大器含有同相输入端和反向输入端。理想情况下，输出电压等于两输入电压之差乘以差模增益 A_d。



(a) 单端输入：放大器的一个输入端接地



(b) 差分输入：放大器的两个输入端都不接地，输出电压等于两输入电压之差乘以差模增益A_d

图 9.6　单端输入和差分输入的放大器

图 9.7 是一个典型传感器所产生的电压与差分放大器相连的模型。放大器两个输入电压之差是差模信号：

$$v_d = v_1 - v_2 \tag{9.5}$$

有时，也存在一个大的共模信号，如下：

$$v_{cm} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \tag{9.6}$$

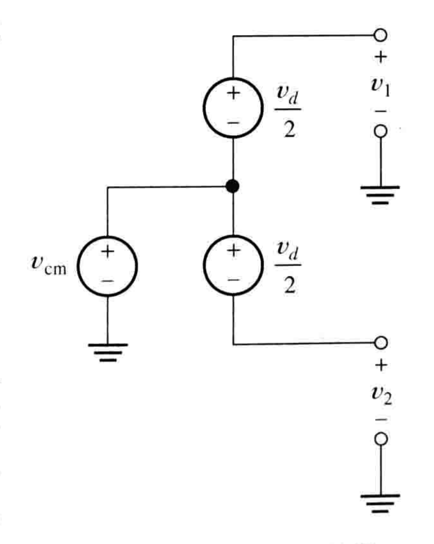


图 9.7　分解为差模和共模成分的传感器模型

通常情况下，我们关注最多的是差分信号，共模信号被认为是不需要的噪声，可见差分放大器仅响应差模信号是非常重要的。在设计放大器时，必须能够拒绝足够大的共模信号影响。衡量差分放大器抑制共模信号能力的参数是共模抑制比(CMRR)。当存在大共模信号时，选择一个大 CMRR 的差分放大器十分重要，而仪用放大器在这方面性能非常好。差分放大器、共模抑制比 CMRR 和仪用放大器将在第 11 章和第 14 章中讨论。

9.2.2　环路接地

通常情况下，传感器和信号调理单元(如放大器或电流-电压转换器)在位置上是分开的，通过导线连接在一起。此外，传感器产生的电压(或电流)可能非常小(小于 1 mV 或 1 μA)，这样可能产生几个问题，如准确度降低，或在极端情况下所需信号被覆盖。

问题之一称为环路接地。如果有一个单端放大器，将其输入端与配电系统的“地线”相连，注意：这些“地线”通向配电板的接地线，然后又与冷水管或者与打入地下的导电体相连。通常检测系统有几个模块电路是通过不同的导线接地的。在理想情况下，接地线的阻抗为零，即所

有接地点都有相同的电压。但实际上，各种地线电阻并不为零，所以各接地点的电压值存在小但又明显的差异。

如图 9.8 所示，设有一个传感器、一个单端放大器和连接其间的导线。导线的电阻非常小，用 R_{cable}表示。图中的几根地线电阻分别为 R_{g1}和 R_{g2}，电流源 I_g表示接地电流。通常情况下，通过仪器的供电电路 I_g起源于 60 Hz 的高频线电压。如果将传感器和放大器输入端都接地，那么 I_g的分流将流过连接导线，而输入电压等于传感器电压减去 R_{cable}的压降：

$$V_{in} = V_{sensor} - I_{g1}R_{cable} \tag{9.7}$$

当传感器电压非常小时，其完全被 R_{cable}压降淹没。

反之，如果不让传感器接地，只让放大器接地，I_{g1}则为零，输入电压确实为传感器的电压。因此，在将传感器连接到单端输入放大器时，应该选择一个未接地的或者浮地的传感器。

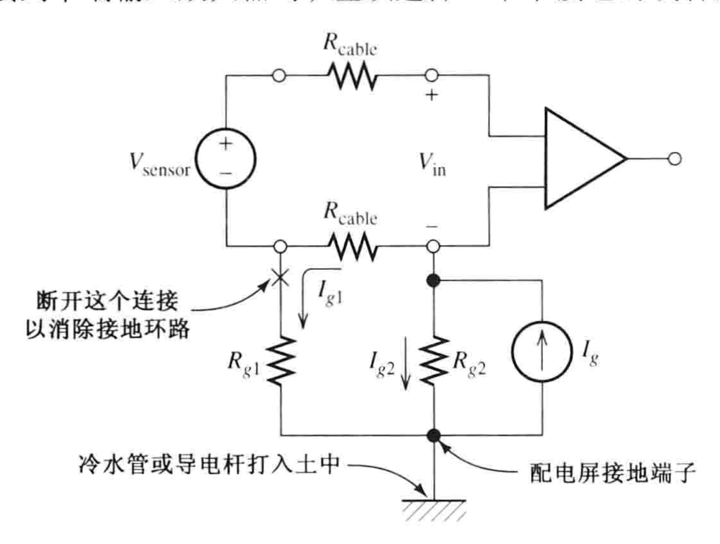


图 9.8 当系统接地于几个点时形成的环路接地

如果你已经连接了几个音像组件，如录像机、电视、收音机调谐器、CD 播放机、立体声功放等，可能遇到接地回路问题，从而导致音响发出恼人的 60 Hz 的嗡嗡声。

9.2.3 替代连接

图 9.9 是传感器和放大器的 4 种连接组合。正如所见，因为接地回路的问题，需要避免图 9.9(a)所示的接地传感器和单端接地输入放大器的连接方式，而其他 3 种连接均可采用。但是，对于图 9.9(d)显示的浮地传感器和差分放大器的连接，通常需要两个高值电阻(远大于传感器的内阻抗，以避免轻载效应)来为放大器的输入偏置电流(输入偏置电流将在 11.12 节中讨论)提供路径。如果没有这两个电阻，输入端共模电压将变得非常大，以至于放大器不能正常工作。在图 9.9(c)中，传感器的接地为偏置电流提供了路径。

9.2.4 噪声

将传感器连接到信号调理单元时还会引起另一个问题，就是由附近电路产生的电场或磁场产生的、无意的噪声叠加(例如计算机产生的高频率噪声)。电场耦合可以通过将附近电路和导线之间连接的小电容来建模，如图 9.10 所示，电流通过这些电容注入到导线中。当使用非屏蔽电缆且传感器阻抗很大时，这更是一个问题。用屏蔽电缆的金属箔或编织线形式的铠甲包住导线，可以消除由电场引起的大部分噪声。该屏蔽体接地，将为电容电流提供一个低阻抗路径，如图 9.11 所示。

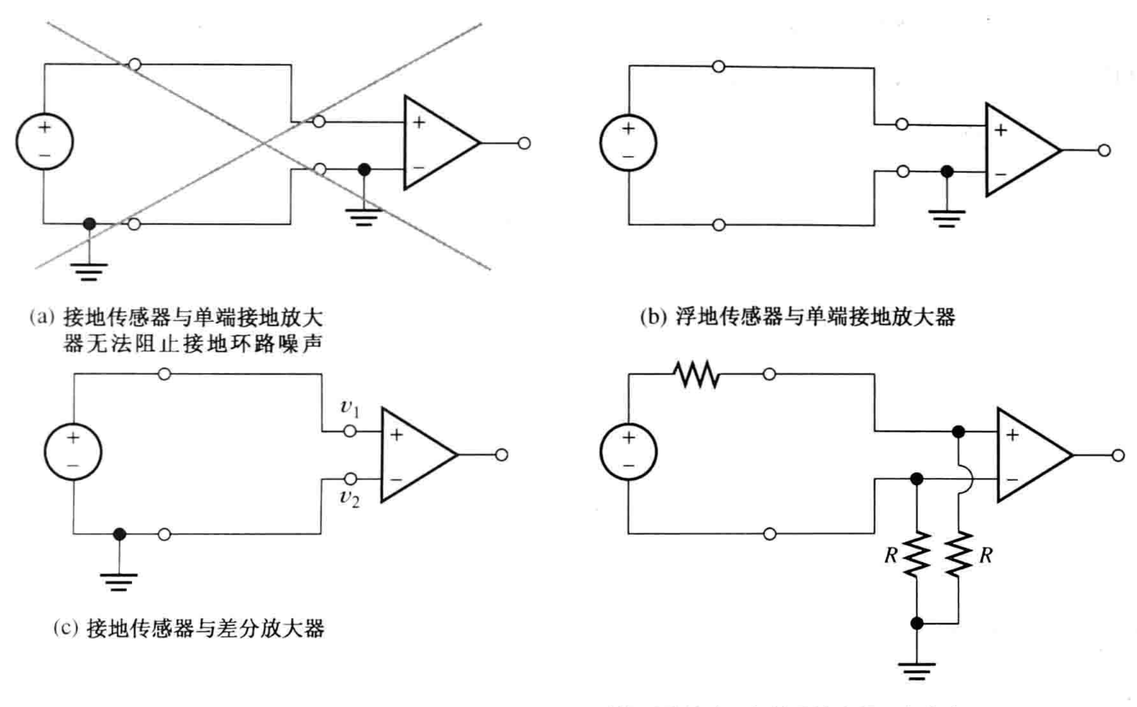


图 9.9　传感器与放大器的 4 种连接组合

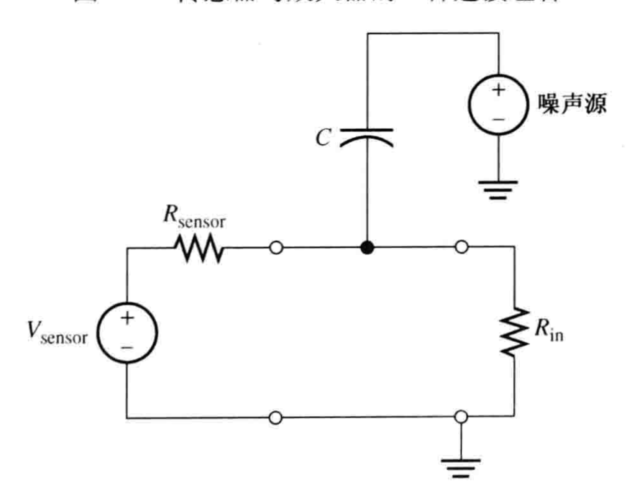


图 9.10　噪声通过电场耦合到传感器电路中，该效果可以等效为噪声源和传感器导线之间的一个小电容

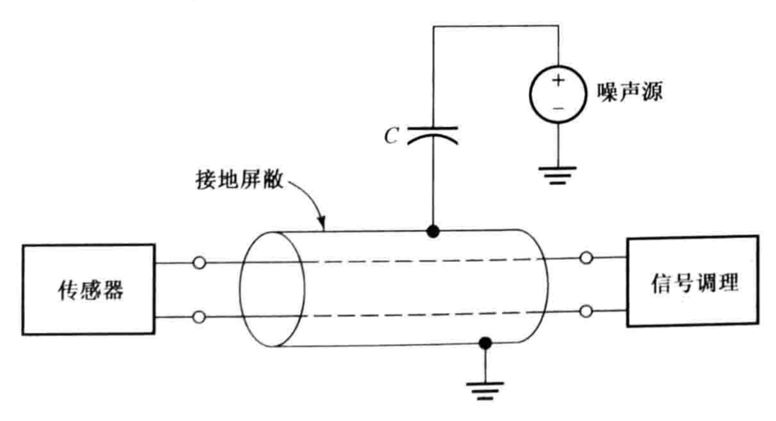
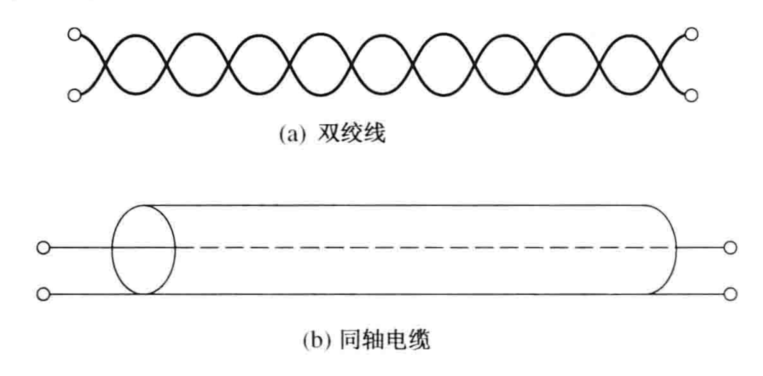


图 9.11　使用屏蔽电缆可以大大减少电场耦合

磁耦合也可以产生噪声问题。许多电路尤其是电源变压器，可以产生时变磁场。当这些磁场通过电缆导体区域时，电缆中会感应电压。通过减小导线的有效界面积可以大大减少磁耦合噪声，双绞线和同轴电缆(见图9.12)就是两种很好的方式，因为同轴电缆中导体的中心线是重合的，其有效界面积是很小的。



(a) 双绞线

(b) 同轴电缆

图9.12 使用双绞线或同轴电缆可以大大减少磁场耦合

练习9.3 传感器产生的电压是 $v_1=5.7$ V，$v_2=5.5$ V，分别计算传感器信号的差模成分和共模成分。

答： $v_d=0.2$ V；$v_{cm}=5.6$ V。

实际应用9.1 虚拟的首攻线

在美式足球中，进攻球队必须在连续4次进攻中前进10码来保持控球。因此，球迷观看比赛时会关注球队推进的标注线。

1998年9月27日，在ESPN周日晚上的橄榄球比赛中，运动视效公司介绍了他们在电视屏幕上采用电子绘画首攻线的"首攻与10码"系统。该系统被人们欣然接受，甚至赢得了技术创新艾美奖。在2003年的赛季中，18名公司员工参与了约300场NCAA和NFL的比赛报道。

虽然在电视屏幕上绘制一个虚拟线的概念听起来很简单，但需要克服一些棘手的技术问题，使其看起来就像在现场绘制的线条一样。通常情况下，有3台主要的摄像头分别位于50码线和场地两侧25码线的上方和后方。在比赛中，每台摄像机平移、倾斜、缩放和迅速改变焦距，当摄像机的视角改变时，需要改变虚拟线的位置、方向和宽度。此外，一些橄榄球场可能不平坦——它们被制造成冠状以确保球场的排水和码线不是完全的直线。另外，如果虚拟线与球场线的曲率不匹配，那它看起来会很不自然。再者，对于每帧视频，需要每秒绘制该线30次。当然，当一名球员、一名裁判员或者球越过虚拟线时，该线的某部分还需要消失。为了达到这些要求，运动视效公司采用了一系列的先进电子技术和计算机技术，令人印象深刻。

为了在给定场地安装系统，运动视效公司开始使用激光测量仪器来测量每条10码线沿线各点的海拔高度，计算机运用这些数据来建立一个虚拟的球场三维模型。

每台摄像机上装载的传感器用于测量平移、倾斜、变焦和对焦。该数据再输入到计算机中，通过改变模型与给定摄像头相匹配，再通过摄像头拍摄的球场上的图像用蓝线绘制虚拟地图。最后，如图PA9.1所示的虚拟地图再通过平移、倾斜和变焦等多种组合的设计，从而与真实形象相匹配。通过保存系统产生的校准数据，最终应用于实际比赛。

一种名为"色度键"的技术已经存在了很长一段时间，并被广泛用于电视的天气预报。预报天气的气象学家站在一块淡蓝色的墙壁前，计算机将淡蓝色的像素(即图片元素)替换为天气图和图形，因此预报员看起来似乎站在天气图前。采用同类技术，可以让裁判员、球员和球越过

虚拟的首攻线。但是，要辨别哪些像素是球员而哪些是场地的一部分，则比将预报员从蓝色墙分离要难得多。通常气象预报员避免穿与墙的颜色一致的衣服，而且墙的颜色都是相同的。然而，球场可能有很多不同颜色的区域，比如白色（球场上的码线）、绿色（草或者人工草皮）或褐色（草或者泥）。部分区域可能阳光普照，但其他部分区域可能在阴影中。一些橄榄球队（比如 Green Bay Packers）的球服有部分是绿色的，与阳光明媚下的人工草皮很难区分开。其他颜色比如棕色，也是很难区分开的。

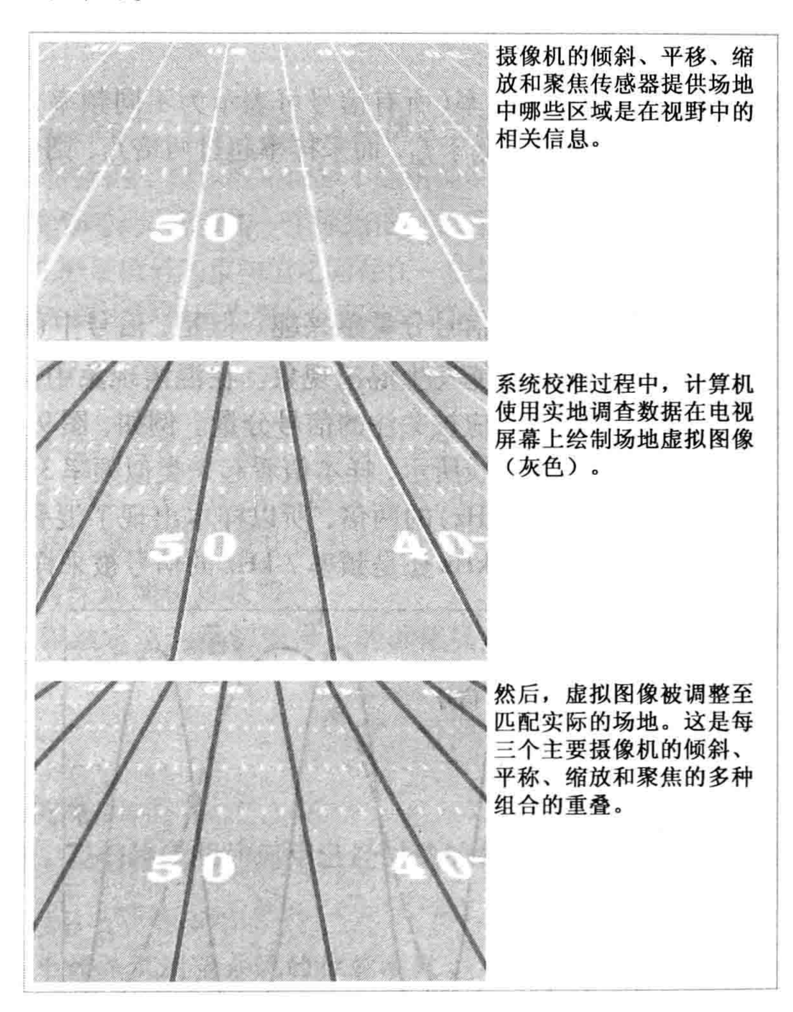


图 PA 9.1　计算机通过扫描橄榄球场地来绘制虚拟图，并实时绘制“首攻与 10 码线”

通过不断的校正，“首攻与 10 码线”系统可以跟踪区别哪些颜色是球场的一部分，哪些不是。所以，虚拟绘制的“首攻与 10 码线”不会越过球员。

在比赛中，有 4 个人在操控系统，包含 5 台计算机。“监视人”待在体育馆内，并且用无线电传送攻线的位置到卡车上，卡车上有设备和两位技术员。该“线定位技术员”将位置数据输入计算机中，监视线的位置，并做出必要的调整。另一个操作员监视场上的颜色改变，便于色度键正确完成。最后，一名“挑刺者”寻找问题并给予解决。

其中一台计算机接收和处理摄像头的平移、倾斜和变焦数据，另一台计算机跟踪“正在广播”的摄像头，第三台计算机显示播出的视频和叠加现场的虚拟图，包括目前的码线；第四台计算机辨别哪部分图像是运动场，哪部分图像是球员或裁判员。最后，第五台计算机在视频上放置虚拟进攻线，同时避免任何交叠的图像被放置在屏幕上。

关于“首攻与 10 码线”系统及其类似技术被应用于播报其他运动的更多信息，详见网站 www.sportvision.com。

9.3 模拟-数字转换

模拟信号转化成数字形式要通过两个步骤。首先，在时间周期点对模拟信号进行采样(即测量)；然后，再分配一个代码代表每个样本的近似值。在选择 DAQ 系统时，采样率和位数是两个非常重要的参数。

9.3.1 采样率

信号的采样率取决于信号各分量的频率(所有信号可表示为不同频率、振幅和相位的正弦分量的总和)。如果信号各分量的频率均低于f_H，而采样率超过两倍f_H，则信号包含的所有信息都存在于样本中。

9.3.2 混叠现象

有时候，我们可能只对频率达到f_H的信号分量感兴趣。但是，信号中可能包含频率高于f_H的噪声或部分分量。如果采样率太低，可能发生混淆现象。在混淆现象中，高频率分量的样本被视为较低频率分量的信息，且可能淹没应被关注的信号分量。例如，图 9.13 是以频率 10 kHz 采样的频率为 7 kHz 的正弦波。如图中虚线所示，样本值看起来类似频率 3 kHz 的正弦曲线，因为采样率(10 kHz)没有高于信号频率(7 kHz)的两倍，所以样本出现了混叠偏差(3 kHz)。(请注意，从样本上不可能看出到底是频率 3 kHz 还是频率 7 kHz 的信号被采样。)

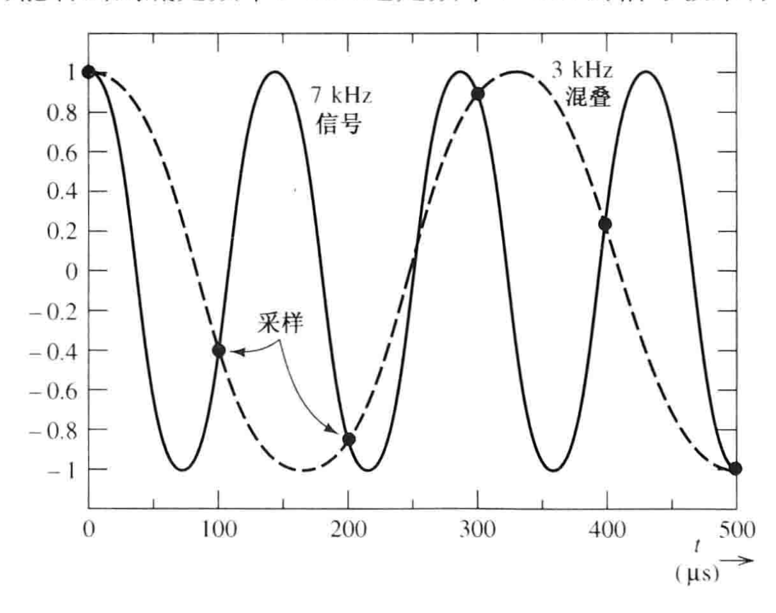


图 9.13 在以频率 10 kHz 采样频率 7 kHz 正弦波时，样本值看起来是频率 3 kHz 的正弦曲线

图 9.14 展示了混叠频率是信号频率f的函数。当信号频率f超过采样频率f_s的一半时，样本的视频率与其真实的信号频率是不同的。

避免混叠现象的方法之一是采用足够高的采样率。这样，混叠频率便高于待关注的信号频率。接着，计算机用数字滤波软件处理样本，删去不需要的频

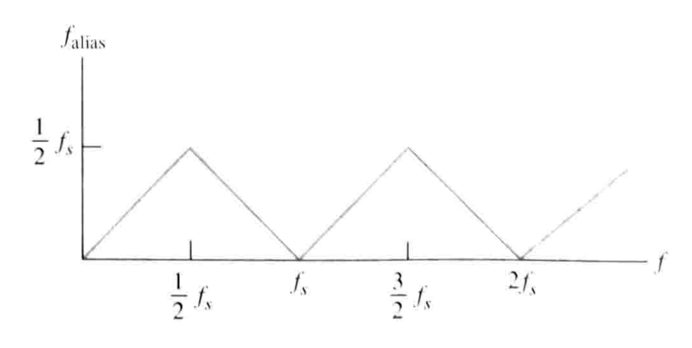


图 9.14 混叠或视频率与真实信号频率的对比

率成分。然而，当高频噪声存在时，将导致采样率超过计算机处理结果数据的能力。这时，建议在 ADC 转换前，首先采用模拟抗混叠滤波器，以消除频率高于被关注信号成分中最高频率的噪声。通常，这是一个带有运算放大器的高阶巴特沃思滤波器，在 14.10 节中有详细介绍。由于实际滤波器无法完全滤掉频率略高于滤波器截止频率的噪声，通常有必要选择采样频率高于有用信息最高频率的 3 倍。例如，音频信号的最高频率大约为 15 kHz，但是在 CD 技术中所用的采样频率是 44.1 kHz。

9.3.3 量化噪声

模数转换时需要考虑的第二个重要因素是幅值区的量度。由于幅值进入同一个特定区间的所有模拟信号均表示为相同的码字，所以数字信号不能精确反映模拟信号，当一个数模转换器(DAC)将码字还原为原始的模拟波形时，只能重构一个原始信号的近似值——该重构电压介于每个区域中间，如图 6.47 所示。因此，在原始信号和重构值之间存在一些量化误差。使用的区间越大就可以减小此误差，但是，这会导致每个样本被表示为更长的码字。幅度区间数 N 与码字的比特数 k 的关系式为

$$N = 2^k \tag{9.8}$$

因此，如果使用一个 8 位($k=8$)的 ADC，会有 $N=2^8=256$ 个幅度区间。基于计算机测量系统的分辨率受限于 ADC 的字长。在高密度光盘技术中，16 位字用来代表样本值，这样的位数下，用一个侦听器来检测重构音频信号的量化误差的影响是非常困难的。在电话系统中通常使用 8 位字，且重构音频信号的保真度相对较差。

有限字长效应可以被定义为重构信号上的量化噪声。量化噪声的均方根值约为

$$N_{q\text{rms}} = \frac{\Delta}{2\sqrt{3}} \tag{9.9}$$

其中，Δ 表示量化区的宽度。

在下面的例子中，我们将说明如何用已经讨论的各种因素来选择一个基于计算机的测量系统的功能模块。

例 9.2　一个基于计算机测量系统的性能参数。

设有一个单端接地(即传感器的一个终端连接到电力系统的地)的压电振动传感器产生一个有用信号，其峰值为 ±25 mV，均方根值为 3 mV，且信号各分量的频率最高达 5 kHz。该传感器的内阻为 1 kΩ。我们希望分辨率为 2 μV 或更好(即更小)、准确度为峰值信号的 ±0.2% 或更好(注：要求分辨率大大优于精度，这样系统能够识别比误差还小的信号变化)。探头接线可能暴露在电场和磁场噪声中，该噪声含有频率高于 5 kHz 的分量。所用的 ADC 的输入范围为 −5 V ~ +5 V。请绘制测量系统的框图，并给出每个模块电路的主要性能参数。

解： 由于传感器的一端是接地的，因此需要使用差分放大器以避免接地回路问题(见图 9.9(c))。

为了减少电容和电感耦合噪声，应该选择屏蔽双绞线或同轴线来连接传感器和检测系统。为了避免接地回路，屏蔽层应只在传感器端接地。此外，应该使用抗混叠滤波器来减少 5kHz 以上的噪声。系统框图如图 9.15 所示。

测量放大器和抗混叠滤波器组合电路的电压增益应该为 200(=5 V/25 mV)，这样，传感器的信号被放大到匹配 ADC 的电压范围。与传感器内阻相比，放大器的输入阻抗应该非常大，因此轻载效应是可以忽略的。如果选定一个 1 MΩ 的最小输入阻抗，负载效应将减少0.1%，达到了要求的准确度(允许来自其他未知源的误差存在)。

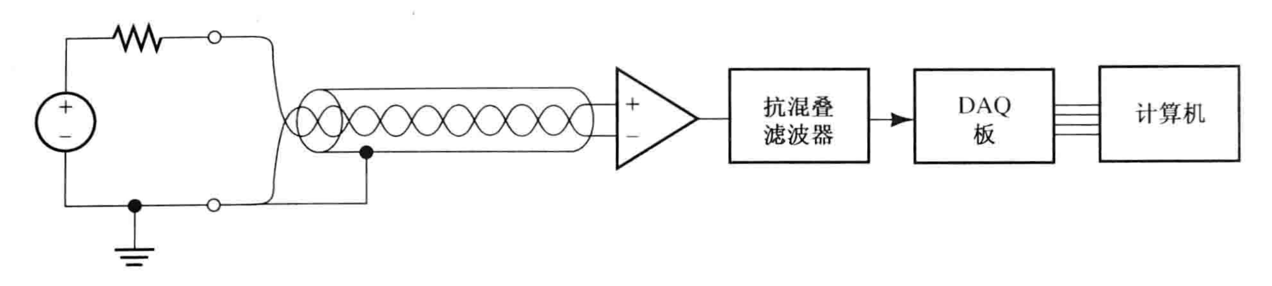


图9.15 见例9.2

要实现一个 ±25 mV 信号的分辨率为 2 μV，需要一个振幅级别至少为 25 000(即50 mV/2 μV)的 ADC。这就意味着 ADC 的字长至少为 $k = \log_2(25\ 000) = 14.6$。由于字长必须是一个整数，则 $k = 15$ 是能满足所需规格的最小字长。事实证明，16 位 ADC 的数据采集卡是完全可用的，为了能够提供一些设计余量，我们应该指定字长。

因为被关注的信号最高频率为 5 kHz，所以需要一个不低于 10 kHz 的采样频率。但是，抗混叠滤波器不能有效去除略高于5 kHz 的信号分量，所以应该选一个更大的采样率(20 kHz 或更高)。

练习9.4 某 8 位 ADC 接收信号的范围为 −5 ~ +5 V。请计算每个量化区间的宽度和量化噪声的近似均方根值。

答案： $\Delta = 39.1$ mV；$N_{qrms} = 11.3$ mV。

练习9.5 一个 25 kHz 的正弦波在 30 kHz 时采样。请计算混叠频率的值。

答案： $f_{alias} = 5$ kHz。

9.4 LabVIEW

在传感器信号被调理、转换成数字形式且读入计算机后，我们准备采用复杂的程序来提取感兴趣的信息，这些信息可以显示或用于控制一个物理系统。与传统的专用仪器相比，这种做法有利于以较低成本迅速研发专门的应用仪器。

9.4.1 虚拟时频振动分析仪

一个典型的例子就是时频振动分析仪，它对机械工程师来说是一个功能强大的工具。在设计汽车(或受制于振动的其他机械系统)时，一个传感器收集速度增加时的振动信号，而另一个传感器则测量发动机转速。然后，分析软件再计算振动组件的振幅与频率以及发动机转速(与时间近似成正比)的关系曲线。接下来，该软件创建一个平面图，在水平刻度上显示发动机转速(rpm 转/分或时间)，在垂直刻度上显示频率，用颜色区别在转速-频率平面中各点的振幅。图9.10 是一个典型的检测结果。

通常情况下，振动部件产生包含很多频率分量的信号，每个频率都随转速呈线性增加，表现为转速 − 频率平面上的倾斜向上的多簇条纹。在机械系统中，多个频率信号分量之间可能不相关，但它们均与发动机的参数相关，如齿轮比。例如，一个信号分量的频率可能是另一个频率的1.57 倍。从分析仪显示器上可以发现这种关系，加上对系统设计参数的认识，可以很快揭示振动的一些来源。

发动机或车辆的各部分可能呈现出机械谐振，即在某个特定的频率剧烈振动。当振动频率通过这些共振体时，振动幅度将会越来越大，如图9.16 所示的水平条纹。一旦有了这样一个强

大的工具，工程师便可以调查恼人的共振源。例如，如果将手按在某个共振体上抑制了振动，则会看到水平条纹的强度下降，从而发现此共振源。相似地，替代消声功能的附加测试可以用来改进车辆的设计。

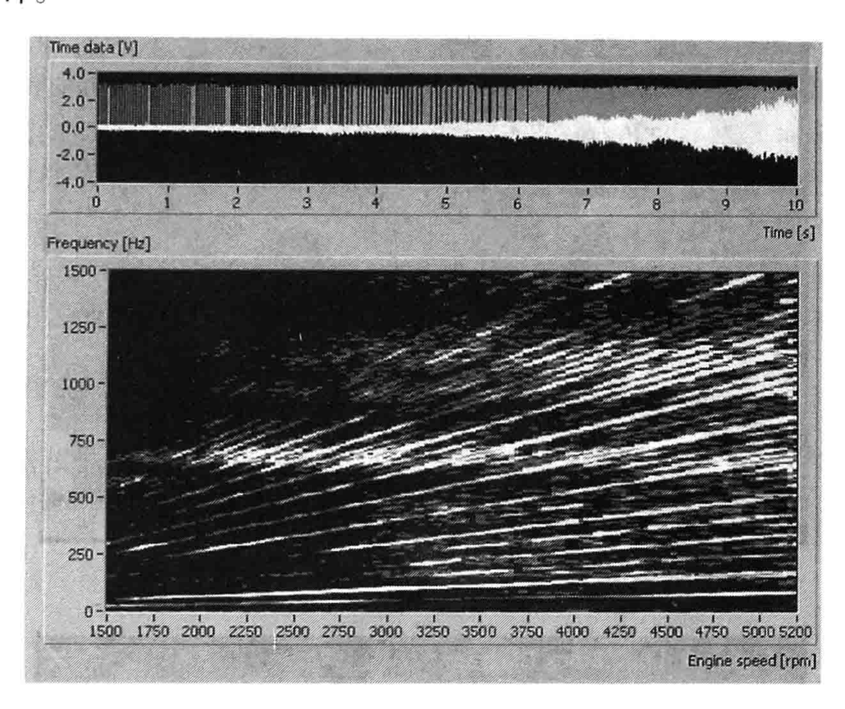


图 9.16　时频分析仪显示的发动机振动信号

9.4.2　LabVIEW 软件

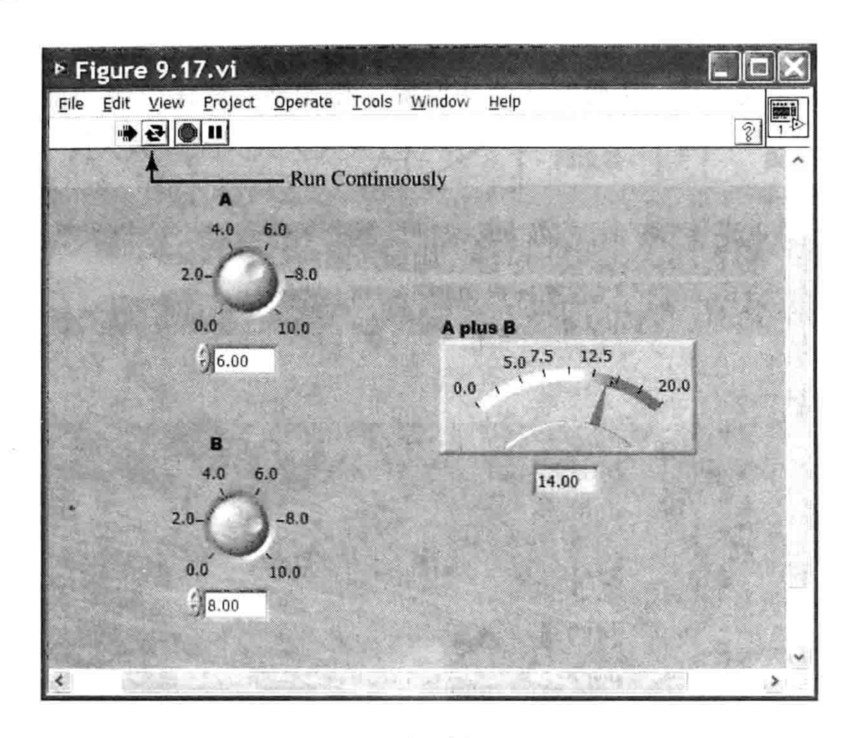
LabVIEW 是 National Instruments 公司的一个产品，是所有工程师和科学家在开发如时频振动分析仪等精密仪器仪表时使用的行业标准方案。LabVIEW 是 Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench 的缩写。

LabVIEW 是一种面向对象的图形化编程语言，其风格、语法和数据流与基于文本的编程语言如 C、Pascal 或 FORTRAN 很不相同。例如，FORTRAN 语句 $X = X + 1$ 表示 X 的值被 X 先前值加 1 来代替。然而，LabVIEW 中 X 的新值将适用于移位寄存器的某个图标，X 的旧值将出现在移位寄存器的输出端。因此，X 的新值和旧值可以根据在图中的位置很清晰地分辨出来。语句 $Z = XY$ 在 LabVIEW 中是一个带“线”的图形化的乘数图标，携带 X 到输入端，Y 在另一个输入端，Z 则出现在输出端图标上。

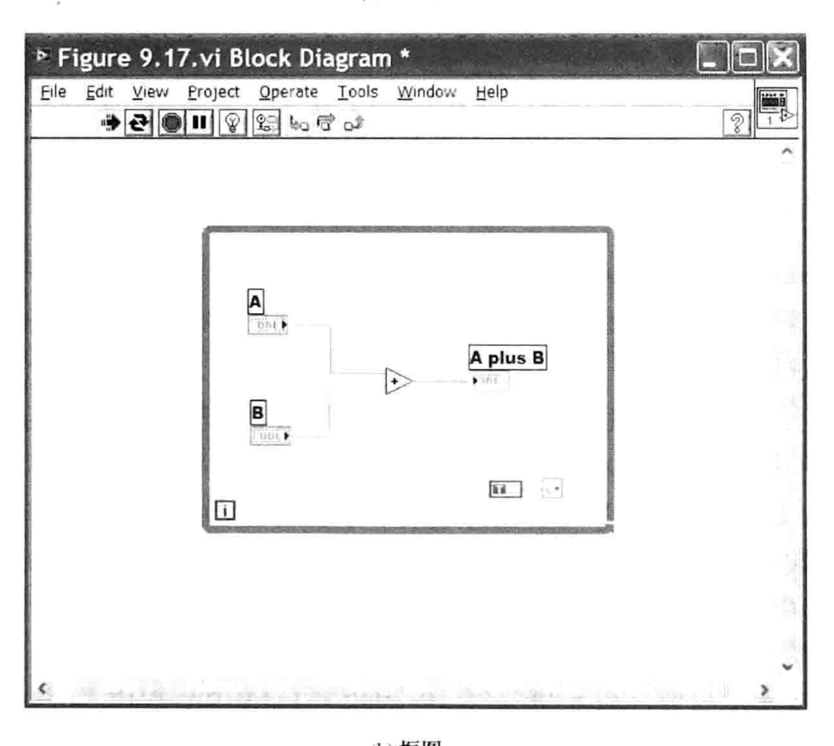
我们摒弃使用文本编辑器产生的代码行，而创建了 LabVIEW 程序，也称为在计算机屏幕上定位和互联图标的虚拟仪器(VI)。LabVIEW 程序在程序员面前以前面板和框图的形式呈现。在一般情况下，前面板包含开关、按钮、旋钮和虚拟仪器操作员在输入分析参数时使用的滑块。此外，前面板还包含公尺、仪表、曲线图或图表，用以显示结果。例如，图 9.17 显示了一个简单 LabVIEW 程序的前面板和框图，该程序的作用是将两个数相加并显示总和。前面板包含了一个显示结果的仪表和两个按钮，操作者通过按钮改变变量 A 和 B 的输入值。

框图显示了仪器如何分析传感器数据以及从前面板输入的数据。LabVIEW 使用数据流的概念，这意味着直到所有的输入数据提供给某个特定块，该块才进行计算。传感器数据流通过各种处理块到显示器或控制器，再通过数据采集板到达物理系统中的执行器。

如果你在自己的计算机上安装 LabVIEW 2009(安装说明详见附录 F)，则本节剩余部分讨论的例子对你会更有意义。



(a) 前面板



(b) 框图

图 9.17　一个简单的 LabVIEW 虚拟仪器

计算机安装了 LabVIEW 2009 之后，就可以启动程序，并打开如图 9.17 所示命名的 VI 程序。单击按钮 Run Continuously(持续运行)，使用输入旋钮或向上/向下箭头来改变 A 和 B 的值，并核实仪表上显示的总和是否正确。然后，键入 Control E 并查看框图。图 7.25(a)所示的另一个例子 VI 说明了图 7.25(a)所示的逻辑电路。

LabVIEW 包含许多复杂和实用的功能，远比本章讲述的多。在你的职业生涯中，如果需要一个复杂而独特的仪器，许多书籍和资源都可以给你提供帮助。事实上，你会发现 LabVIEW 对你的高级工程课程学习是非常有用的。

9.4.3　模拟数据源

LabVIEW 的主要目的是处理在现实中从传感器获得的数据。但是，它也可以被用来创建一个完整的虚拟系统，VI 创建仿真数据，然后像分析实际数据一样进行分析，这对于同时学习编程技术和调试 VI 来说是非常有用的。通常，在设置一个新的测试系统时，我们不知道从现实中可以获得怎样的数据。当结果令人惊讶时，我们可能不确信虚拟仪器的确完成了预定的功能。一个好的方法就是用模拟数据调试一个新的 VI，直到它看起来运行正确为止。从已知的测试案例中获得满意的结果后，我们就有信心将 VI 应用于实际应用中。此外，作为教科书的一部分，要提供一个实验台、传感器、信号调理器和 DAQ 板是不太现实的，因此书中的举例和练习题都使用了仿真数据。但是，请记住，LabVIEW 提供了一个强大的方式可以从实际系统中采集和分析数据。

9.4.4　使用 VI 程序计算平均值和有效值

作为一种精密仪器的一小部分功能，通常需要分析一个信号，计算其平均值(直流分量)和有效值。这些值以信号 $x(t)$ 定义为

$$X_{\mathrm{dc}} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t \tag{9.10}$$

$$X_{\mathrm{ac-rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [x(t) - X_{\mathrm{dc}}]^2\,\mathrm{d}t} \tag{9.11}$$

其中，如果信号是周期性的，则 T 是信号周期。[或者，在非周期性信号的情况下，T 是足够长的时间间隔，包含 $x(t)$ 代表段。]

接下来，我们将演示如何使用 LabVIEW 来创建一个仿真信号并分析数据，以计算并显示其平均值和有效值。请用自己的计算机来模仿整个过程。

首先，选择一个如下形式的测试信号：

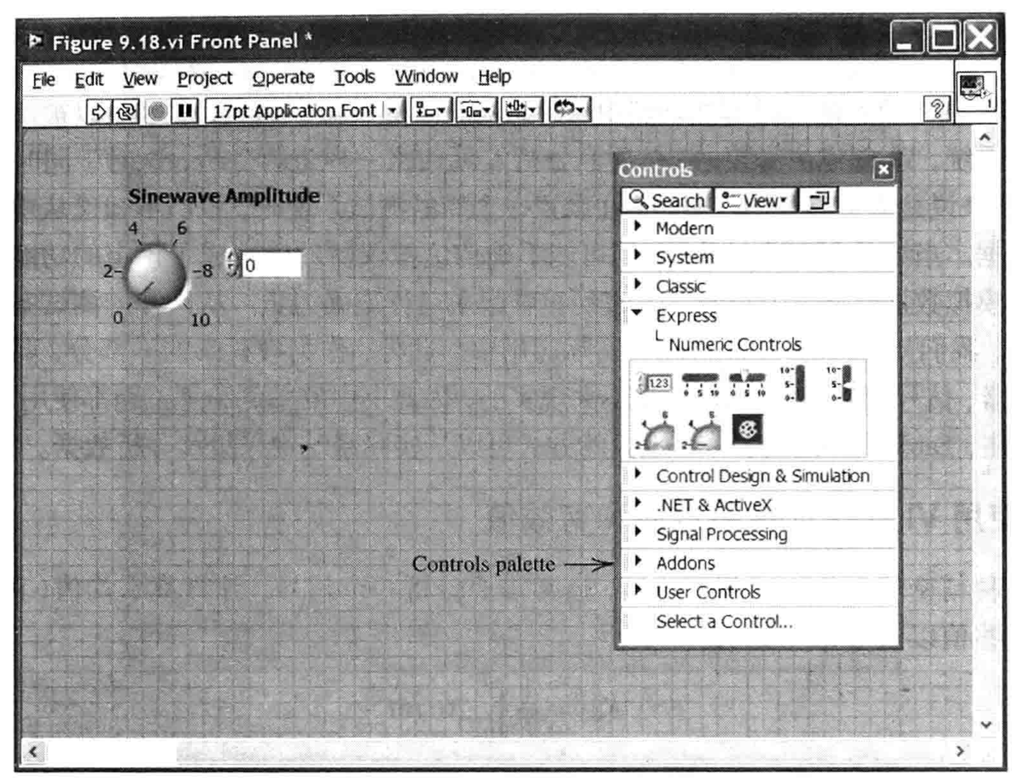
$$x(t) = X_{\mathrm{dc}} + X_{\mathrm{peak}}\sin(2\pi ft) \tag{9.12}$$

将控制图标放置在前面板上，所以操作者可以调整平均值 X_{dc}(也称为直流偏移)、交流分量的峰值 X_{peak} 以及频率 f。当然，该测试信号的有效值是其峰值除以 $\sqrt{2}$，即

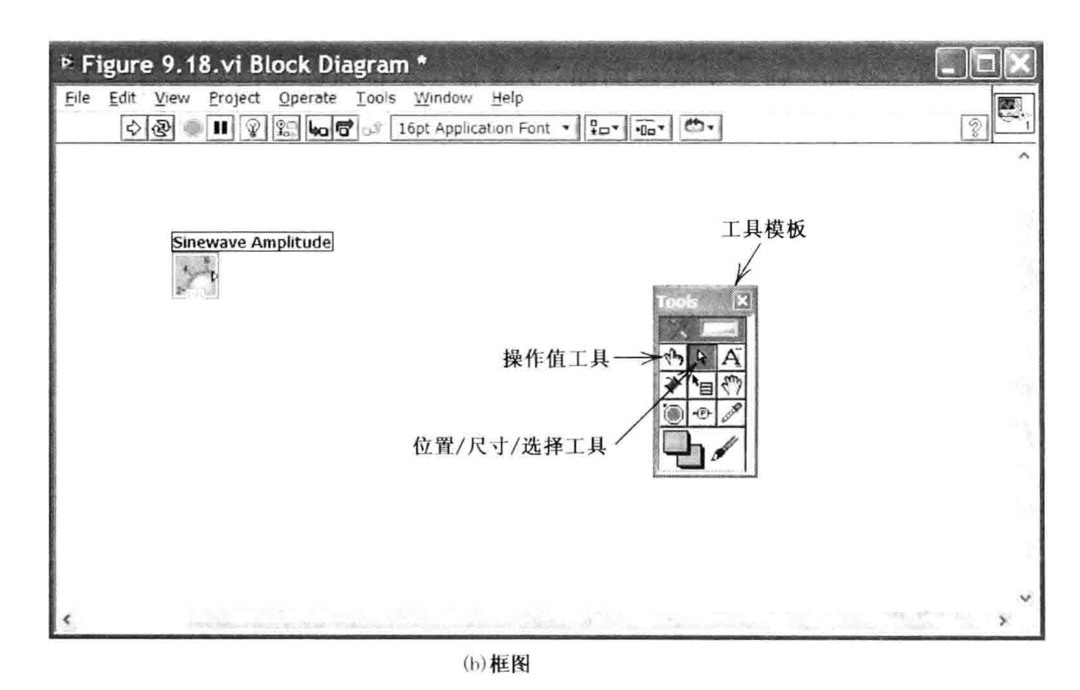
$$X_{\mathrm{ac-rms}} = \frac{X_{\mathrm{peak}}}{\sqrt{2}} \tag{9.13}$$

9.4.5　构建前面板

1. 单击 LabVIEW，在 Getting Started 开始窗口单击 Blank VI，屏幕上会弹出两个窗口。灰色背景的窗口包含 VI 程序的前面板，白色背景的窗口则包含框图。
2. 单击前面板窗口(灰色背景)以激活。如果看不见控制面板，单击 View > Controls Palette。然后，单击 Express > Numeric Controls > Dial，将光标移动到定位表盘的前面板窗口，单击将其拖放到一个地方。接下来，从键盘上输入 Sinewave Amplitude。然后，将光标放置在表盘上，右击并选择 Visible Items > Digital Display。至此，前面板就会出现在屏幕上，如图 9.18(a)所示。
3. 单击框图窗口(白色背景)以激活(如果框图窗口没有打开，使用 Window > Show Block Diagram 命令)，单击 View > Tools Palette。然后，屏幕应该与图 9.18(b)所示相似。标记了 Sinewave Amplitude 的板块包含一个终端，输出由前面板上刻度盘选择的值。然后，将终端连入框图中。这样，操作员在前面板上的刻度中即可设置正弦测试信号的峰值。



(a)前面板



(b)框图

图 9.18 选择和标记了刻度盘控制图标的正弦波振幅的前面板和框图

4. 返回到前面板(灰色背景)并重复这些步骤，以放置标记了 DC Offset 的第二个图标和标记了 Sinewave Frequency 的数控图标(数字控制面板的左上角)。
5. 单击 Express > Graph Indicators > Waveform Chart，并将波形图放置在前面板上。然后，从键盘上输入波形图的标题。将光标移到显示图标上，单击鼠标右键弹出菜单。之后，选择 Visible Items > Plot Legend 和 Visible Items > X Scale 命令，以隐藏图例和 x 轴的刻度。接下来，使用 Position/Size/Select 工具定位和调整控制面板上的图标，使它们看起来与图 9.19大致相同。最后，使用 Operate Value 工具编辑 y 轴上下两侧的值，范围从 -10 到

+20。如果你无法实现这一目标，可以从名为“Hambley Virtual Instruments”的文件夹中加载名为 Figture 9.19 的文件(如何访问该文件夹的信息，详见附录 F)。

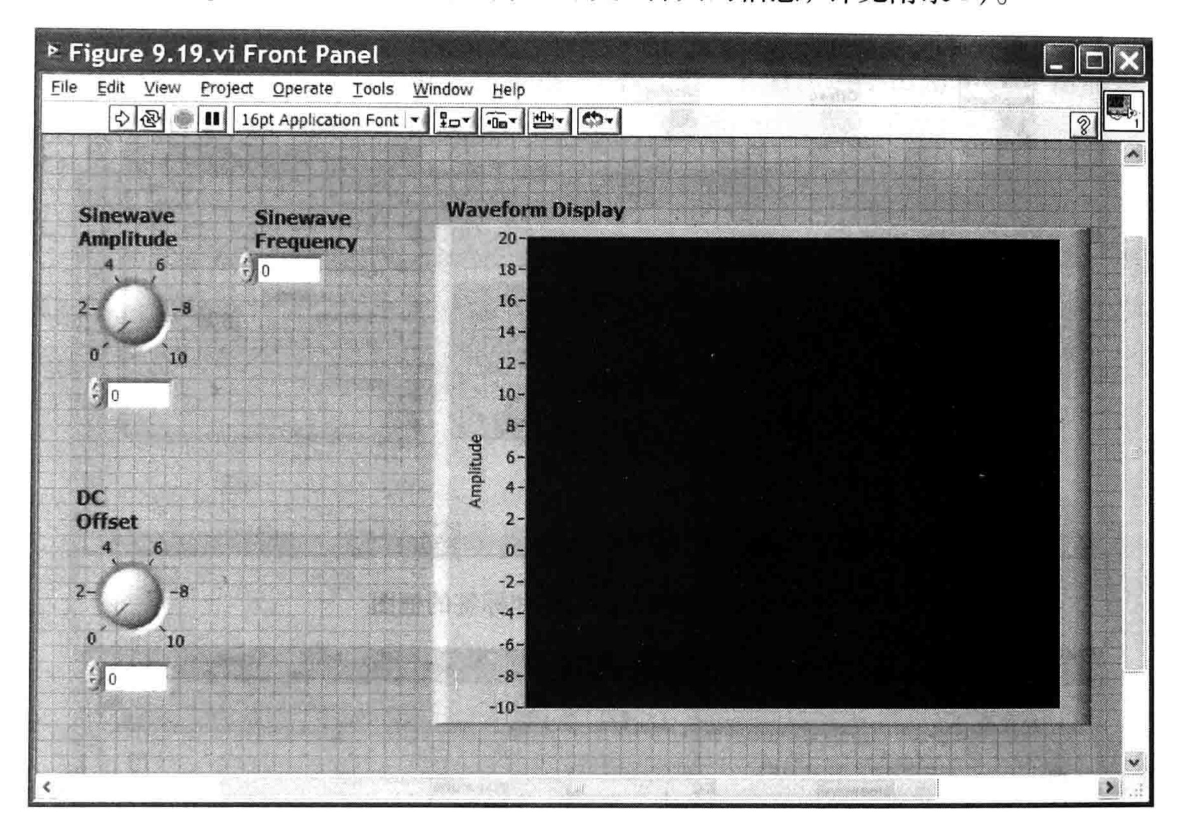


图 9.19　含有控制和波形显示功能的前面板

6. 使用 Window > Show Block Diagram 命令切换到框图窗口。此外，如果看不见功能菜单，可使用 View > Functions Palette 命令。使用 Position/Size/Select 工具定位图标，如图 9.20 所示。确保当你左键单击每个方块时，最近的一个标签就是被选中的那一个(因为标签可以独立移动，与终端无关，有可能将标签误放在紧邻的而不是预计的终端)。就像前面所述，你也可以从标记为 Figture 9.20. vi 的文件夹中下载此操作。

   到目前为止，我们已经简单设置了测试信号的显示和前面板的控制，便于操作员调整测试信号的参数。接下来，我们将创建一个图形界面程序(在框图窗口中)，并使用这些参数来产生测试信号。

7. 首先在框图上选择和定位功能块，如图 9.21 所示(图中的一些标签是之后添加的，当前没有出现在电脑屏幕上)。各个功能块的路径如下。

   相加块：Mathematics > Numeric > Add；

   相乘块：Mathematics > Numeric > Multiply；

   相除块：Mathematics > Numeric > Divide；

   正弦函数：Mathematics > Elementary & Special Functions > Trigonometric Functions > Sin；

   2π 块：Mathematics > Numeric > Math & Scientific Constants > 2 * Pi；

   等待图标：Programming > Timing > Wait (ms)；

   循环语句：Programming > Structures > For Loop。

   将框图窗口的左上角定位为循环图块，并按住鼠标按钮，拖动右下角装入所有图标(除 Waveform Display 以外)，如图 9.21 所示。

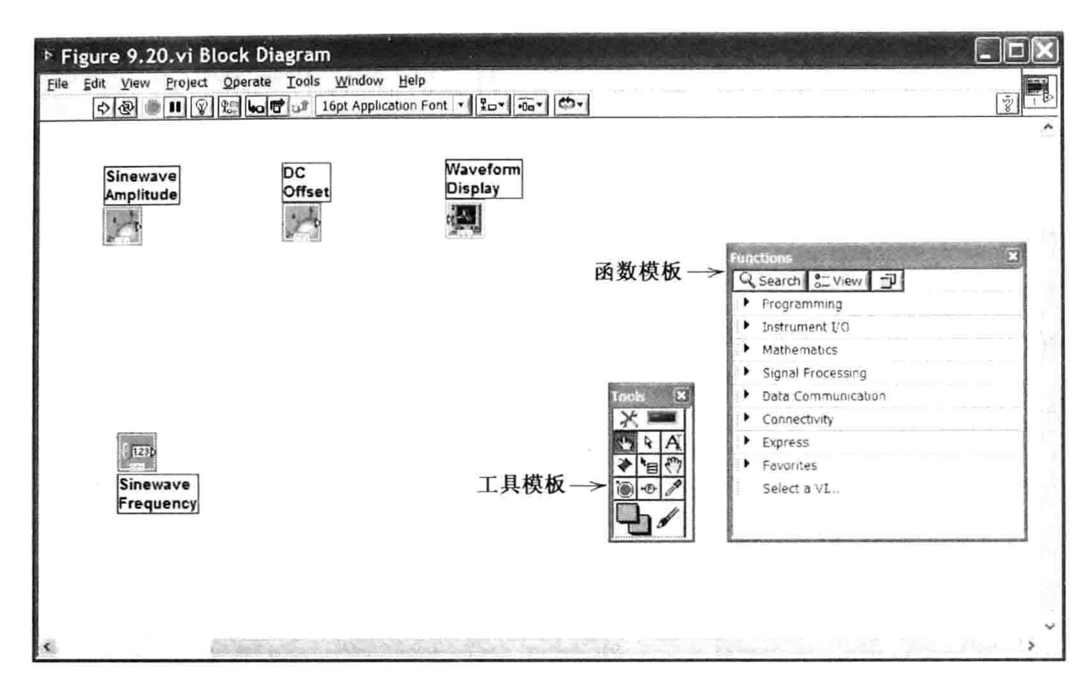


图 9.20 重新定位终端和标签的框图

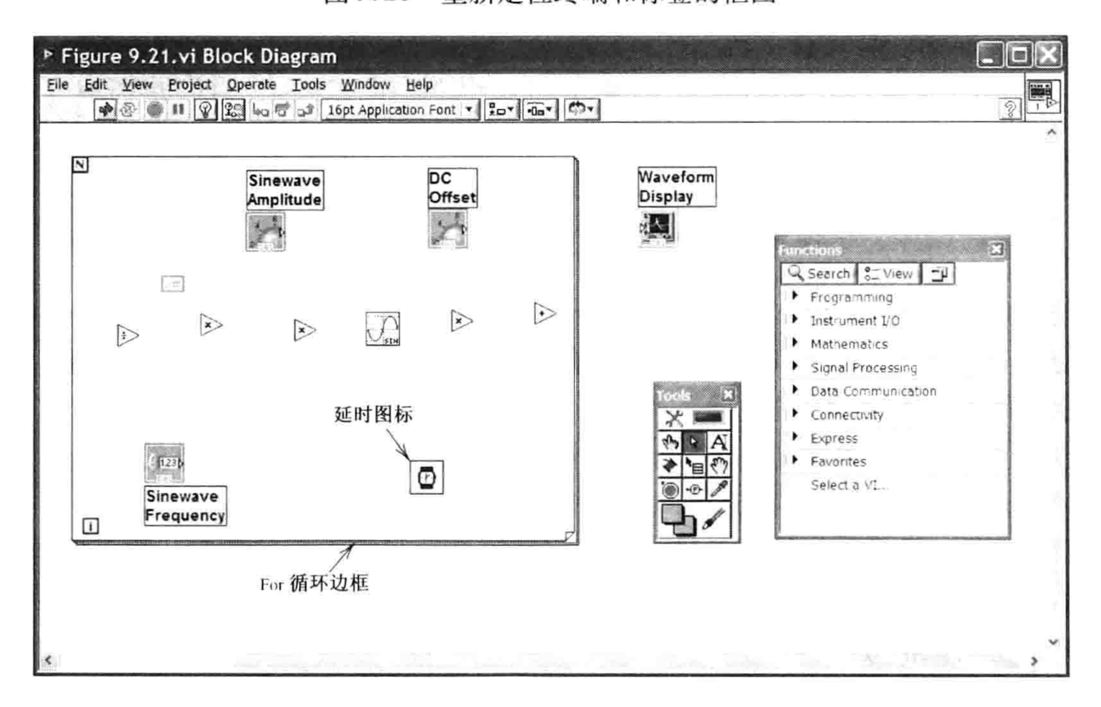


图 9.21 相加功能块的框图

8. 接下来，按照图 9.22 所示添加常数和连接图标。首先，右击左上角的循环块，从弹出框中选择 Create Constant，并输入数字 361。然后，从工具面板上选择 Connect Wire 工具。为了用导线将循环索引连接到除法器上(回路中块的左下角标记为 i)，单击循环块索引，将光标移动到除法块的输入端上并单击。接下来，右击除法器的较低的那个输入端，选择 Create > Constant，并输入数字 360。使用 Connect Wire 工具完成布线。跟之前一样，包含这个操作的 VI 程序存储在名为 Figture 9.22 的文件夹中。
9. 现在，返回到前面板并单击 run continuously 按钮(此按钮的位置如图 9.23 所示)。然后，调节控制图标，观察显示器。通过前面板控制，设置正弦波的振幅为 10，直流偏移为 5，频率为 2，这样你应该能获得与图 9.23 相似的显示结果(在此之前，需要在显示上右击，然后选择 XScale > AutoScaleX 命令)。

顺便说一下，这里有 3 种不同的方式来调理振幅和直流偏移。

A：点(按住鼠标左键)旋转表盘；

B：单击表盘下面数字指示器左边的向上或向下箭头；

C：将光标放在表盘下方的数字指示器内并输入一个值。当单击指示器外前面板上的空白区域时，这个操作是有效的。

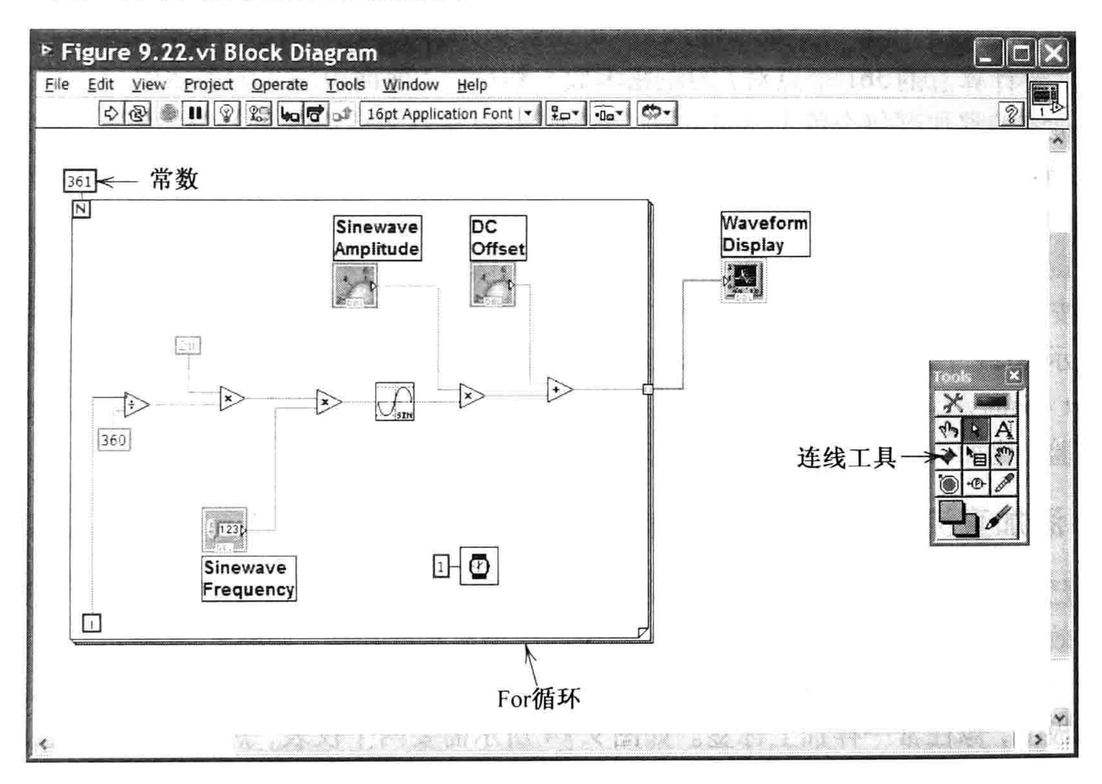


图 9.22　添加常量和线之后的框图

运行　连续运行　停止

Figure 9.22.vi Front Panel

图 9.23　显示模拟数据的前面板

9.4.6 程序运行

接下来，观察图(见图 9.22)并了解此程序的执行。每次执行该程序时，循环结构里面的所有功能将运行 361 次，从 $i=0$ 开始，每次迭代递增直到 $i=360$。在创建这个程序时，我们设定 i 代表按照 1 度逐渐递增的角度。除以 360 并乘以 2π 就可以将这些角度转换为弧度，再将弧度乘以频率 f(从前面板上作为一个整数输入)。正弦模块则计算每个角度的正弦，所以，每执行一次循环，就要计算总的 361 个点对 f 的正弦函数。然后，从前面板输入的振幅值与正弦波的值相乘，并将直流偏移加到每个值上。

每次循环结束后，361 个数据点的数组将被传递给显示器(事实上，被传输的数组用图中显示的更宽的连接线将循环运算的结果连接到显示器)。转到前面板，单击 stop 图标停止程序的运行。右键单击显示器弹出显示菜单，并选择 Data Operations > Clear Chart，你会发现，当每次单击 run 按钮(不是 run continuously 按钮)时，信号的 f 周期将出现在显示屏上。在默认情况下，显示器显示 1024 个点，所以当单击 run 按钮 3 次后，显示器就被填满了。你可以使用快捷菜单里的 Chart History Length…改变显示的点数(在显示屏上右击)。你也不妨用这个或其他的改变来做做实验，比如将图表中的显示图标移动到循环结构中。

9.4.7 添加直流和有效值功能的虚拟仪器

既然已有一些可运行的仿真数据，我们可以放置和连接其他图形程序元素来计算数据的平均值和有效值。另外还需要在前面板显示器添加结果显示的功能，如图 9.24 所示。为了获得前面板仪表图标，在 Controls Palette 中选择 Express > Numeric Indicators > Meter。然后，把仪表图标置于前面板上，像往常一样加上标签。如图 9.24 所示需要两个仪表，然后右击每个仪表，并使用 Visible Items > Digital Display 命令，在每个仪表的下方添加数字显示。

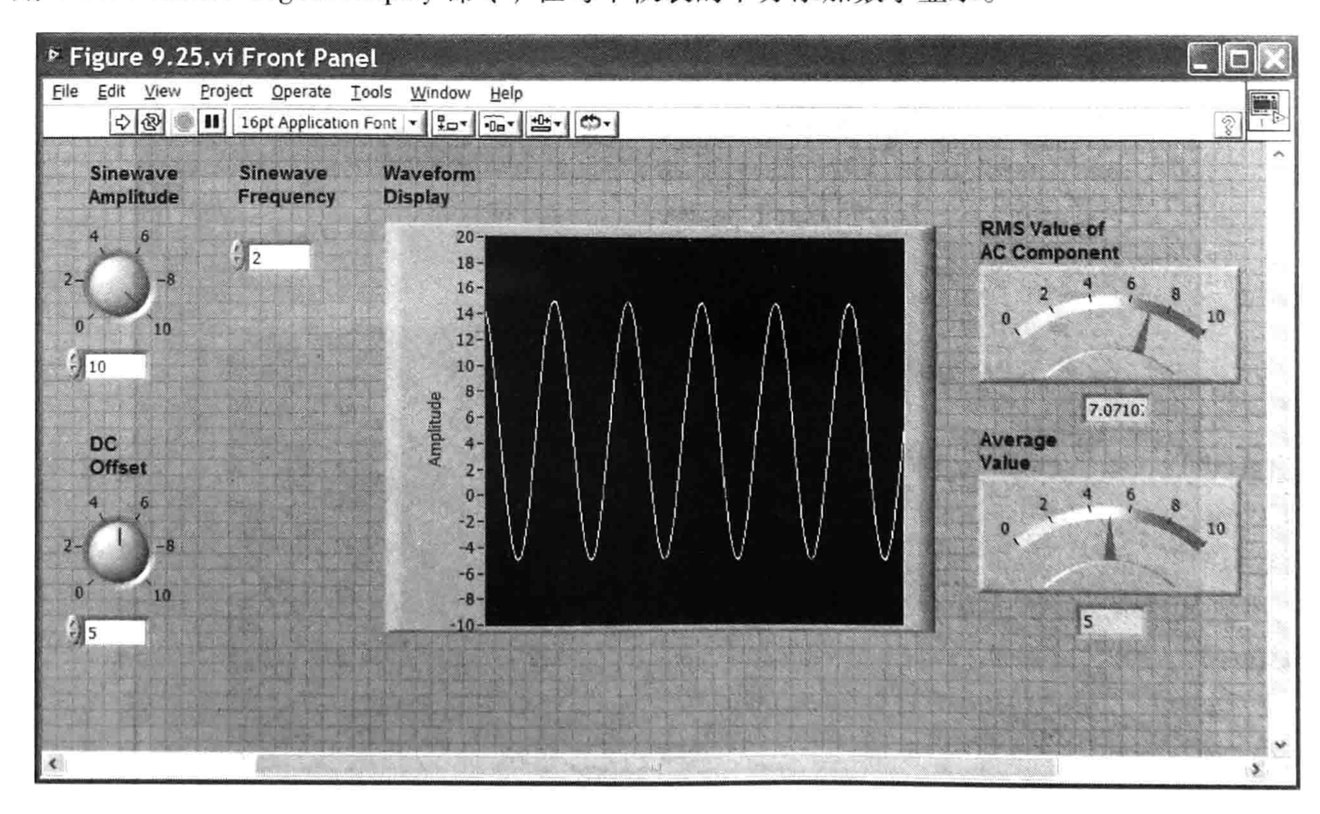


图 9.24 完整的前面板

图9.25显示的框图可获得每361个点阵列的平均值。为了方便，在此重复式(9.11)：

$$X_{\mathrm{dc}}=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}x(t)\,\mathrm{d}t$$

该式表明需要在一个周期(从 $t=0$ 到 $t=T$)内对信号进行积分运算，再除以周期(持续时间)。理论上讲，可以令 $T=1$，且数组值的时间增量是1/360。积分模块可以在功能菜单中找到，即单击 Mathematics > Integration&Differentiation > Numeric Int…(事实上，积分模块是一个图形语言描述的VI子程序)。如果双击积分模块，就可以看到其内部结构：积分器的输入是被积分的阵列、积分算法(右键单击输入和利用弹出菜单选择 Create > Constant > Simpson's Rule)和样本之间的时间间隔。

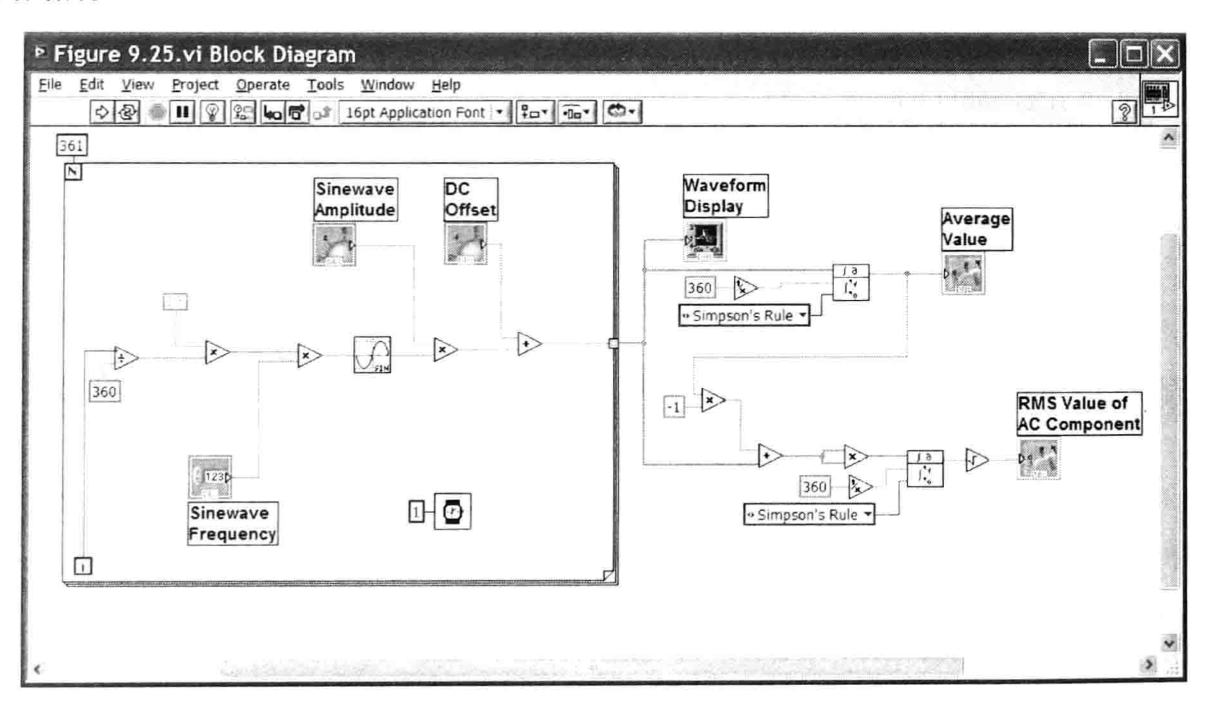


图9.25 完整的框图

根据式(9.11)，信号的有效值为

$$X_{\mathrm{ac-rms}}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{0}^{T}[x(t)-X_{\mathrm{dc}}]^{2}\,\mathrm{d}t}$$

相应的图形代码如图9.25所示。首先，从输入数组中减去直流分量(平均值)。然后，将结果与乘法器的两个输入端相连。当乘法器运行数组时，数组的相应元素就相乘。因此，我们得到一个包含输入数组值平方的数组，这就是积分(这里再次令 $T=1$ 和 $\Delta t=1/360$)。最后，平方根被计算并显示出来。

现在返回到前面板，单击 run continuously 按钮并调整控制旋钮。我们将看到平均值仪表精确地表示仿真数据的直流偏移值，此外，有效值仪表显示了交流分量的均方根值，其值是振幅除以 $\sqrt{2}$。

在科学或者工程学的任何领域，很多更精密的分析可以通过传感器、DAQ板和LabVIEW来执行。登录网站 www.ni.com，可以了解 LabVIEW 软件更多其他的功能以及图形化编辑语言。本书是为了使大家尽可能了解和熟悉此软件，作为合适的工具帮助大家的工作。

练习9.6 使用 LabVIEW 的评估版本创建如图9.17所示的VI程序。

9.4.8 LabVIEW 软件的 MathScript 工具包

MathScript 是 LabVIEW 的一部分，包含了一些与本书中讨论的 MATLAB 的相同的功能。为了访问 MathScript，请运行 LabVIEW 程序，并使用命令 Tools > MathScript Window。接下来举例说明怎样求解方程(2.36)中的节点电压方程。为了方便，重写方程如下：

$$\mathbf{GV} = \mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix} 0.45 & -0.25 & 0 \\ -0.25 & 0.85 & -0.20 \\ 0 & -0.20 & 0.30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.5 \\ 3.5 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

为了解决该问题，我们在 MathScript Command Window 中输入如下命令(% 符号后为注释)：

```
clear  % 首先，清除工作区。
% 然后，输入方程(2.36)系数矩阵，每一行的元素之间用空格分隔，
% 行与行之间用分号分隔。
G = [0.45 -0.25 0; -0.25 0.85 -0.2; 0 -0.2 0.30]
% 接下来，输入右边的列向量。
I = [-3.5; 3.5; 2]
% 然后，使用命令计算节点电压。
% V = G\I  用V = inv(G)*I代替。
V = G\I
```

这些都是用于求解 MATLAB 方程组的命令程序。在 MathScript Output Window 中的结果如下：

$$\begin{matrix} V = \\ -5 \\ 5 \\ 10 \end{matrix}$$

这个结果必然与此前使用 MATLAB 软件的分析结果一致。

本章小结

1. 图 9.1 是一个典型的基于计算机仪器系统的框图。
2. 当需要检测传感器的内部(开路)电压时，应该指定放大器的输入阻抗远大于传感器的戴维南等效阻抗。
3. 当需要检测传感器产生的电流时，需要一个电流-电压转换器，相比于传感器的戴维南等效阻抗，该转换器的输入阻抗应非常小(最好为零)。
4. 在相同条件下，重复测量结果的固有误差都相同。固有误差包括偏移、刻度误差、非线性和滞后。
5. 每次测量的随机误差都不相同，且平均值为零。
6. 仪器的准确度是测量值和真实值之差的最大预期(通常表示为与满刻度值的百分比)。
7. 精度是一台仪器对一个常量重复测量的能力。较精确的测量有较小的随机误差。
8. 一台仪器的分辨率是实测值之间可以辨别的最小增量。
9. 信号调理器的部分功能有放大、将电流信号转换为电压信号、通过激励源给传感器、滤除噪声或其他不需要的信号分量。
10. 单端接地放大器的一个输入端是接地的，而差分放大器的两个输入端都不接地。一个理想差分放大器的输出是其输入电压之差乘以差模增益。

11. 如果差分放大器的输入电压是 v_1 和 v_2，那么差模输入信号 $v_d = v_1 - v_2$，且共模信号 $v_{cm} = 1/2(v_1 + v_2)$。通常在仪表系统中，差模信号是被关注的，共模信号则是不必要的噪声。
12. 当存在大量不需要的共模信号时，最重要的是选择一个具有大 CM RR(共模抑制比)的差分放大器。
13. 环路接地是在仪表系统中将几个点同时连接到地时产生的问题。流经接地导体的电流会产生噪声，使得测量不准确和不够精确。
14. 当我们将传感器连接到单端接地放大器时，为了避免出现环路接地噪声，需要选择一个浮地的传感器(即传感器两端均不接地)。
15. 屏蔽电缆可以减少电场耦合的噪声。
16. 同轴电缆或双绞线可以降低磁耦合噪声。
17. 如果信号所有分量的频率都不高于 f_H，则信号中的所有信息都保留在样本中，前提是采样频率比 f_H 的两倍还要多。
18. 模数转换是一个两步的过程。首先，在等距时间点采样；其次，将采样值进行量化，这样就可以通过有限长度的数字字来代替它们。
19. 我们将有限字长的效应建模为信号与量化噪声的叠加。
20. 如果以频率 f_s 采样一个正弦信号，且 f_s 小于信号频率 f 的两倍，则该样本会被误看作一个频率为混叠频率 f_{alias} 的信号。混叠频率和真实频率的区别详见图 9.14。
21. 如果传感器信号包含我们不感兴趣的高频分量，通常使用模拟抗混叠滤波器来消除。因此，没有混叠发生，就可以使用较低的采样频率。
22. LabVIEW 软件在程序员面前以前面板和框图呈现。前面板是用户界面，包含了虚拟仪器的控制和显示。框图是通过图形化编程语言来构建的，显示了仪器如何分析传感器数据和如何从前面板输入。
23. LabVIEW 使用数据流的概念。这意味着直到所有的输入数据提供给特定块时，该块开始计算。

习题

9.1 节　测量概念和传感器

P9.1　定义基于计算机仪器系统的各个组件。

*P9.2　绘制一个传感器的等效电路，其开路电压与被测量成正比。问：什么是负载效应？当测量传感器的戴维南(即开路)电压时，如何避免负载效应？

P9.3　如果传感器产生的短路电流(诺顿)与被测量成正比，信号调理器的输入阻抗怎样是最好的？

*P9.4　对于一个数量级为 10^4 N 的满刻度作用力，其负载单元产生一个 200 μV 的开路电压，且戴维南阻抗为 1 kΩ。传感器的终端与放大器的输入端相连。通过加载，使整个系统的灵敏度减小至小于 1%，放大器的最小输入阻抗为多少？

*P9.5　某个液位传感器的戴维南(或诺顿)电阻从 10 kΩ 到 1 MΩ 随机变化，传感器的短路电流与被测量成正比。设由于传感器阻抗的变化，我们允许调理器的灵敏度可达 1%。问：需要什么类型的信号调理器？计算信号调理器的输入阻抗。

P9.6　固有误差和随机误差有什么不同？

P9.7　列出 4 种固有误差。

*P9.8　测量系统的测量范围从 0 到 1 m 满刻度，系统的准确度设定为满刻度值的 ±0.5%。如果被测量值是 70 cm，那么真实值的可能范围是多少？

P9.9 解释仪器的精度、准确度和分辨率之间的不同。

*P9.10 3 台仪器分别对一个流速为 1500 m^3/s 的设备进行了 10 次重复测量，结果见表 P9.10。问：

(a)哪台仪器的精确度最高？哪台最低？请解释原因。

(b)哪台仪器的准确度最高？哪台最低？请解释原因。

(c)哪台仪器的分辨率最高？哪台最低？请解释原因。

表 P9.10

实验	仪器 A	仪器 B	仪器 C
1	1.5	1.73	1.552
2	1.3	1.73	1.531
3	1.4	1.73	1.497
4	1.6	1.73	1.491
5	1.3	1.73	1.500
6	1.7	1.73	1.550
7	1.5	1.73	1.456
8	1.7	1.73	1.469
9	1.6	1.73	1.503
10	1.5	1.73	1.493

9.2 节 信号调理

P9.11 列出信号调理器 4 种以上的功能。

P9.12 单端接地放大器和差分放大器有什么不同？

P9.13 设一个理想差分放大器的两端输入电压是相等的，计算其输出电压。

*P9.14 差分放大器的输入电压为

$$v_1(t) = 0.002 + 5\cos(\omega t)$$

和

$$v_2(t) = -0.002 + 5\cos(\omega t)$$

计算差模输入电压和共模输入电压。设差分放大器的理想差模增益 $A_d = 1000$，计算放大器的输出电压。

P9.15 一个传感器产生一个直流 6 mV 的差模信号和一个有效值 2 V、频率 60 Hz 的共模信号。写出传感器输出端与地之间的电压表达式。

*P9.16 设一个传感器的一端接地，该传感器与 5 m 外的一台计算机的 DAQ 板相连。应该选择什么类型的放大器？为了减轻电场和磁场耦合噪声，应该使用什么类型的电缆？请绘制传感器、电缆和放大器的示意图。

P9.17 什么是浮动传感器？什么时候需要使用浮动传感器？

*P9.18 设从传感器采集的数据中发现需摒弃的 60 Hz 交流分量。问：产生这种干扰的原因是什么？每种干扰原因的解决方案各是什么？

9.3 节 模拟-数字转换

P9.19 模数转换在原则上包含哪两步？分别是什么？

P9.20 什么是混叠现象？在什么条件下会发生混叠现象？

P9.21 什么原因会造成量化噪声？

*P9.22 我们需要使用计算机仪表系统中压电振动传感器的信号。该信号包含频率高达 30 kHz 的组件，应采用的最低采样率是多少？设样本值的分辨率为 ADC 满刻度的 0.1%（或更好），ADC 的最少位数是多少？

*P9.23 一个峰值为 2 V 的正弦波信号被一个 12 位的 ADC 转换为数字形式，ADC 接收的信号范围从 −5 V 到 +5 V(换句话说，码字在 −5 ~ +5 V 振幅之间被等分)。要求：

(a)确定每个量化空间的宽度 Δ;

(b)确定量化噪声的有效值和量化噪声提供给电阻 R 的激励;

(c)确定 2 V 正弦波给电阻 R 的激励;

(d)将(c)中的信号激励除以(b)中的噪声，这个比值称为信号噪声比(SNR)。请用分贝数表示 SNR，提示：$SNR_{dB} = 10\log(P_{signa}l/P_{noise})$。

*P9.24　我们需要一个 ADC，其输入电压范围从 0 到 5 V，且分辨率为 0.022 V。问：需要多少位码字?

*P9.25　一个频率为 10 kHz 的正弦波被采样。当采样频率分别是:(a)11 kHz；(b)8 kHz；(c)40 kHz 时，计算样本的可视频率，判断是否发生混叠现象?

P9.26　一个 60 Hz 的正弦波 $x(t) = A\cos(120\pi t + \phi)$ 在 360 Hz 处被采样，因此，样本值为 $x(n) = A\cos(120\pi nT_s + \phi)$，其中 n 代表整数值，$T_s = 1/360$ 是样本之间的时间间隔。一个新信号用等式

$$y(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(n-3)]$$

计算，要求：

(a)证明对所有的 n，都有 $y(n) = 0$;

(b)设 $x(t) = V_{signal} + A\cos(120\pi t + \phi)$，其中 V_{signal} 是一个时间常量，要求确定 $y(n)$ 的表达式;

(c)在使用 $x(n)$ 输入样本来计算新信号样本 $y(n)$ 时，采用数字滤波器。试明确一种情况，使得(a)和(b)描述的滤波器都有用。

9.4 节　LabVIEW

P9.27　简要描述虚拟仪器是怎样建立的。

P9.28　解释 LabVIEW 软件的数据流概念。

*P9.29　使用 LabVIEW 创建一个虚拟仪表，可以将 $x + jy$ 形式的复数转换为极坐标形式 $A\angle\theta$。操作员在前面板输入 x 和 y 值，且两者的范围从 -10 到 +10。此外，前面板上需显示 A 和 θ 的值。

P9.30　使用 LabVIEW 创建一个虚拟仪表，可以将极坐标形式 $A\angle\theta$ (θ 角度范围从 -360°到 +360°，且 A 的范围从 0 到 20)转换为 $x + jy$ 的形式。操作员在前面板输入 x 和 y 值，此外，前面板上需显示 x 和 y。

*P9.31　打开 OrCAD CD 中 Hambley Virtual Instruments 文件夹中文件名为 Figure 9.24.vi 中的 VI 程序。单击 run continuously 按钮，将正弦波的振幅设定为 10，频率设定为 1。然后，逐步提高频率并观察波形的变化。接下来，将频率设定为 355，再逐步提高频率至 365，观察每步操作中波形的变化。讨论和解释你的观察。

P9.32　创建一个 VI 程序来证明各自领域的某个概念或者解决一个问题。写一个关于概念或问题的 VI 程序的简短说明。

自测题

这里是一个实践的检验，用以检查你对本章最重要概念的理解程度。在附录 E 中可以找到答案，且完整的解决方案包含在学生资源文件中。关于学生资源的更多信息，请参照附录 F。

T9.1　定义一个基于计算机仪表系统的四大组件。

T9.2　命名测量系统中存在的 4 种系统误差。

T9.3　固有误差与随机误差有什么不同?

T9.4　在仪表系统中，怎样可以导致接地回路? 接地回路有怎样的影响?

T9.5　如果一个传感器必须有一端要接地，我们应该选择什么类型的放大器? 为什么?

T9.6　在连接传感器到仪表放大器时，为了避免电场和磁场耦合带来的噪声，最好选择什么类型的电缆?

T9.7　如果需要检测传感器的开路电压，对仪表放大器最重要的性能参数是什么?

T9.8　对于一个 ADC，怎样选择其采样率? 为什么?

第10章　二　极　管

本章学习目标

- 理解二极管的工作原理，了解在各种应用中如何选择二极管
- 用图解负载线方法分析非线性电路
- 分析和设计简单的稳压电路
- 用理想二极管模型和分段线性化模型求解电路
- 理解各种整流器和整形电路
- 理解小信号等效电路

本章介绍

电子电路在信息处理和能量控制方面是非常有用的。电子电路的应用有计算机、收音机、电视机、导航系统、调光器、计算器、家用电器、机器的控制、运动传感器和测量仪器等。对电子电路的基本了解有助于你在工作中使用各种工程领域的仪器。在接下来的几章中，我们将介绍几种非常重要的电子元器件及其基本应用电路，还将介绍几种重要的分析法。本章将讨论二极管。

10.1　二极管的基本概念

二极管是一种基本的却很重要的二端元件，它有两个电极：阳极和阴极。二极管的电路符号如图10.1(a)所示，伏安特性如图10.1(b)所示。在图10.1(a)中，二极管两端电压为 v_D，参考方向设定阳极为正，阴极为负，电流 i_D 的参考方向设定为从正极流向负极。

当二极管两端的电压 v_D 为正时，较小的电压将引起相当大的电流，这种情况称为正向偏置。显然，沿着箭头方向的电流很容易流过二极管。

另一方面，当 v_D 取较小的负值时，电流 i_D 非常小，对应二极管特性图中的这个区域称为反向偏置区。二极管的单向导电性在许多应用方面十分有用。例如，当汽车发动机运转时，交流发电机通过二极管对电池充电。当发动机停止时，二极管防止电池通过交流发电机放电。在这些应用中，二极管与流体系统的单向阀相似，如图10.1(d)所示。

如果反向偏置电压足够大，则二极管将进入反向击穿区，反向电流将显著增大。如果在二极管上耗散的功率不会使其温度过高，则工作在反向击穿区的二极管不会被损坏。实际上，有时还特意使二极管工作在反向击穿区。

10.1.1　二极管的物理结构简介

前面讨论了二极管的外部特性及其电路的应用，下面将简单介绍二极管的内部物理结构。

二极管包含两种类型的半导体材料(通常为加有少量杂质的硅)之间形成的结。在结的一边为掺有杂质的 n 型材料，含有大量自由电子。在结的另一边，掺入的不同杂质产生正电荷，称为空穴。空穴占大多数的半导体材料称为 p 型材料。在 p 型材料和 n 型材料的交界面会形成 pn 结，大多数二极管是由 n 型材料和 p 型材料以及之间的 pn 结构成的，如图10.1(c)所示。

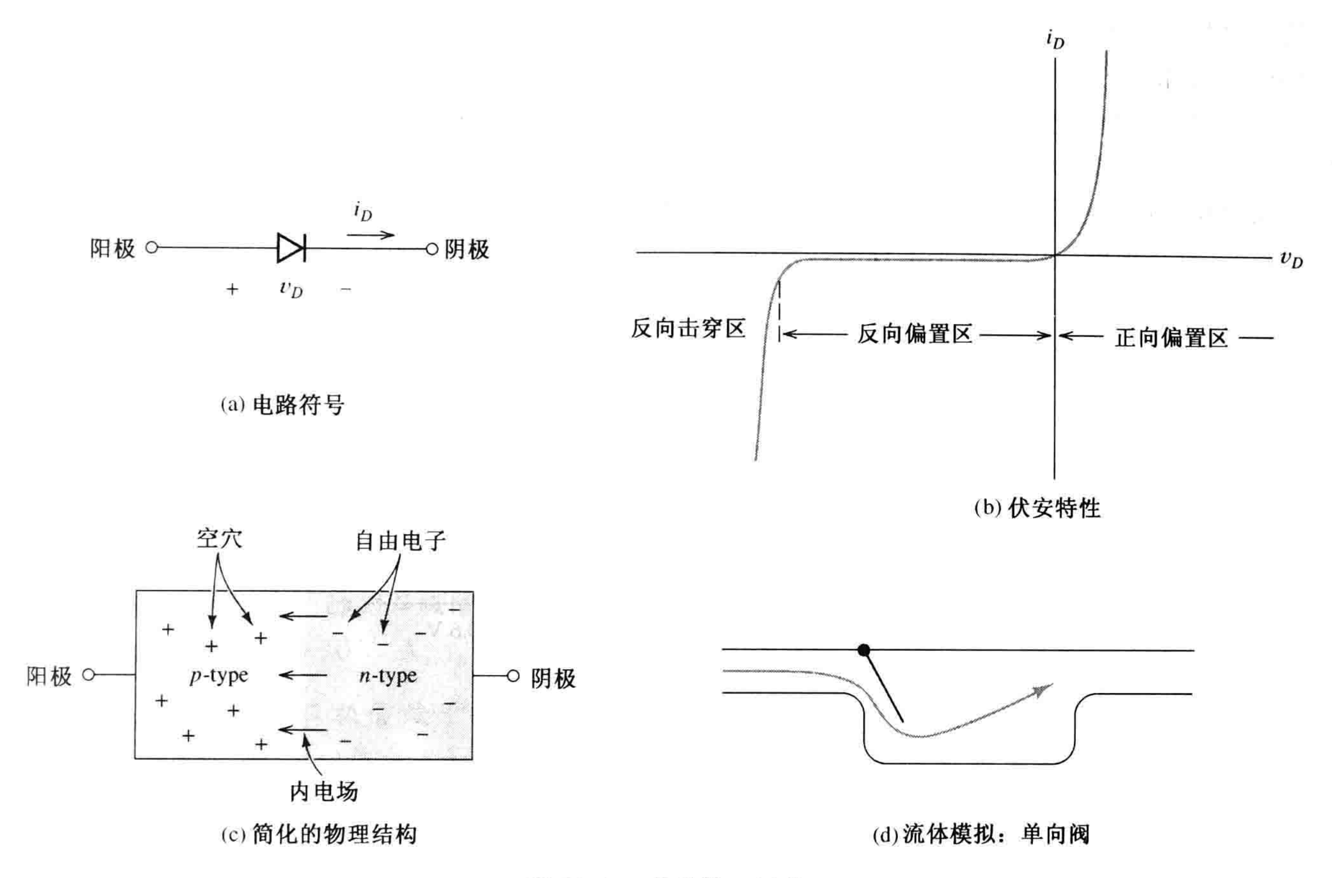


图 10.1 半导体二极管

即使没有外加电压，在 pn 结中仍会产生一个内电场。这个电场维持着 n 型材料中的多数载流子为自由电子，p 型材料中的多数载流子为空穴。如果在 n 型电极上加正电压，则内电场将会增强，使得电荷不能穿过结，因此，二极管外部表现为没有电流通过。另一方面，如果在 p 型电极上加正电压，则内电场将会减弱，使得大电流通过结。因此，当外加反向电压时，二极管几乎无电流，而外加正向电压时，二极管则流过大电流；阳极与 p 型材料相连，阴极与 n 型材料相连。

10.1.2 二极管的小信号模型

各种材料和结构被用于制造二极管。现在我们仅讨论小信号硅二极管。在中小功率电子电路中，这种二极管是最常见的。

一种工作在 300 K 温度下的小信号硅二极管特性曲线如图 10.2 所示。注意，在正向偏置区和反向偏置区的电压和电流的坐标刻度是不同的，这反映了不同的特性，因为在反向偏置区的电流远小于正向偏置区的电流。此外，正向偏置区的电压值也远小于反向偏置区的击穿电压。

在正向偏置区，外加正向偏置电压低于0.6 V(工作温度为300 K)时，小信号硅二极管的导电能力很弱(远小于1 mA)。随着正向偏置电压的增大，电流迅速增大，正向偏置特性表明在正向电压约为0.6 V 时特性曲线存在一个拐点。注意：拐点处的实际电压值取决于二极管的材料、环境温度和电流大小，典型值为0.6 V 或0.7 V。随着温度的增加，拐点电压以 2 mV/K 的速度递减。因电压随着温度变化而线性变化，所以二极管可用作温度传感器。当二极管的电流一定时，二极管两端的电压就取决于其环境温度。医生使用的电子温度计就是由二极管传感器、放大器和液晶显示器的驱动电路构成的。

在反向偏置区，小信号硅二极管在室温下的典型电流值约为 1 nA。反向偏置区的电流通常

很小且稳定，称为反向饱和电流。随着温度的增加，反向电流也将增加。温度每增加 10 K，反向电流将加倍。

当增大电压达到反向击穿值时，电流迅速增大，这时的电压称为反向击穿电压。例如，图 10.2所示二极管特性曲线中击穿电压约为 -100 V。击穿电压值的范围从几伏到几百伏不等。在一些应用中，要求二极管工作在正向偏置区以及反向偏置区的不导通状态(不允许进入击穿区)，这时会提供二极管最小击穿电压的说明。

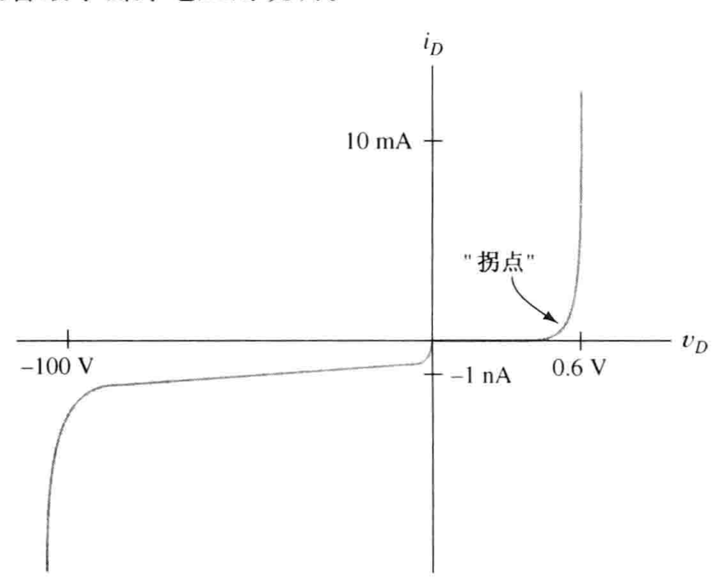


图 10.2 小信号硅二极管的伏安特性(工作温度为 300 K)，注意负电流和电压的变化范围

10.1.3 肖克莱方程

在一定的简化假设和理论推导下，二极管的电压与电流的关系表示为

$$i_D = I_s\left[\exp\left(\frac{v_D}{nV_T}\right) - 1\right] \tag{10.1}$$

这就是肖克莱方程。式中，I_S 为饱和电流，小信号二极管在 300 K 时的饱和电流值在10^{-14} A 的数量级。注意：I_S 受温度影响较大，温度每增加 5 K，硅二极管的饱和电流就加倍。参数 n 为发射系数，其值在 1～2 之间，取决于器件的结构。电压 V_T 为

$$V_T = \frac{kT}{q} \tag{10.2}$$

V_T 称为热电压。T 表示结所处的热力学温度值，$k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K 为玻尔兹曼常数，$q = 1.60 \times 10^{-19}$ C 为一个电子的电荷量。温度为 300 K 时，V_T 约为 0.026 V。

求解肖克莱方程的二极管电压，得到

$$v_D = nV_T \ln[\left(\frac{i_D}{I_s}\right) + 1] \tag{10.3}$$

对于正向电流在 0.01 μA 与 10 mA 之间的小信号二极管，n 取 1 的肖克莱方程通常是很精确的，因为肖克莱方程的推导中忽略了几个现象，在电流过小或过大时该方程就不精确了。例如，在反向偏置下肖克莱方程推出 $i_D \approx -I_S$，但我们通常发现反向偏置电流比 I_S 大很多，尽管其值依然很小。此外，无法根据肖克莱方程获得准确的反向击穿电压值。

正向偏置电压为零点几伏时，肖克莱方程的指数部分远大于 1，于是可得

$$i_D \approx I_s \exp\left(\frac{v_D}{nV_T}\right) \tag{10.4}$$

肖克莱方程的这种形式更便于使用。

我们偶尔使用肖克莱方程分析计算电子电路，但进一步简化的二极管模型往往更有用。

10.1.4 齐纳二极管(稳压管)

特意工作在反向击穿区的二极管称为齐纳二极管，也称为稳压二极管。齐纳二极管可提供一个恒定电压，因此，在制造齐纳二极管时要尽可能实现击穿区的垂直特性。与二极管的符号有所不同，齐纳二极管的符号如图 10.3 所示。齐纳二极管可耐受 ±5% 的击穿电压。

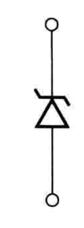


图 10.3 稳压管的符号

练习 10.1 在 300 K 的温度下，某二极管在 $v_D = 0.6$ V 时的电流 $i_D = 0.1$ mA。假设 n 为 1，$V_T = 0.026$ V，求饱和电流 I_S，以及在 $v_D = 0.65$ V 和 $v_D = 0.70$ V 时的二极管电流。

答案： $I_S = 9.50 \times 10^{-15}$ A，$i_D = 0.684$ mA，$i_D = 4.68$ mA。

练习 10.2 设二极管处于正向偏置状态，并满足式(10.4)的肖克莱方程。假定 $V_T = 0.026$ V，$n = 1$。问：(a)使电流加倍的 v_D 增量为多少？(b)使电流增加 10 倍的 v_D 增量为多少？

答案： (a) $\Delta v_D = 18$ mV；(b) $\Delta v_D = 59.9$ mV。

10.2 二极管电路的负载线分析法

如图 10.4 所示，电阻的伏安特性是线性的。在 10.1 节中已知二极管的伏安特性是非线性的，后面会继续学习更多具有非线性特性的电子元器件。由于这种非线性，我们在第1章~第6章学到的线性电路分析方法不能用于分析包含二极管的电路。实际上，在电子学中的分析方法大多数是针对含非线性元件的电路的。

图解分析法是分析非线性电路的一种方法。例如，如图 10.5 所示的电路，由基尔霍夫电压定律可得

$$V_{SS} = Ri_D + v_D \tag{10.5}$$

假设 V_{SS} 和 R 的值已知，求 i_D 和 v_D。式(10.5)中有两个未知量，要求解未知量还需要一个等式或者条件，而图 10.6 中给出的二极管伏安特性曲线就是所需的条件。

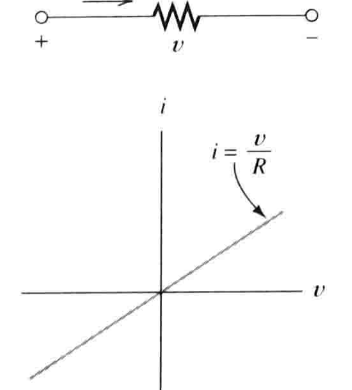


图 10.4 电阻的伏安特性，与二极管相比此特性是线性的

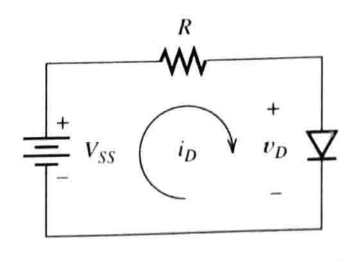


图 10.5 负载线分析的电路

通过在二极管的特性曲线图上绘出式(10.5)对应的曲线，可得到上述电路的解。由于式(10.5)是线性的，所对应的图形应该为一条直线，只要找到满足式(10.5)的两个点就可确定这条直线。一个简单的方法是假设 $i_D=0$，代入式(10.5)，得 $v_D = V_{SS}$，这一组值对应于图 10.6 中的 A 点。再设 $v_D=0$，可得到 $i_D = V_{SS}/R$，这一组值对应于图 10.6 中的 B 点。最后，连接 A、B 两点得到的直线称为负载线。负载线与二极管特性曲线的交点称为工作点，这个点即是式(10.5)与二极管特性的公共解。

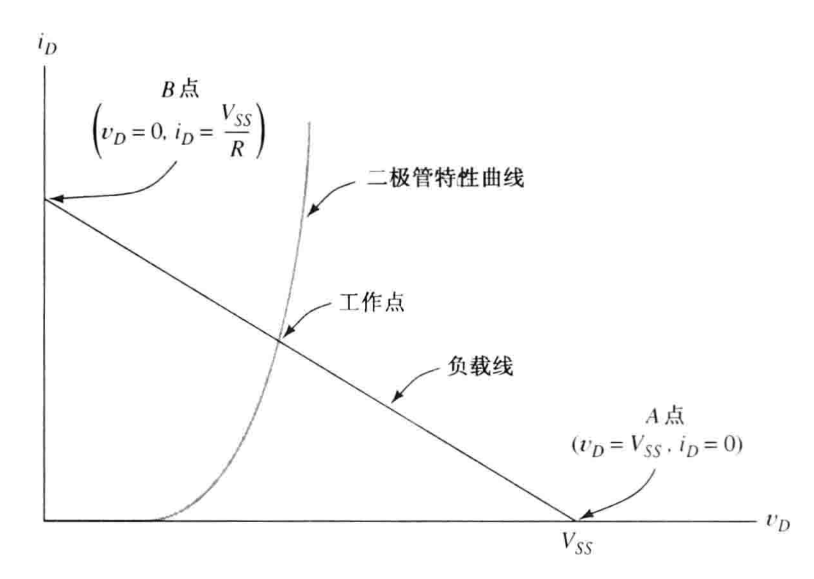


图 10.6　图 10.5 中电路的负载线分析

例 10.1　负载线分析。

如果图 10.5 中电路的 $V_{SS}=2$ V，$R=1$ kΩ，二极管的特性曲线如图 10.7 所示。求二极管工作点的电压和电流。

解：首先确定负载线的一端。令 $v_D=0$，将 $V_{SS}=2$ V，$R=1$ kΩ 代入式(10.5)，得到 $i_D=2$ mA。这一组值对应于图 10.7 中的 B 点。同样，再令 $i_D=0$，得 $v_D=2$ V。这一组值对应于图 10.7中的 A 点。连接 A、B 两点的负载线与二极管的特性曲线的交点即为所求的工作点，如图 10.7 所示，得到解为 $V_{DQ}\approx 0.7$ V，$I_{DQ}\approx 1.3$ mA。

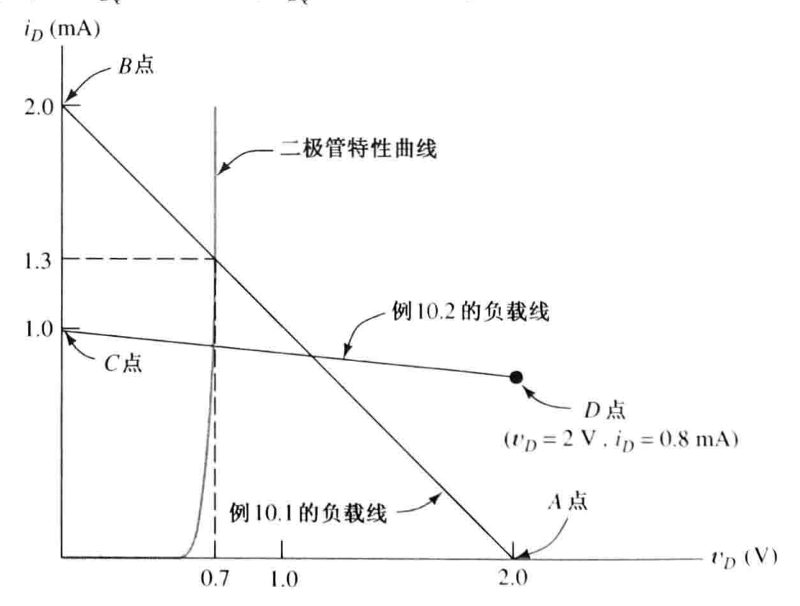


图 10.7　例 10.1 和例 10.2 的负载线分析

例 10.2　负载线分析。

设 V_{SS} =10 V, R =10 kΩ，重复例 10.1 的要求，即求二极管工作点的电压和电流。

解： 令 v_D =0，将 V_{SS} =10 V, R =10 kΩ 代入式(10.5)，得 i_D =1 mA。这一组值对应于图 10.7中的 C 点。如上例中，再令 i_D =0，则 v_D =10 V。而这一组值对应的点离坐标原点太远，不便于在图中表示，可以选择满足式(10.5)的其余点来获得负载线。已求得 C 点在 i_D 轴上，故在特性曲线的右端选择满足式(10.5)的一个比较合理的点。设 v_D =2 V，将 V_{SS} =10 V, R = 10 kΩ代入式(10.5)，得 i_D =0.8 mA。这一组值对应于图 10.7 中的 D 点。最后，连接 C、D 两点获得负载线，由负载线和特性曲线的交点即可确定工作点的值：V_{DQ} ≈ 0.68 V, I_{DQ} ≈ 0.93 mA。

练习 10.3　如果二极管的特性曲线如图 10.8 所示，在下列情况下求图 10.5 中电路的工作点：(a) V_{SS} =2 V, R =100 Ω；(b) V_{SS} =15 V, R =1 kΩ；(c) V_{SS} =1.0 V, R =20 Ω。

答案： (a) V_{DQ} ≈ 1.1 V, I_{DQ} ≈ 9.0 mA；(b) V_{DQ} ≈ 1.2 V, I_{DQ} ≈ 13.8 mA；(c) V_{DQ} ≈ 0.91 V, I_{DQ} ≈4.5 mA。

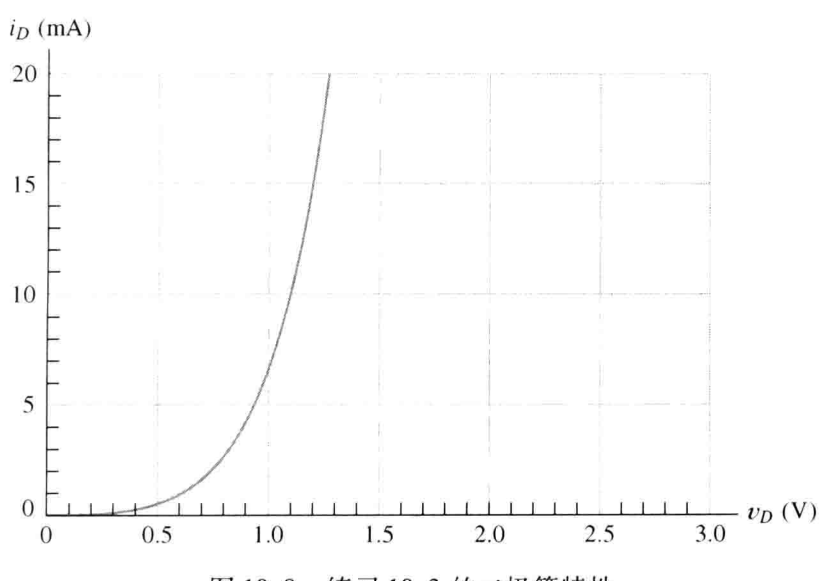


图 10.8　练习 10.3 的二极管特性

10.3　稳压管稳压电路

有时，我们需要一种在变化的输入电压下输出恒定电压的电路，这种电路称为稳压器。例如，汽车上的计算机依靠车载电池保障运行，这时就用到了稳压器。车载电池电压(受电池状态和引擎是否运转的影响)通常在 10 V 到 14 V 之间，而许多计算机电路需要工作在 5 V 的恒定电压下。因此，需要一个将 10 V 到 14 V 输入电压转换为恒定 5 V 输出的稳压器。

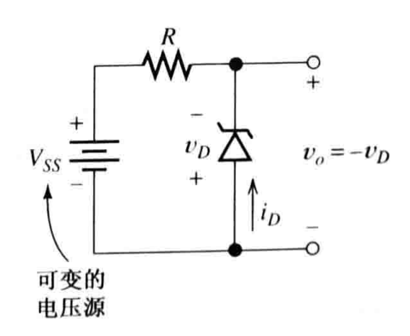


图 10.9　简单稳压电路(在变化的输入电压下输出基本恒定的电压v_o)

本节将利用 10.2 节中讲到的负载线方法来分析简单的稳压电路。如图 10.9 所示，为了使电路正常工作，输入源电压的最小值应大于欲得到的恒定输出电压值。图中，稳压管的反向击穿电压即输出电压，电阻 R 限制流过二极管的电流，防止二极管过热。

如果二极管的特性曲线已知，可做出负载线来分析电路的工作状态。由基尔霍夫电压定律可写出 v_D 和 i_D 的关系式。此时，二极管工作在反向击穿区，v_D 和 i_D 均为负值。由图 10.9 中的电路可得到

$$V_{SS} + Ri_D + v_D = 0 \tag{10.6}$$

同样，该式表示一条直线，故连接任何满足这个等式的两个点均可得到电路的负载线，负载线和二极管的特性曲线的交点即为工作点。

例 10.3 稳压管稳压电路的负载线分析。

如图 10.9 所示的稳压电路，R =1 kΩ，稳压管的特性曲线如图 10.10 所示。求 V_{SS} =15 V 及 V_{SS} =20 V时的输出电压。

解： V_{SS} =15 V 及 V_{SS} =20 V 时的负载线如图 10.10 所示。输出电压由负载线与二极管的特性曲线的交点决定，于是，在 V_{SS} =15 V 时，v_o =10.0 V；在 V_{SS} =20 V 时，v_o =10.5 V。由此可见，输入源电压的变化量为 5 V 时，输出电压仅改变 0.5 V。

实际稳压管的稳压效果比此例更好，因为实际稳压管的击穿特性曲线比图 10.10 更陡。

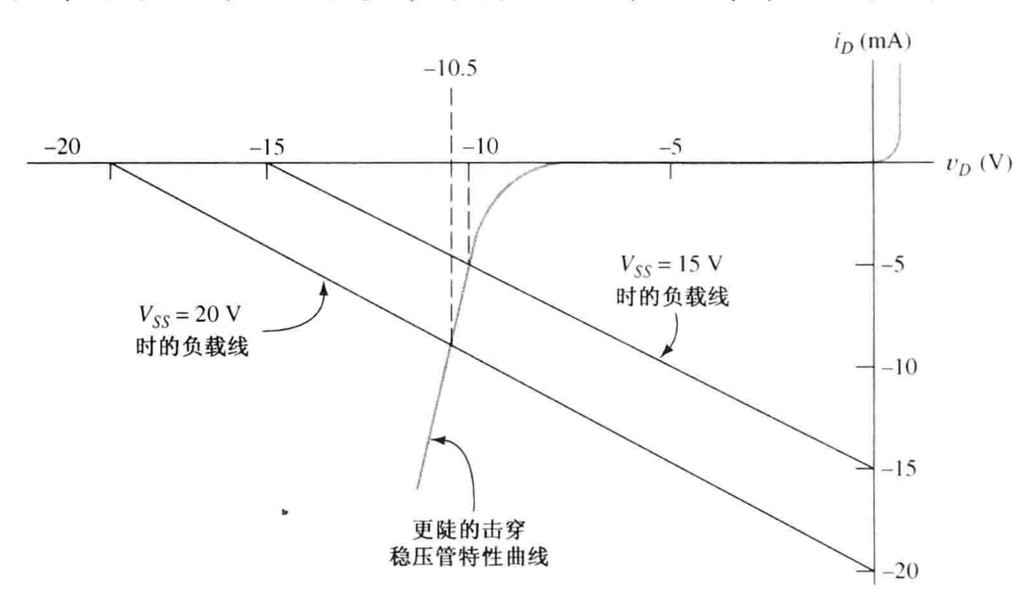


图 10.10　例 10.3 的电路

10.3.1 负载线的斜率

注意：图 10.10 中的两条负载线是平行的。观察式(10.5)和式(10.6)可发现负载线的斜率均为 $-1/R$。因此，虽然源电压改变引起交点位置的变化，但是负载线的斜率并不变化。

10.3.2 复杂电路的负载线分析

任何包含电阻、电压源、电流源和一个二端非线性元件的电路都能用负载线方法分析。首先求出电路线性部分的戴维南等效电路，如图 10.11 所示。然后，在非线性元件的特性曲线图上做出负载线，所得交点即为工作点。一旦非线性元件的工作点已知，原电路中的电压和电流即可被确定。

例 10.4 带负载的稳压管稳压电路分析。

如图 10.12(a)所示的稳压管稳压电路。二极管的特性曲线如图 10.13 所示，求 V_{SS} =24 V，R = 1.2 kΩ，R_L =6 kΩ 时的负载电压 v_L 和电源电流 I_S。

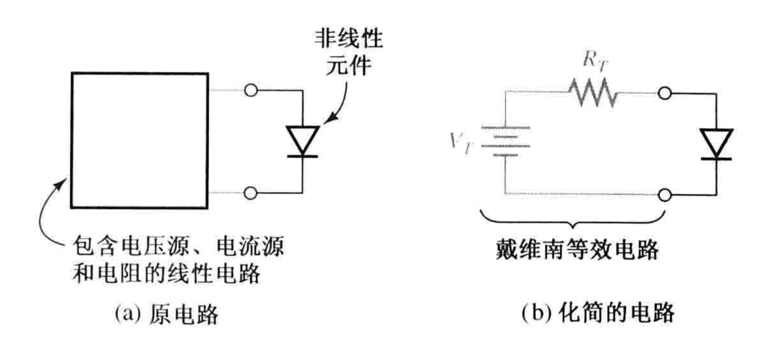


图 10.11　含一个非线性元件电路的负载线分析(针对化简的电路)

解：首先，将所有线性元件放在二极管的左边，电路如图 10.12(b)所示。然后，求出左侧线性电路的戴维南等效电路。戴维南等效电压等于开路电压(将二极管开路时 R_L 两端的电压)：

$$V_T = V_{SS}\frac{R_L}{R+R_L} = 20\ \text{V}$$

令电压源为零，从二极管的两端看进去的电路的等效电阻称为戴维南等效电阻。令电压源为零，即将电压源短路，这时，R 与 R_L 并联，戴维南等效电阻为

$$R_T = \frac{RR_L}{R+R_L} = 1\ \text{k}\Omega$$

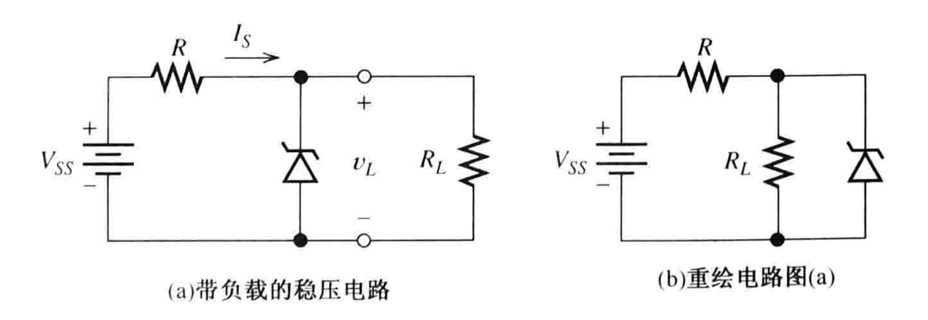
得到的等效电路如图 10.12(c)所示。

接下来，利用基尔霍夫电压定律写出等效电路的负载线等式：

$$V_T + R_T i_D + v_D = 0$$

由所得的 V_T 和 R_T 画出负载线并确定工作点，如图 10.13 所示。最后得到：$v_L = -v_D = 10.0$ V。

一旦 v_L 求得后，即可求得原电路中的电压和电流值。例如，由原电路中的输出电压值 10.0 V，可求得 $I_S = (V_{SS} - v_L)/R = 11.67$ mA。



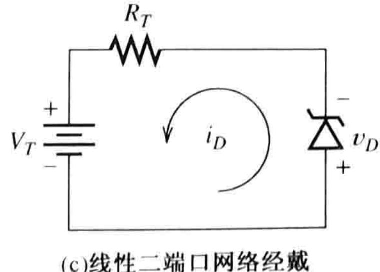


图 10.12　例 10.4 的电路

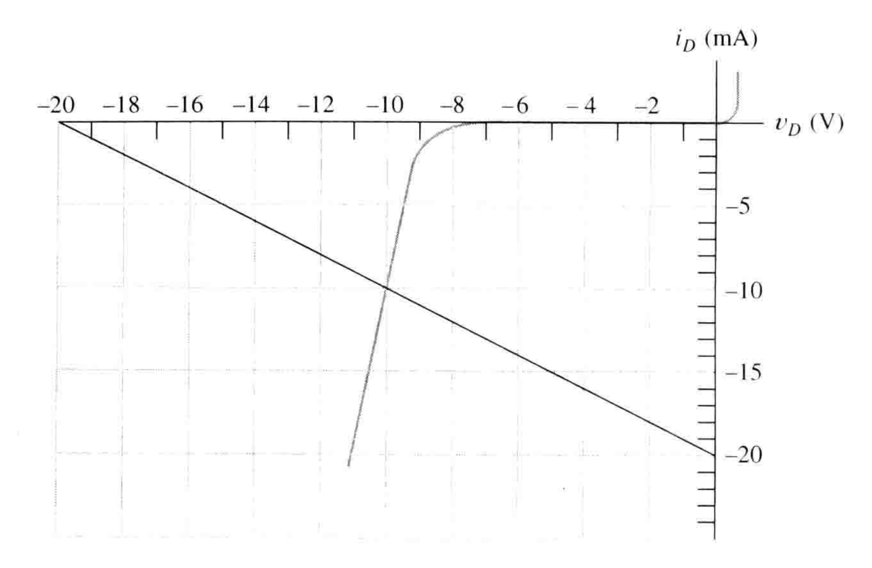


图 10.13 例 10.4 和练习 10.4 的稳压管特性曲线

练习 10.4 求下列情况下例 10.4 中负载两端的电压:(a) R_L =1.2 kΩ;(b) R_L =400 Ω。
答案:(a) $v_L \approx 9.4$ V;(b) $v_L \approx 6.0$ V。
(注意,负载电压随着负载电流变化而变化,所以这个稳压器的稳压效果并不理想。)

练习 10.5 如图 10.14(a)所示的电路,假设击穿特性是垂直的,如图 10.14(b)所示。求(a) i_L =0 mA;(b) i_L =20 mA;(c) i_L =100 mA 时的输出电压 v_o。
(提示:由基尔霍夫电压定律有,

$$15 = 100(i_L - i_D) - v_D$$

再做出对应每个 i_L 值的负载线。)

答案:(a) v_o =10.0 V;(b) v_o =10.0 V;(c) v_o =5.0 V。(注意:稳压器在大负载电流时是无效的。)

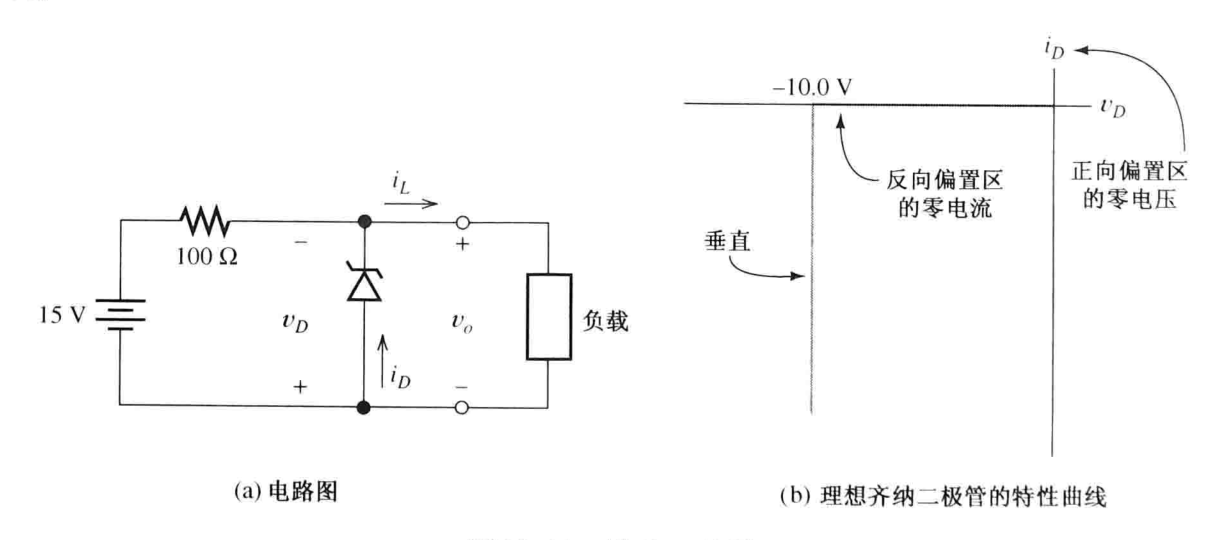


图 10.14 例 10.5 的图

10.4 理想二极管模型

图解负载线分析法对 10.3 节中的稳压器等某些电路是有效的,但是,在求解一些复杂电路时,这种方法就显得比较烦琐。因此,我们用更简单的模型来模拟二极管的作用。

理想二极管是二极管的一种简单模型。当二极管正偏时，电压降为零，视作导线；反偏时，电流为零，视作开路。在正向电压降和反向电流可忽略时，或者进行粗略的电路分析时，可以用这种理想二极管模型来代替实际二极管。

理想二极管的伏安特性如图 10.15 所示。当 i_D 为正时，v_D 为零，二极管处于导通状态；当 v_D 为负时，i_D 为零，二极管处于关断状态。

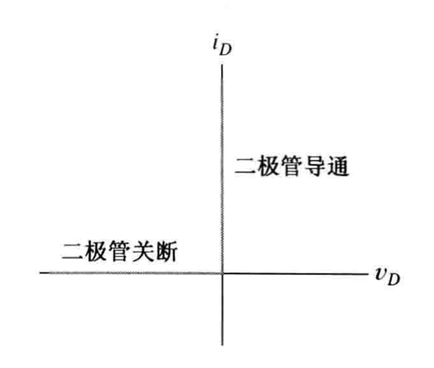


图 10.15 理想二极管的伏安特性

10.4.1 理想二极管电路的假定状态分析

在分析含理想二极管的电路时，事先并不知道二极管的开关状态，因此，需要对二极管的开关状态做出假设。如果假设二极管导通，则计算导通电流；或者假设二极管关断，则计算二极管两端的电压。如果对于假设导通的二极管求得 i_D 为正，对于假设关断的二极管求得 v_D 为负，则初始假设正确，电路得解。注意：假定 i_D 的参考方向为二极管的电流流向，v_D 的参考极性为二极管的阳极。否则，我们需要做出另一种假设，并重复上述步骤分析电路。经过多次练习后，通常对简单电路能够一次性假设成功。

含理想二极管电路的分析步骤如下：

1. 假定每个二极管的状态设为导通（短路）或者关断（开路），则 n 个二极管有 2^n 种可能的状态组合。
2. 分析电路，确定流过假定导通状态的二极管的电流，以及假设关断状态的二极管两端的电压。
3. 验证所得结果与假设是否一致。对于假设导通的二极管，求得 i_D 应为正向流过二极管；对于假设关断的二极管，求得 v_D 的实际正极性端为二极管的阴极（即反向偏置）。
4. 如果结果与假设一致，则分析结束。否则，回到步骤 1，重新选择另一种二极管状态假设的组合。

例 10.5 假定状态分析。

用理想二极管模型分析如图 10.16(a) 所示的电路。第一次假设 D_1 关断，D_2 导通。

解： 当 D_1 关断、D_2 导通时，等效电路如图 10.16(b) 所示，求得 $i_{D2}=0.5$ mA。因为 D_2 为正，所以 D_2 导通的假设是正确的。而求得 $v_{D1}=+7$ V，这与 D_1 关断的假设不一致。因此，我们必须做出另一组假设。

现在假设 D_1 导通、D_2 关断，等效电路如图 10.16(c) 所示。求解电路得 $i_{D1}=1$ mA，$v_{D2}=-3$ V。结果与 D_1 导通、D_2 关断的假设一致，故本次假设正确。

注意：在例 10.5 中，虽然在假设 D_1 关断、D_2 导通时求得的 i_{D2} 为正，但是正确的解却是 D_2 关断。因此，只有当所有结果均与假设一致时，才能确定假设为正确的。

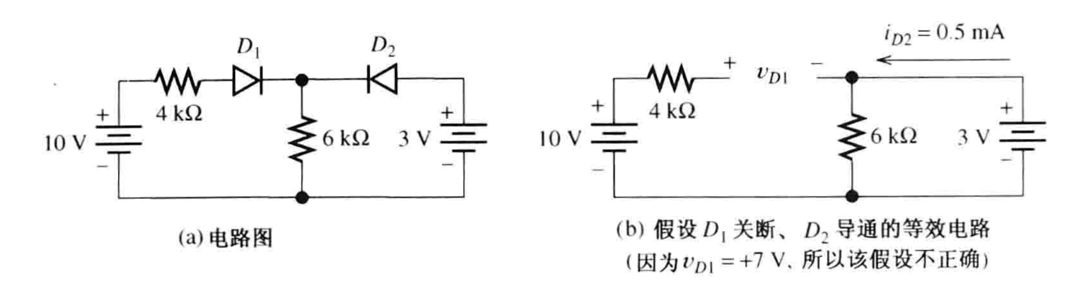
对于含有 n 个二极管的电路，二极管的开闭状态有 2^n 种可能的组合。因此，可能需要经过烦琐的求解过程才能最终得解。

练习 10.6 如图 10.16(a) 所示的电路，证明 D_1 关断、D_2 导通的假设是错误的。

练习 10.7 如图 10.16(b) 所示的电路，证明 D_1 导通、D_2 关断的假设是错误的。

练习 10.8 求图 10.17 所示电路中二极管（假设为理想二极管）的状态。

答案：(a) D_1 导通；(b) D_2 关断；(c) D_3 关断，D_4 导通。



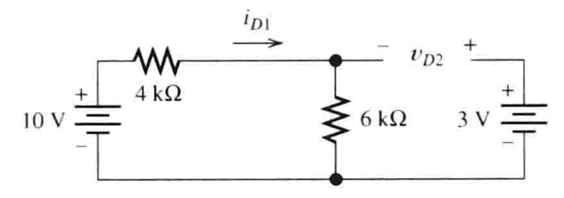


图 10.16 例 10.5 的电路

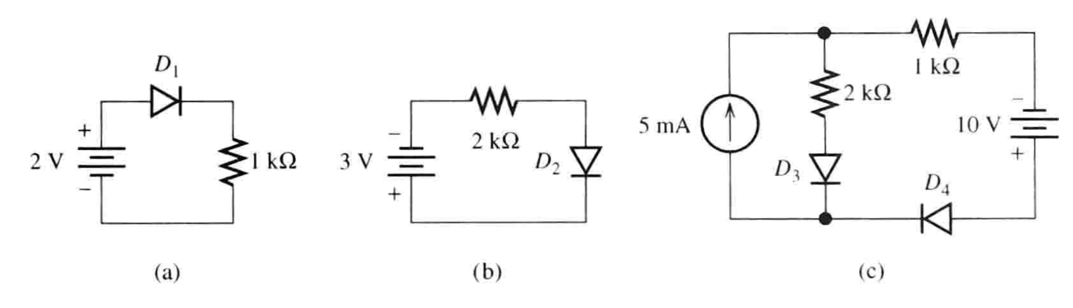


图 10.17 练习 10.8 的电路

10.5 二极管折线模型

有时，我们需要用比理想二极管更精确的模型来表示二极管，但又不想采用非线性方程或图解方法，这时，可使用二极管的分段线性模型即折线模型。首先，用多个直线段来模拟实际的伏安特性曲线。其次，用电阻串联恒压源的模型模拟各直线段的特性，不同的直线段有不同的等效电阻和电压。

在图 10.18(a)中，电阻 R_a 与电压源 V_a 串联，可得等式：

$$v = R_a i + V_a \tag{10.7}$$

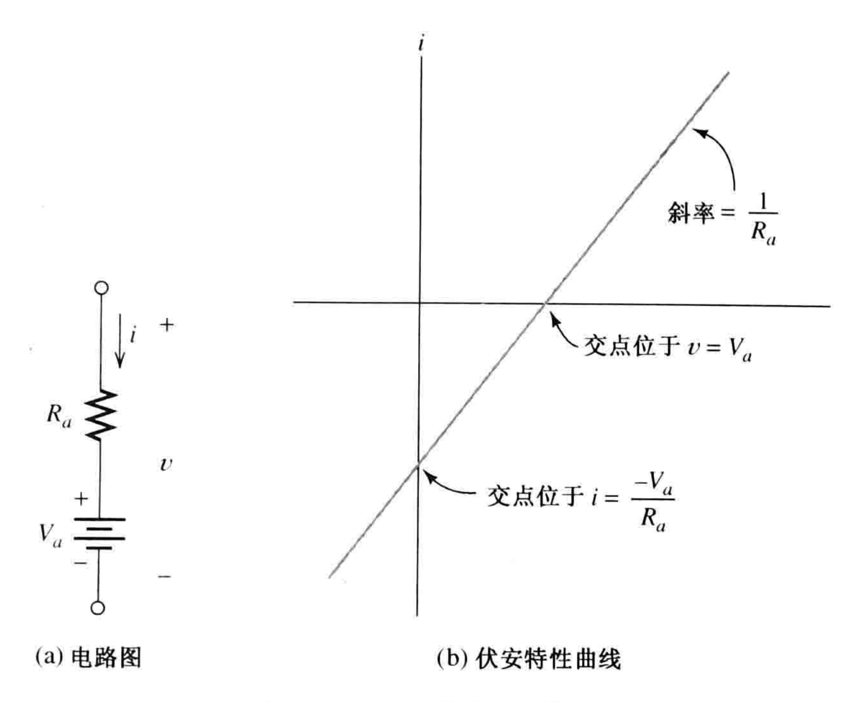
伏安特性如图 10.18(b)所示，在电压轴上的交点处 $v = V_a$，直线的斜率为 $1/R_a$。

如果已知一线性的伏安特性曲线，可反推求得对应的电阻和电压源值。因此，首先将非线性伏安特性曲线表示为多个直线段，则该电路模型视为由每一直线段(一个电阻和电压源串联)级联而成的等效模型。

例 10.6 稳压管的折线模型。

稳压管的伏安特性如图 10.19 所示，利用直线段求其电路的等效模型。

解： 直线段 A 与电压轴的交点为 0.6 V，直线段 A 的斜率的倒数为 10 Ω。于是，二极管在这一段的电路模型为一个 10 Ω 电阻串联一个 0.6 V 电压源，如图 10.19 所示。直线段 B 对应的电流为零，因此对应的等效电路为开路。最后，直线段 C 与电压轴的交点为 −6 V，其斜率的倒数为12 Ω，等效电路如图 10.19 所示。这样，二极管的工作状态仅取决于其工作点在哪一段直线模型上。



(a) 电路图　　(b) 伏安特性曲线

图 10.18　二极管的折线模型

i_D

10 Ω　+0.6 V

100 mA

直线段 A

二极管 = 开路

−7.2　−6.0

v_D (V)

0.6　1.6

直线段 B

6 V

12 Ω

直线段 C

−100 mA

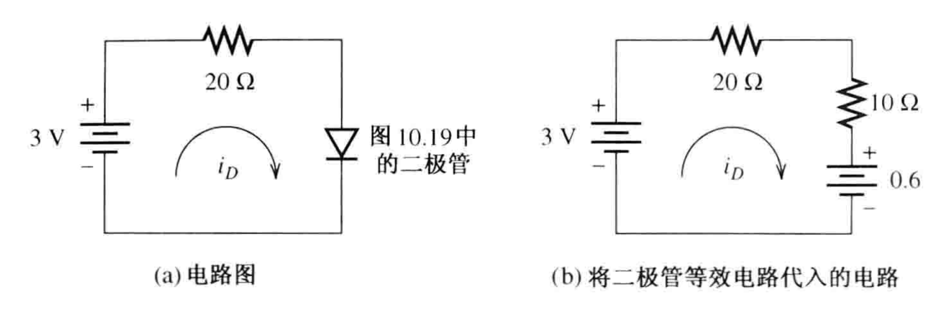
图 10.19　例 10.6 的图

例 10.7　用分段线性模型分析电路。

用例 10.6 所求得的电路模型求解图 10.20(a) 中的电流。

解： 由于 3 V 电压源使得二极管正向偏置，则工作点在图 10.19 中的线段 A 上。因此，二极

管的等效电路为线段 A 所对应的电路，得到如图 10.20(b)所示的等效电路。求解电路，得 i_D = 80 mA。



(a) 电路图　　(b) 将二极管等效电路代入的电路

图 10.20　例 10.7 的图

练习 10.9　利用图 10.19 中恰当的模型分别求解图 10.21 所示电路中的 v_o。假设：(a) R_L = 10 kΩ；(b) R_L = 1 kΩ。(提示：确保计算结果与所选二极管的等效模型一致。每种等效模型都有相应的二极管电压和电流的范围，相应的计算结果应在其对应的范围内。)

答案：(a) v_o = 6.017 V；(b) v_o = 3.333 V。

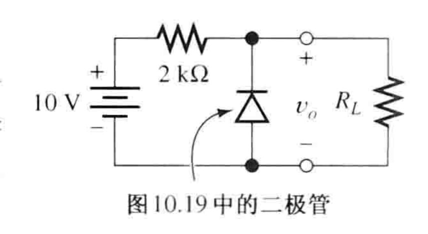
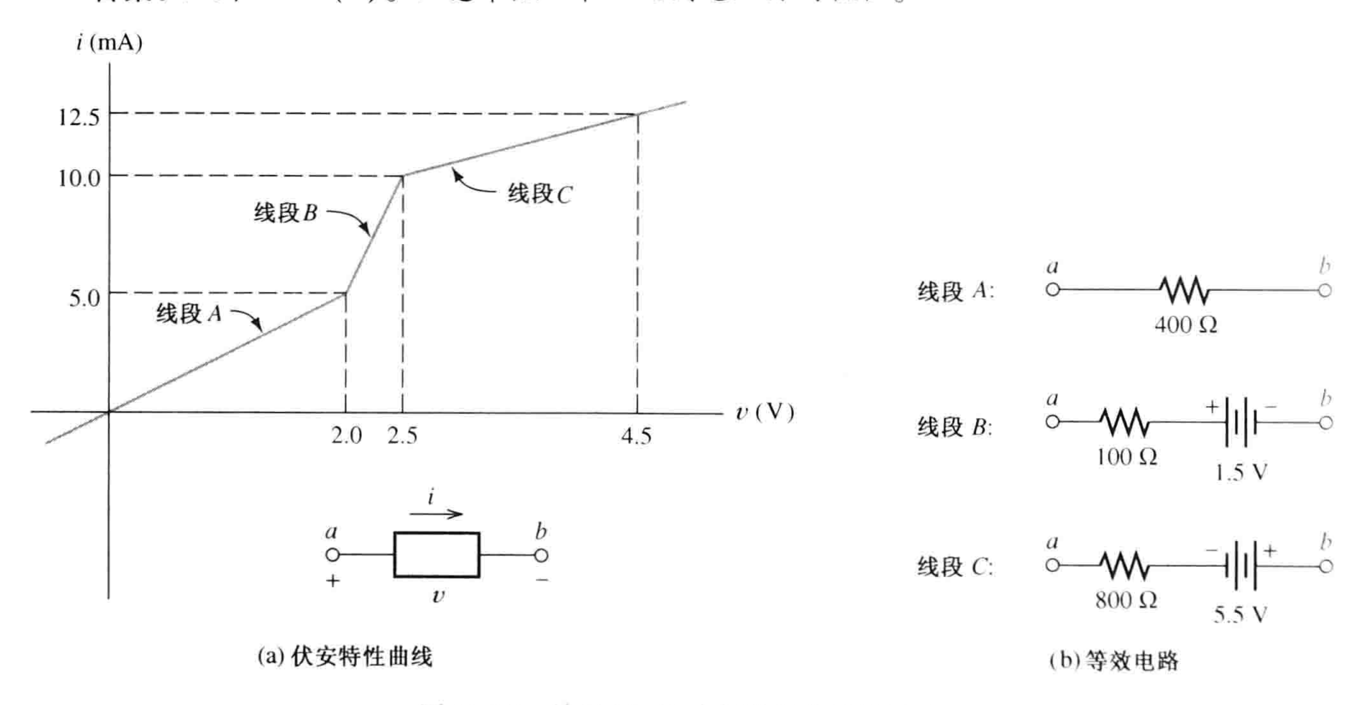


图 10.21　练习 10.9 的电路

练习 10.10　求图 10.22(a)中各线段对应的电路模型，并在等效电路模型中注明节点符号 a 和 b。

答案：如图 10.22(b)。注意节点 a 和 b 之间电压源的极性。



(a) 伏安特性曲线　　(b) 等效电路

图 10.22　练习 10.10 中假设的非线性元件

10.5.1　简化的二极管折线模型

图 10.23 给出了一个比较准确的、简单的二极管折线模型，称为恒压降模型。在二极管的反向偏置区等效为开路，而在正向偏置区有一个恒压降(即二极管导通电压)。该模型等效为一节电池串联一个理想二极管。

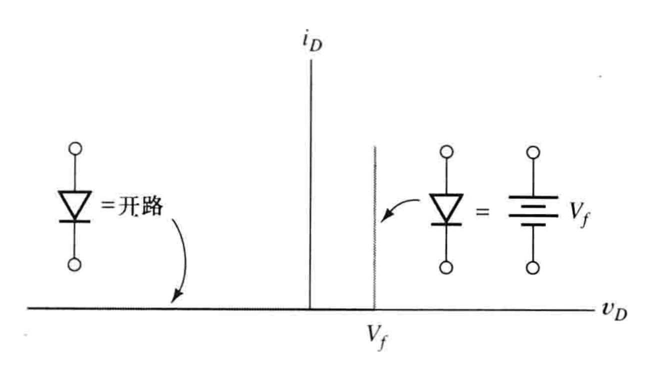


图 10.23 二极管的恒压降模型

10.6 整流电路

本书已经介绍了二极管并分析了二极管电路的一些模型，接下来将介绍一些实用电路。首先是将交流转换为直流的整流器，它是电子电源和电池充电电路的基本组成。典型实例为：电源将 60 Hz 的工频交流电转换为稳定的直流电压并输出给负载(如计算机电路和电视电路)。整流器也可用于信号处理，如无线电信号的解调(解调是还原语音或视频等信息的过程)，还可应用于电子电压表中，完成交流电压到直流电压的高精度转换。

10.6.1 半波整流电路

如图 10.24 所示，半波整流器连接着一个正弦电压源和负载电阻 R_L。当电压源 $v_S(t)$ 为正时，二极管处于正向偏置区。如果该二极管为理想的，则负载两端的电压等于电源电压。对于实际二极管，电路的输出电压比电压源低，电压差等于二极管的管压降。在室温下，硅二极管的管压降约为0.7 V。当电源电压为负时，二极管反向偏置。对于理想二极管，负载电阻中没有电流流过；即使对于实际二极管，电路中也仅有很小的反向电流。因此，仅在电压源的正半周期内才有电流流过负载。

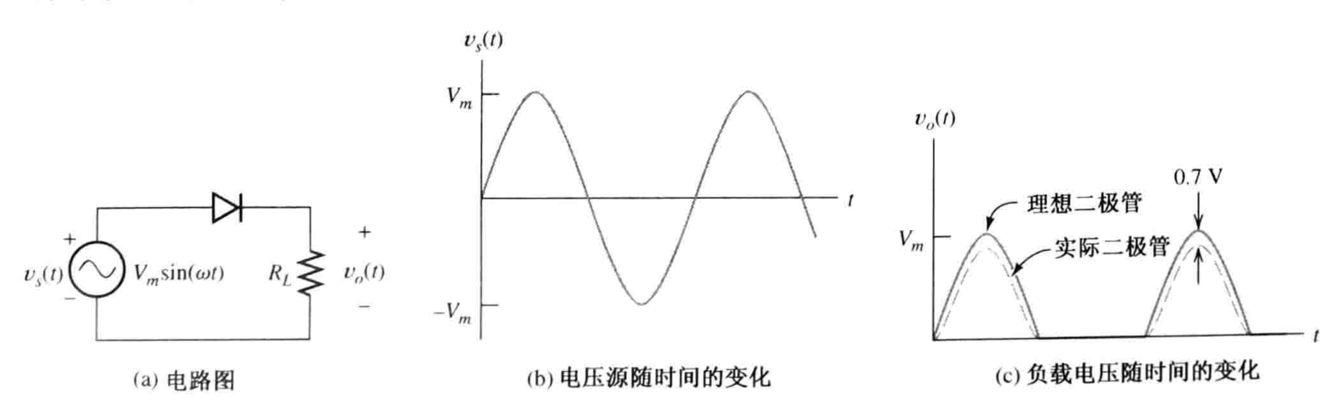


图 10.24 带电阻负载的半波整流器

10.6.1.1 电池充电电路

通过一个半波整流器对电池充电，如图 10.25 所示，当交流电压源的电压高于电池电压时回路中产生电流，注意在电路中加上电阻以限制回路电流的大小是十分必要的。当交流电压源电压低于电池电压时，二极管反向偏置，电流为零。因此，电流的方向始终为向电池充电的方向。

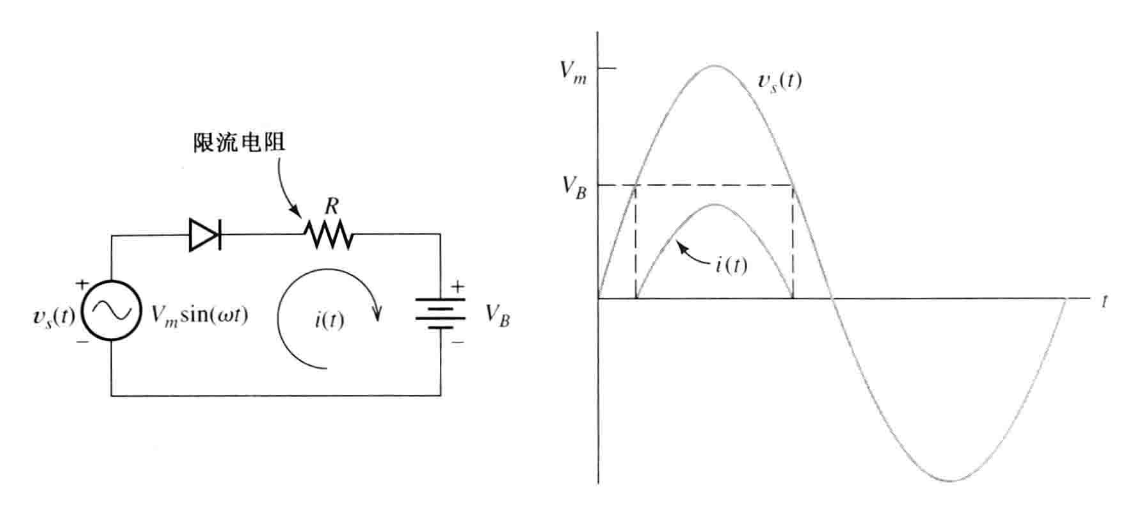


图 10.25 用于电池充电的半波整流器

10.6.1.2 带滤波电容的半波整流器

通常需要将交流电压转换为恒定的直流电压，作为电子电路的电压源。一种方法是在整流器的输出端并联大容量的电容。电路的电压和电流波形如图 10.26 所示。当交流电压为正半周峰值时，电容充电，直到其两端电压等于电源峰值电压(假定二极管为理想二极管)。当电源电压低于电容电压时，二极管反向偏置，流过二极管的电流为零。由电容继续为负载提供电流，通过负载缓慢放电，直到交流电压源的下一个正半周峰值为止。如图 10.26 所示，流过二极管的电流为电容的充电脉冲电流。

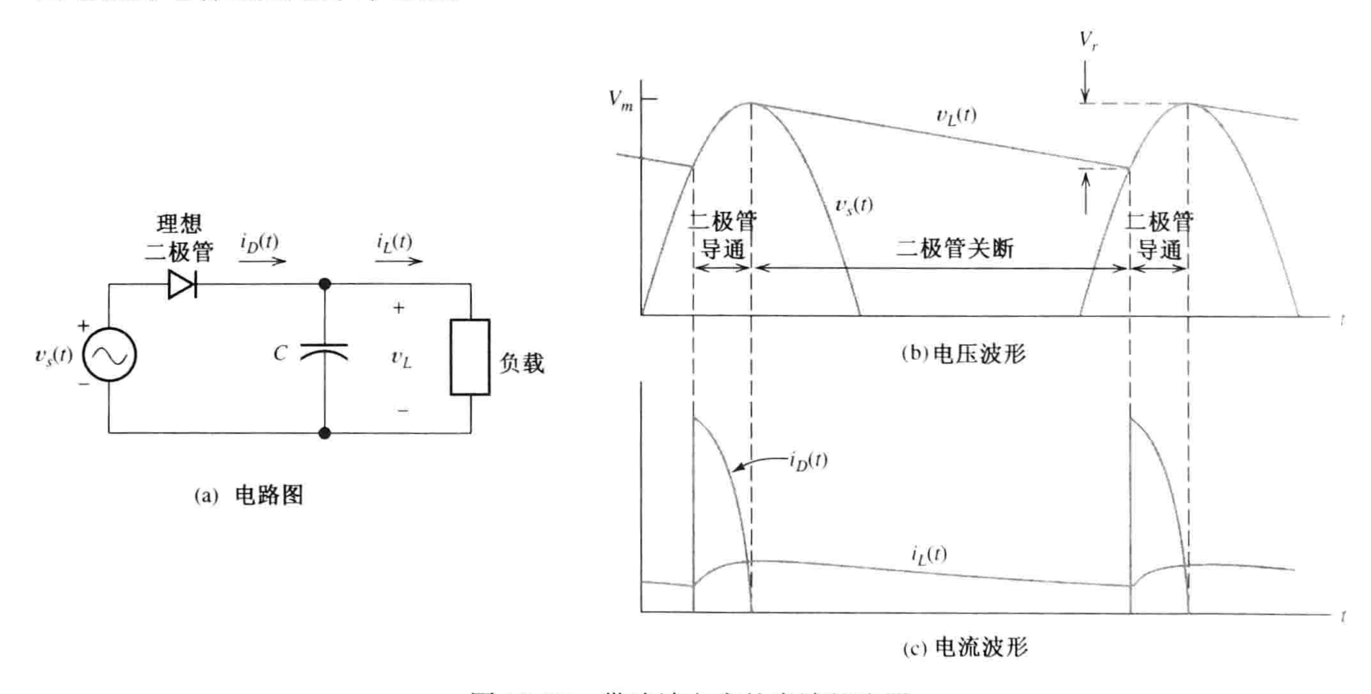


图 10.26 带滤波电容的半波整流器

由于电容周期性地充放电，负载电压中含有较小的交流成分，称为纹波。实际应用可选用大容量的电容来减小纹波的幅度，这样，电容几乎在整个周期内放电，而在一个放电周期内电容释放的电荷量为

$$Q \approx I_L T \tag{10.8}$$

其中，I_L 为负载平均电流，T 为交流电压的周期。由于电容释放的电荷量等于电压变化量和电容的乘积，即

$$Q = V_r C \tag{10.9}$$

式中，V_r 为纹波电压的峰-峰值，C 为电容。由式(10.8)和式(10.9)可求得 C 为

$$C = \frac{I_L T}{V_r} \tag{10.10}$$

实际上，由于负载电流不是恒定的，电容也不是在整个周期内放电，所以式(10.10)只是一个近似值。在设计电源电路时需要对电容值进行估算，而式(10.10)给出了一个比较准确的电容参考值。

在有滤波电容的整流器中，负载两端的平均电压近似等于其两端电压的最大值和最小值的平均值。由图10.26可得，负载两端的平均电压为

$$V_L \approx V_m - \frac{V_r}{2} \tag{10.11}$$

10.6.2　反向峰值电压

整流电路的一个重要参数是二极管的反向峰值电压(PIV)。显然，二极管的击穿电压值应该比PIV值高。在如图10.24所示的带电阻负载的半波整流电路中，PIV为 V_m。

在带滤波电容的整流电路中，与负载并联的电容使得PIV的值约为2 V_m。参考图10.26，在交流输入电压的负半波峰值时，二极管承受的反向电压等于电压源与电容电压之和。

10.6.3　全波整流电路

常用的全波整流电路有几种，其中一种是由两个交流电源和两个二极管构成的，如图10.27(a)所示。电路图中的一个显著特点是接地符号。在电子电路中，通常将许多元件的一端连接到一个称为地的公共点。因此，在图10.27(a)中，R_L 的低压端与两个电压源的串接点相连通。

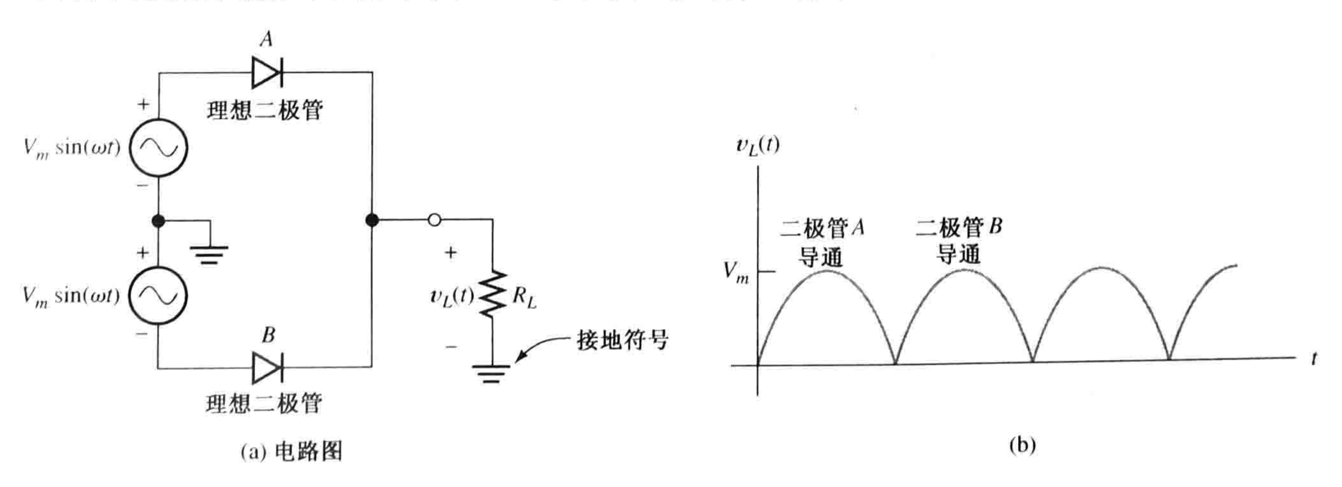


图10.27　全波整流器

当上端电压源在二极管 A 左端的电压极性为正时，则下端电压源在二极管 B 左端的电压极性为负，反之亦然，称两电压源是反相连接。因此，这种电路实际上是由两个反相电压源构成的两个半波整流器和一个公共的负载组成，两个二极管轮流导通半个周期。

通常，这两个反相电压源由一个变压器(变压器的知识将在第15章中介绍)得到。变压器除了能产生反相的交流电压，还能通过改变自身的匝数比调节电压 V_m。这一点是很重要的，因为交流电源并非总是适合直接整流，有时需要电压变换之后才能进行整流。

全波整流器的另一种电路由二极管桥构成，如图 10.28 所示。当交流电压极性为正时，电流依次流经二极管 A、负载和二极管 B。当交流电压为负时，电流依次流经二极管 D、负载和二极管 C。无论交流电压为正还是为负，流过负载的电流方向一致。

如图 10.28 所示，交流电压源的两端都不接地，仅负载的一端接地。如果交流电压源和负载有一个公共接地点，则电路中的部分元件将会短路。

同带滤波电容的半波整流电路类似，在负载两端并联电容也可使负载两端电压变得平滑。在全波整流电路中，电容在重新充电前只在半个周期内放电，因此，全波整流电路中电容容量仅为半波整流的一半。修改式(10.10)，得到全波整流器的滤波电容为

$$C = \frac{I_L T}{2V_r} \tag{10.12}$$

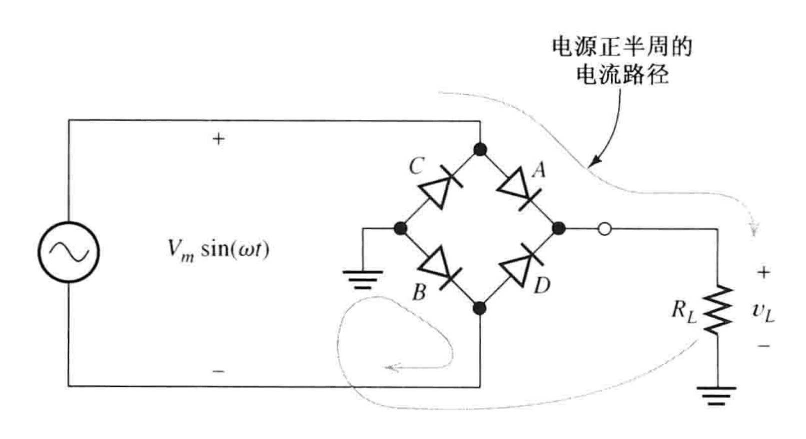


图 10.28 桥式全波整流器

练习 10.11 在图 10.25 所示的电池充电电路中，$V_m = 20$ V，$R = 10$ Ω，$V_B = 14$ V。(a)设二极管为理想的，求峰值电流；(b)求二极管在每个周期内的导通角。

答案：(a) $I_{\text{peak}} = 600$ mA；(b)二极管在每个周期内导通的百分比为 25.3%。

练习 10.12 电路如图 10.26 所示。一个电源对负载输出的(平均)电压为 15 V，电流为 0.1 A，频率为 60 Hz。设纹波电压峰-峰值为 0.4 V，二极管的正向偏置区的管压降为 0.7 V。求交流电压峰值 V_m 及滤波电容的近似电容值。(提示：为了实现纹波为 0.4 V，负载平均电压为 15 V，则负载电压峰值应为 15.2 V。)

答案：$V_m = 15.9$ V；$C = 4166$ μF。

练习 10.13 同练习 10.12，电路图如图 10.28 所示，电容与负载 R_L 并联。

答案：$V_m = 16.6$ V；$C = 2083$ μF。

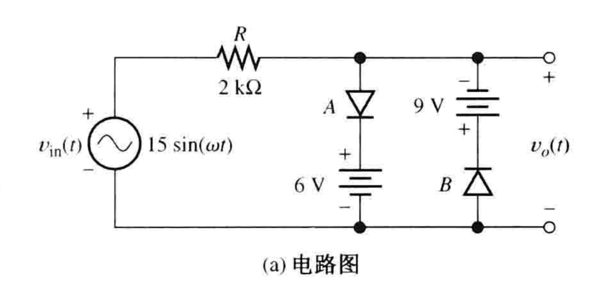
10.7 波形整形电路

在电子系统中有各种各样的波形整形电路，例如电视或雷达的收发系统中的整形电路。本节将介绍一些由二极管构成的整形电路。

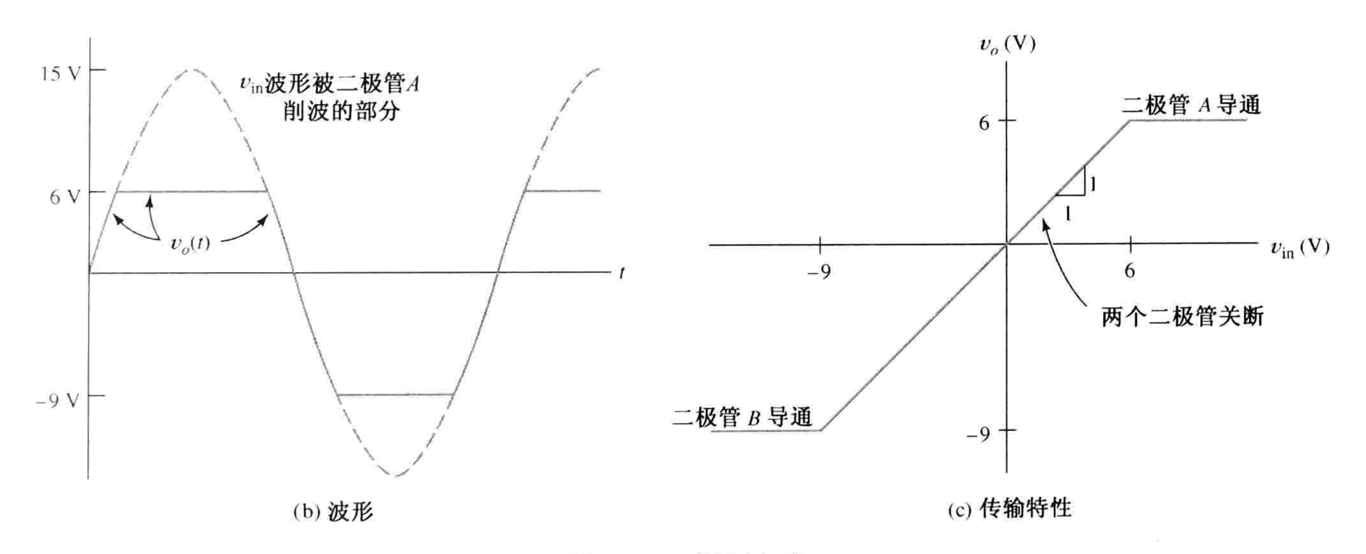
10.7.1 限幅(削波)电路

限幅电路由二极管构成，用于“削掉”输入信号的一部分波形。例如图 10.29 所示电路，将输入波形中电压高于 6 V、低于 −9 V 的部分削掉(假设二极管为理想的)。当输入电压在 −9 V

和6 V之间时，两个二极管均截止，没有电流流动。这样，电阻 R 两端的电压为零，输出电压 v_o 等于输入电压 v_{in}。另一方面，当 v_{in} 超过6 V时，二极管 A 导通，6 V电池直接接到输出端，输出电压为6 V。当 v_{in} 低于 -9 V时，二极管 B 导通，输出电压为 -9 V。这样，峰值为15 V的正弦电压经限幅电路整形后的输出波形如图10.29(b)所示，电路的传输特性如图10.29(c)所示。



(a) 电路图

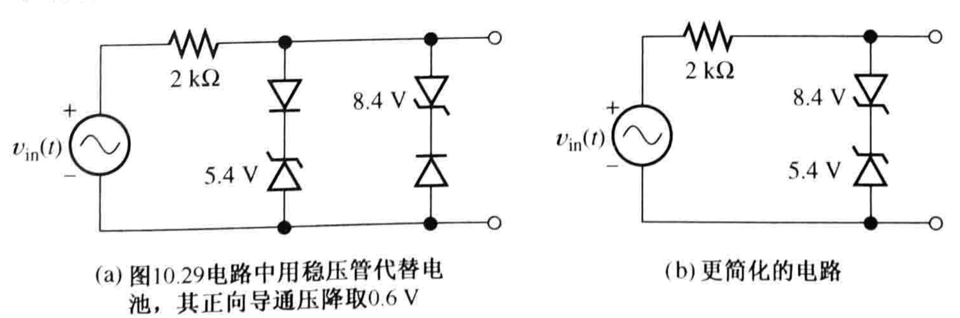


(b) 波形　　(c) 传输特性

图 10.29　限幅电路

注意：电阻 R 值应选择得足够大，使二极管正向导通时流过二极管的电流在适当的范围内（约几个毫安）；同时，电阻 R 的值应选择得足够小，使二极管反向关断时，电流在 R 上的电压降可以被忽略。通常，满足这样要求的电阻值的范围是很宽的。

在图10.29中，假设二极管是理想的。如果使用小信号硅二极管，则期望有一个0.6 V或0.7 V的正向压降来补偿电池电压。此外，在电子电路中应尽量避免使用电池，因为电池需要周期性地更换。因此，更好的设计方案是由稳压管代替电池。图10.29所示电路的实际电路如图10.30所示，各稳压管均已标明击穿电压值。

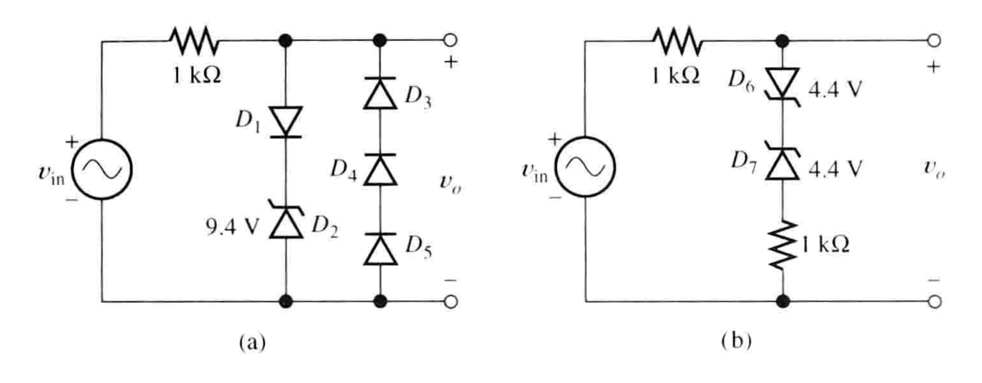


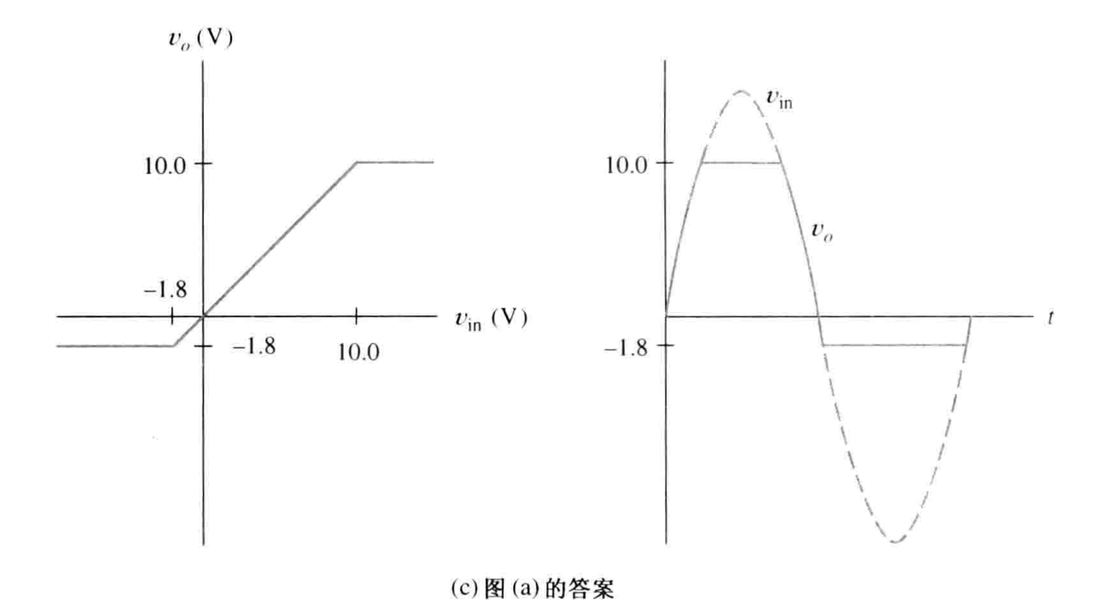
(a) 图10.29电路中用稳压管代替电池，其正向导通压降取0.6 V　　(b) 更简化的电路

图 10.30　图10.29的实际等效电路

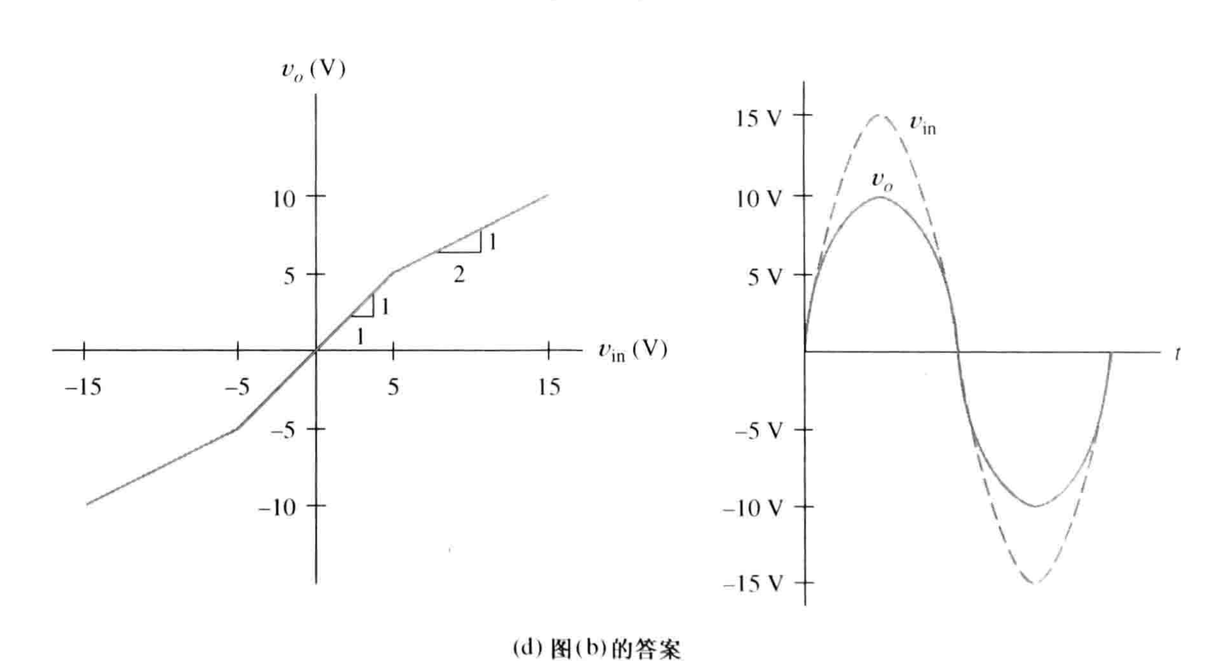
练习 10.14 已知二极管的正向管压降为 0.6 V，要求：(a)绘出图 10.31(a)和(b)所示电路的传输特性。(b)绘出 $v_{in}(t) = 15\sin(\omega t)$ 时的输出波形。

答案：(a)见图 10.31(c)；(b)见图 10.31(d)。





(c) 图 (a) 的答案

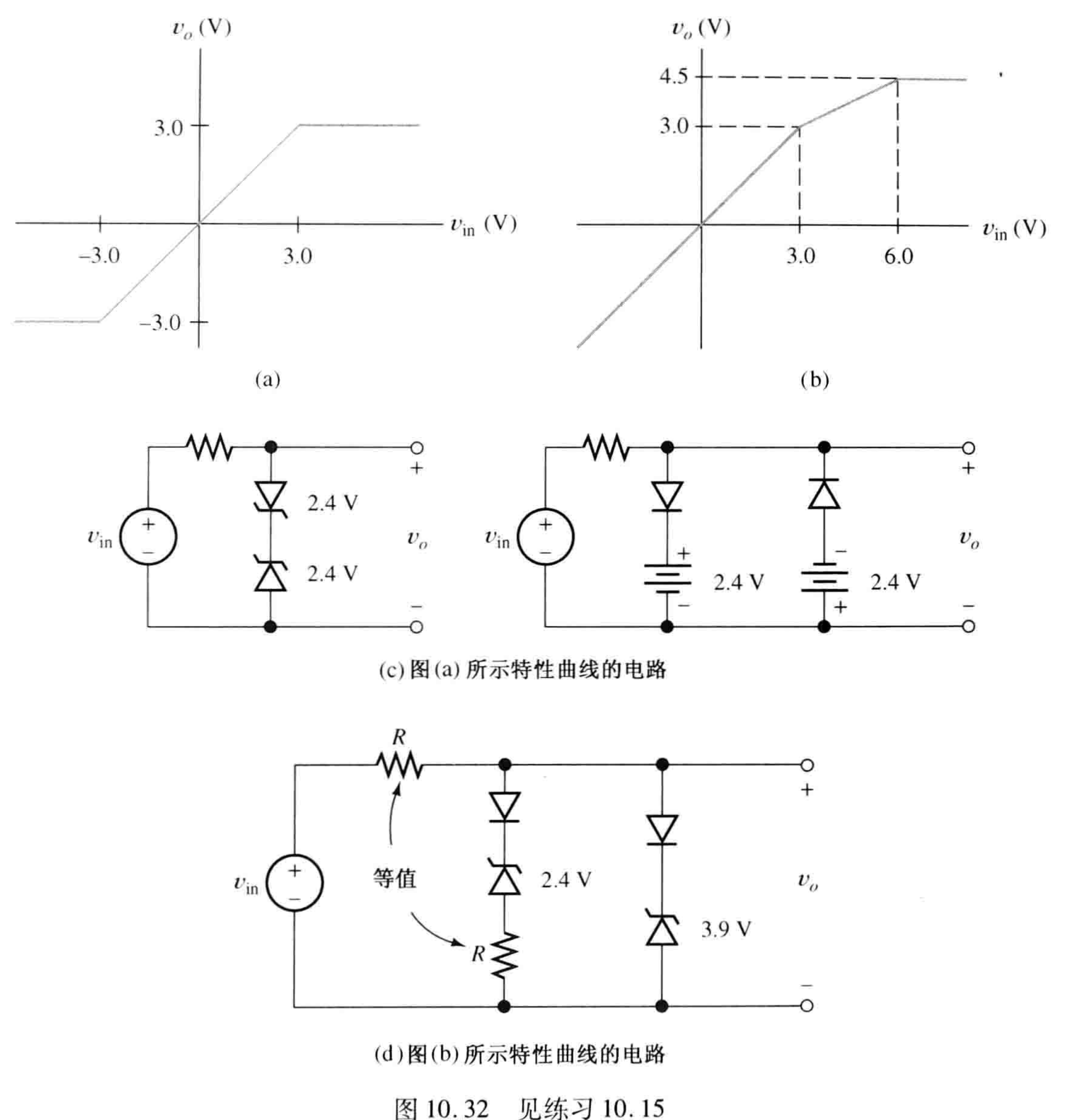


(d) 图(b)的答案

图 10.31　见练习 10.14

练习 10.15 设计一个限幅电路，使其传输特性分别为(a)[图 10.32(a)]和(b)[图 10.32(b)]。二极管的正向管压降为0.7 V。[对(b)的提示：在电路中串入一个电阻到二极管支路，实现输入 v_{in} =3 V 时二极管导通，该部分电路对应于图中 v_{in} =3 V 到 v_{in} =6 V 间的线段。]

答案：(a)见图 10.32(c)；(b)见图 10.32(d)。



(c)图(a)所示特性曲线的电路

(d)图(b)所示特性曲线的电路

图 10.32 见练习 10.15

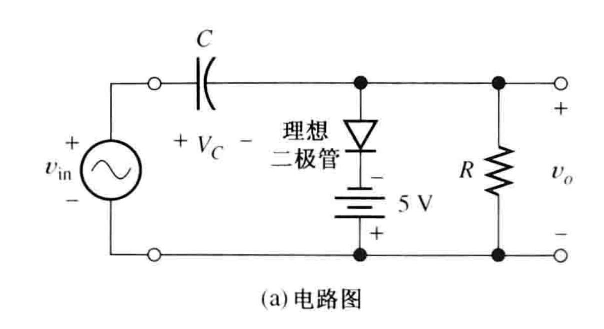
10.7.2 钳位电路

钳位电路是另一种二极管整形电路，它将一个直流成分加到输入的交流波形上，使得正(或负)峰值保持在某一特定的值上。也就是说，波形的峰值电压被“夹住”于一个指定的值。图 10.33所示电路即为钳位电路，其输出电压的正峰值被固定为 -5 V。

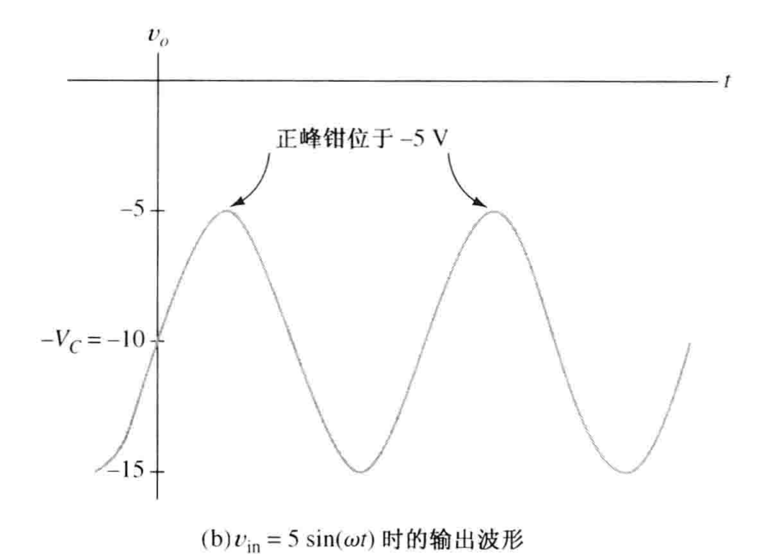
电路中若一个电容的电容值很大，则电容的放电过程很慢，可认为电容两端的电压是基本恒定的。因为电容的电容值很大，所以电容对交流输入信号的阻抗就很小。电路的输出电压为

$$v_O(t) = v_{in}(t) - V_C \tag{10.13}$$

如果输入信号的正半波使输出电压高于 -5 V，则二极管导通，V_C 增大，导致电容充电到某值以使输出电压最大值为 -5 V。电阻 R 的阻值应足够大，使电容缓慢地放电。这一点是必要的，才能保证在输入波形的峰值减小时电路仍然满足要求。



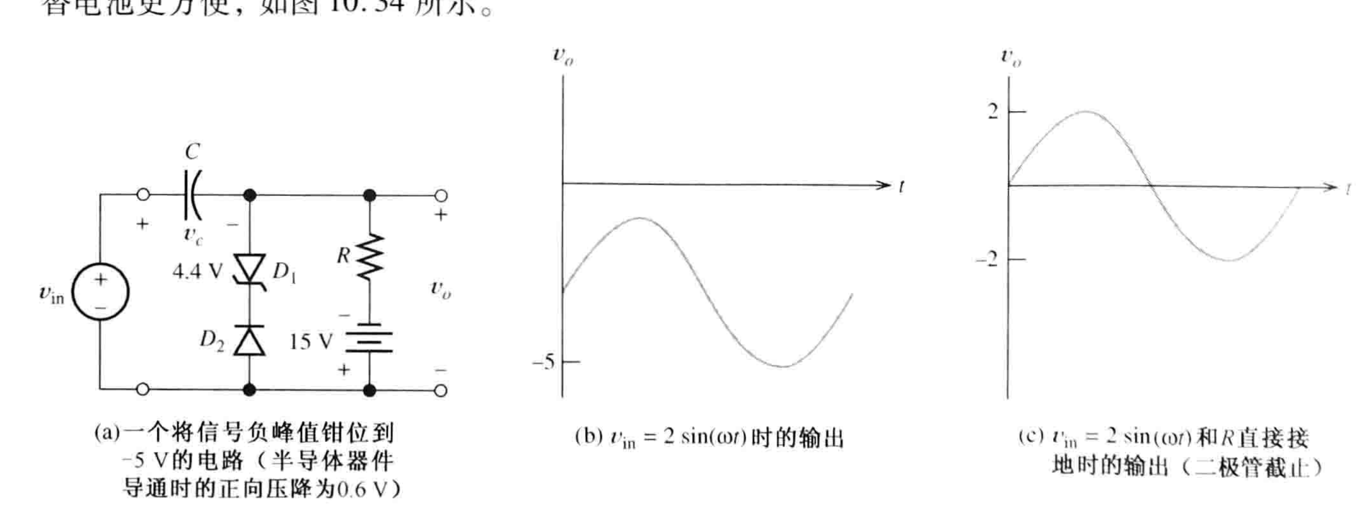
(a)电路图



(b)$v_{in}=5\sin(\omega t)$ 时的输出波形

图 10.33　钳位电路

当然，也可通过改变电池电压来改变电路的钳位电压。如果将二极管反向，则电路钳住输入波形的负峰。如果得到期望的钳位电压需使二极管反向偏置，则有必要将放电电阻串联一个适当的直流电压源与电容形成回路，以确保二极管导通，实现钳位功能。此外，使用稳压管代替电池更方便，如图 10.34 所示。



(a)一个将信号负峰值钳位到−5 V的电路（半导体器件导通时的正向压降为0.6 V）

(b) $v_{in}=2\sin(\omega t)$时的输出

(c) $v_{in}=2\sin(\omega t)$和R直接接地时的输出（二极管截止）

图 10.34　见练习 10.16

练习 10.16　如图 10.34(a)所示的电路，假设电容足够大，使得在一个周期内电容不会明显地通过电阻 R 放电。问：(a)如果 $v_{in}(t)=0$，输出稳态电压为多少？(b)绘出 $v_{in}(t)=2\sin(\omega t)$ 时的输出稳态电压波形。(c)假定电阻被直接接地(即 15 V 电源短路)，如果 $v_{in}(t)=2\sin(\omega t)$，请绘出输出稳定电压的波形。

答案：(a) $v_{in}(t)=0$ 时，输出 $v_o=-5$ V；(b)如图10.34(b)所示；(c)见图10.34(c)。

练习10.17 设计一个电路，将交流信号的负峰钳位在+6 V。可以使用任意电池、电阻和电容以及稳压管或常规二极管，正向管压降为0.6 V。

答案：见图10.35。也可以有其他的解。

练习10.18 重复练习10.17，将交流信号的正峰钳位在+6 V。

答案：见图10.36。也可以有其他的解。

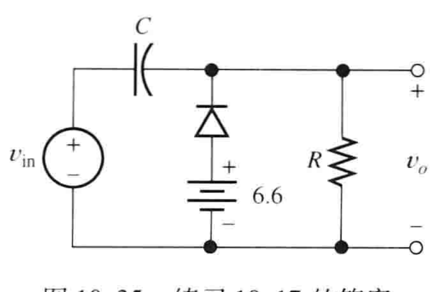


图10.35 练习10.17的答案

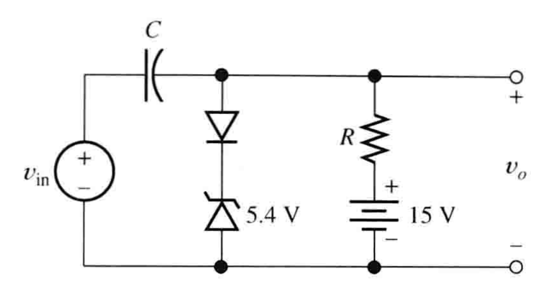


图10.36 练习10.18的答案

10.8 线性小信号等效电路

在电子电路中，我们会遇到许多这样的例子，直流电压源为非线性器件提供静态工作点的偏置电压，而较小的交流信号作为电路的输入。我们常常将这类电路分成两部分来分析。首先分析直流电路，求出静态工作点。在偏置电路的分析中，必须处理电路的非线性器件。其次是交流分析，仅考虑交流小信号的传输，当信号足够小时，任何非线性特性都能近似地线性化。因此，可以先获得非线性器件的线性小信号等效电路，然后再进行交流分析。

通常，这种电路的设计主要考虑交流信号会引起怎样的变化。直流电压仅仅使器件工作在一个适当的静态工作点。例如，对于便携式收音机，主要考虑信号的接收、解调、放大并传送到扬声器；由电池提供的直流电压完成对交流信号的变换功能。不过，大部分设计时间是考虑如何处理交流小信号。

线性小信号等效电路是应用在电子电路中的一种重要分析方法，本节将通过一个简单的二极管电路阐明这一方法和原理。在第12章和第13章中，将用此方法分析三极管放大电路。

已知一个二极管的小信号等效电路仅由一个电阻构成，二极管的特性曲线如图10.37所示。假设直流电压源使电路工作在静态点(或Q点)，当电路输入交流小信号时，瞬时工作点在Q点上下微小地摆动。在足够小的交流信号变化范围内，特性曲线段可看作直线，于是

$$\Delta i_D \approx \left(\frac{\mathrm{d}i_D}{\mathrm{d}v_D}\right)_Q \Delta v_D \qquad (10.14)$$



式中，Δi_D为由交流信号引起的二极管电流相对Q点电流的微变量，Δv_D为二极管电压相对Q点电压的微变量，而$(\mathrm{d}i_D/\mathrm{d}v_D)_Q$为二极管特性曲线在$Q$点的斜率。注意，斜率的单位是电阻的倒数。

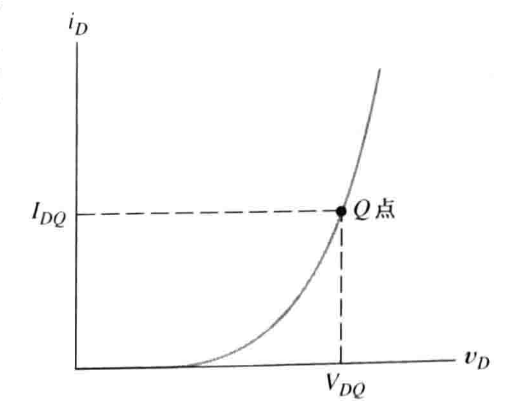


图10.37 含Q点的二极管特性曲线

因此，定义二极管的动态电阻为

$$r_d = \left[\left(\frac{\mathrm{d}i_D}{\mathrm{d}v_D} \right)_Q \right]^{-1} \tag{10.15}$$

而式(10.14)变为

$$\Delta i_D \approx \frac{\Delta v_D}{r_d} \tag{10.16}$$

为了便于表示，可去掉符号 Δ，用 v_d 和 i_d 表示在 Q 点附近二极管电压和电流的变化量。注意，小写的下标字母用于表示电流和电压的微小变化量。这样，对于交流小信号有

$$i_d = \frac{v_d}{r_d} \tag{10.17}$$

由式(10.15)可知，二极管的交流小信号等效电阻值为其特性曲线的斜率的倒数。二极管的电流由肖克莱方程式(10.1)表示如下：

$$i_D = I_s \left[\exp\left(\frac{v_D}{nV_T} \right) - 1 \right]$$

特性曲线的斜率可通过对肖克莱方程进行微分求得，即

$$\frac{\mathrm{d}i_D}{\mathrm{d}v_D} = I_s \frac{1}{nV_T} \exp\left(\frac{v_D}{nV_T} \right) \tag{10.18}$$

代入 Q 点电压：

$$\left(\frac{\mathrm{d}i_D}{\mathrm{d}v_D} \right)_Q = I_s \frac{1}{nV_T} \exp\left(\frac{V_{DQ}}{nV_T} \right) \tag{10.19}$$

在正向偏置条件下，V_{DQ} 至少是 V_T 的几倍，则肖克莱方程括号中的 -1 项可以忽略，得

$$I_{DQ} \approx I_s \exp\left(\frac{V_{DQ}}{nV_T} \right) \tag{10.20}$$

将该式代入式(10.19)，得

$$\left(\frac{\mathrm{d}i_D}{\mathrm{d}v_D} \right)_Q = \frac{I_{DQ}}{nV_T} \tag{10.21}$$

再将上式代入式(10.15)，得到二极管在 Q 点的动态小信号电阻：

$$r_d = \frac{nV_T}{I_{DQ}} \tag{10.22}$$

综上所述，对于在二极管的 Q 点附近微小变动的信号，可将二极管简单地看作一个线性电阻，电阻值由式(10.22)计算得到(条件是二极管正向偏置)。随着 Q 点电流 I_{DQ} 的增加，电阻值减小，因此，随着 Q 点的上移，一个固定幅值的交流电压将产生一个幅度更高的交流电流，如图 10.38 所示。

10.8.1 电子电路中电流和电压的标记法

在本书中曾经讲述过对直流与交流符号的不同表示，因此，有必要再次说明对二极管电流和电压的标记规则：

- v_D 和 i_D 表示二极管总的瞬时电压和电流。如果需要强调这些变量随时间变化的特性，则用 $v_D(t)$ 和 $i_D(t)$ 表示。
- V_{DQ} 和 I_{DQ} 表示二极管在静态工作点的直流电压和电流。
- v_d 和 i_d 表示(小)交流信号。如果想要强调其时间变化特性，则用 $v_d(t)$ 和 $i_d(t)$ 表示。

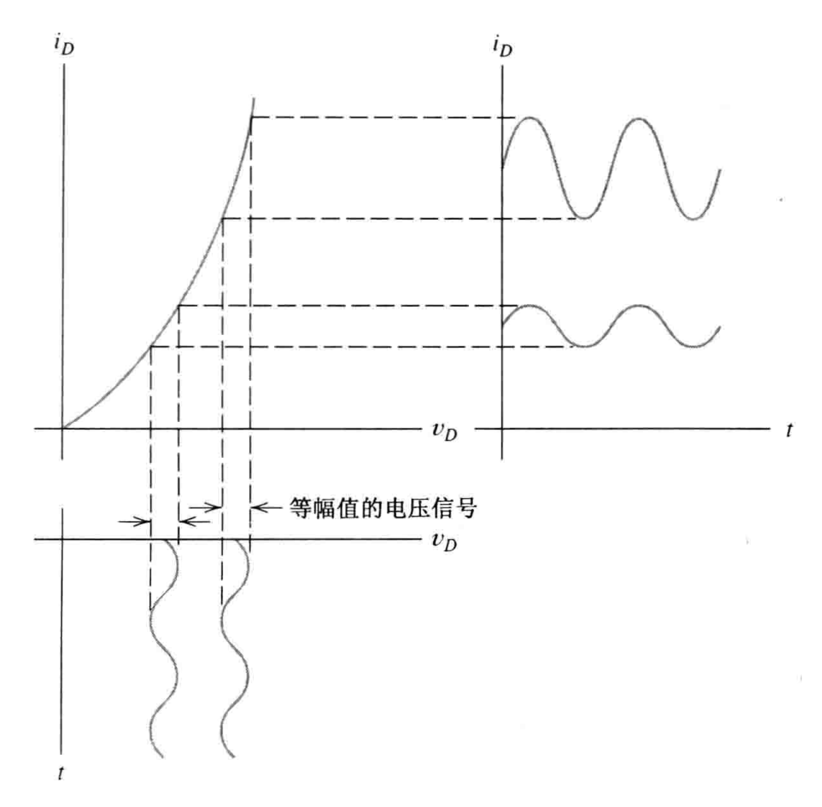


图 10.38　Q 点变化引起的输入/输出变化

图 10.39 对上述标记法进行了举例说明。

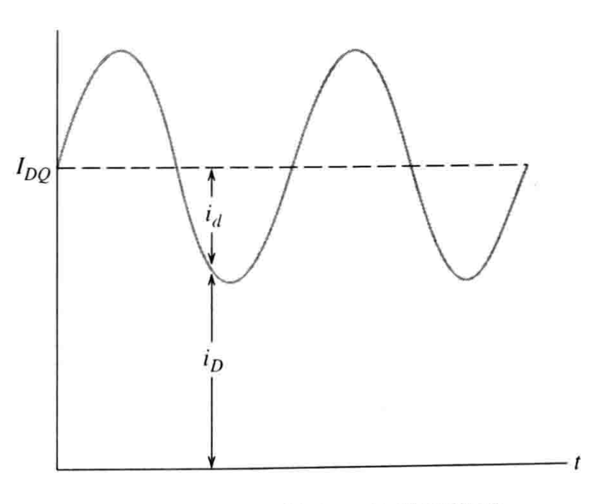


图 10.39　二极管电流的举例说明

练习 10.19　假设温度为 300 K，取 $n=1$，二极管的 I_{DQ} 分别为：(a)0.1 mA；(b)1 mA；(c)10 mA。分别计算此二极管的动态电阻值。

答案：(a)260 Ω；(b)26 Ω；(c)2.6 Ω。

10.8.2　压控衰减器

现在，我们分析一个简单而常见的线性等效电路的实例，如图 10.40 所示。该电路的功能是产生一个输出信号 $v_o(t)$，而 $v_o(t)$ 为交流输入信号 $v_{in}(t)$ 的一部分。这个电路的功能与电阻分压器(见 2.3 节)相似，但是此电路的分压比取决于另一电压 V_C，V_C 为控制信号。我们称信号幅度减小的过程为衰减，因此，这里分析的电路称为压控衰减器。输入信号被衰减的程度取决于直流控制电压 V_C。

注意，被衰减的交流信号通过耦合电容 C_1 与电路相连，输出电压经耦合电容 C_2 与负载 R_L 相连。电容的阻抗为

$$Z_C=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

式中，ω 为交流信号的角频率，必须选择足够大的电容，使其能够对交流信号有效短路。同时，耦合电容对于直流表现为开路，这样，二极管的静态工作点(Q 点)就不会受到信号源或负载的影响。这种耦合方式尤其适用于在变化的电源和负载下运行可能影响 Q 点的电路，此外，耦合电容也阻止了直流电流流入电源或负载。

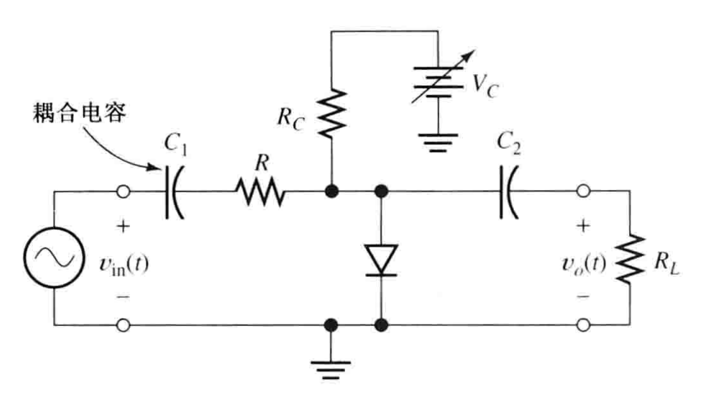


图 10.40　可变衰减器

由于耦合电容隔离了直流，所以仅考虑直流偏置电路中的 V_C 、R_C 和二极管，求得 Q 点。图 10.40所示电路的直流等效电路如图 10.41 所示，使用本章曾经讲述过的方法分析 Q 点，将二极管的 Q 点电流代入式(10.22)，即可求得二极管的动态电阻值。

现在分析对交流信号的传输。此时，直流电源被看作短路，信号源产生的交流电流流过电压源 V_C。由定义可知，V_C 为一个直流电压源，其两端的电压恒定。由于直流电压源有交流电流成分，但是没有交流电压，所以直流电压源对于交流信号等效为短路。这是我们画交流等效电路时必须遵循的一个重要准则。

图 10.40 所示电路的交流等效电路如图 10.42 所示，电压源和电容用短路代替，二极管由其动态电阻代替。该电路为一个电压分压器，可由线性电路分析法分析。R_C 、R_L 和 r_d 并联的等效电阻为

$$R_p = \frac{1}{1/R_C + 1/R_L + 1/r_d} \tag{10.23}$$

则电路的电压增益为

$$A_v = \frac{v_o}{v_{\text{in}}} = \frac{R_p}{R + R_p} \tag{10.24}$$

显然，A_v 是小于 1 的。

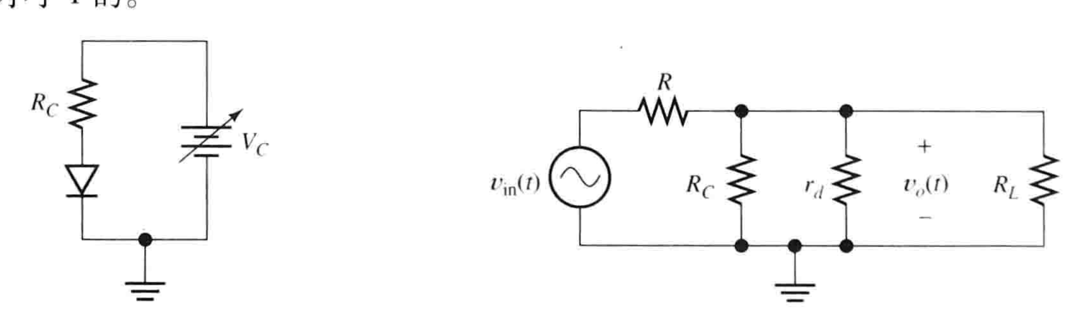


图 10.41　图 10.40 所示电路的直流等效电路

图 10.42　图 10.40 所示电路的交流等效电路

练习 10.20　设图 10.40 中的电路有 $R = 100\ \Omega$，$R_C = 2\ \text{k}\Omega$，$R_L = 2\ \text{k}\Omega$。二极管在 300 K 时的 $n = 1$，管压降为 0.6 V。求 V_C 分别为(a)1.6 V；(b)10.6 V 时 Q 点对应的二极管电流和 A_v。

答案：(a) $I_{DQ} = 0.5$ mA，$A_v = 0.331$；(b) $I_{DQ} = 5$ mA，$A_v = 0.0492$。

压控衰减器的一个应用实例是磁带录音机。在谈话录音中常常遇到的问题是一些人的声音太小，而另一些人的声音太大；或者说，一些人可能离麦克风太远，而另一些人离麦克风又太近。如果在麦克风与磁带录音头之间加上一个固定增益的放大器，或者导致弱信号电平低于噪声水平，或者信号太强，导致驱动录音头时引起严重的非线性失真。

解决这一问题的途径是在系统中增加一个压控衰减器，如图10.43所示。衰减器放在麦克风与高增益放大器之间。当录音信号较弱时，较小的控制电压使得信号衰减小。另一方面，当录音信号较强时，较大的控制电压使信号适当衰减，从而避免了失真。

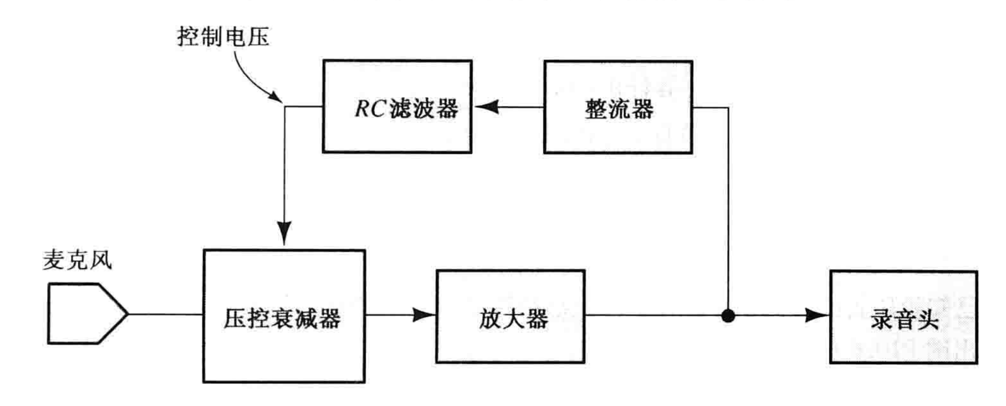


图10.43　压控衰减器为录音头维持一个合适的信号幅值不变

控制电压通过整流处理放大器输出信号而产生。整流信号通过较长时间常数的*RC*滤波器滤波，这使得衰减程度取决于输出信号的平均值，而不是瞬时变化值。适当的参数设计可使录音系统在输入信号变化范围更宽的条件下，仍然满足录音头输出信号强弱合理的要求。

本章小结

1. *pn*结二极管是一个正向导通、反向截止的二端元件(从阳极到阴极导通)。其伏安特性分为3个区：正向偏置区、反向偏置区和反向击穿区。
2. 肖克莱方程表示了*pn*结二极管的电压和电流的关系。
3. 非线性电路可用负载线法来分析，如含二极管的电路。
4. 齐纳二极管(稳压管)工作在反向击穿区，产生恒定的基准电压。
5. 稳压器在变化的电源下能产生一个近乎恒定的输出电压。
6. 二极管的理想模型为：若电流从二极管的正方向流过，则二极管被视为短路；如果在二极管两端加反向电压，则二极管被视为开路。
7. 在假设状态法中，首先为每个二极管假定一个导通或截止的状态；然后分析电路，核对电流方向和电压极性与假定状态是否一致。如果假设不正确，则重复上述过程，直到找到一组合理的二极管工作状态。
8. 在分析非线性元件的折线模型中，伏安特性可近似分解为多个直线段，而每一个直线段的等效模型为一个电压源串联一个电阻。
9. 整流电路可应用于电池的充电以及把交流电压转换为恒定直流电压。半波整流电路仅在交流输入信号的半个周期内导通电流，而全波整流电路则在整个输入信号周期内导通电流。
10. 整形电路改变输入信号的波形，并将改变了的波形传送到输出端。限幅电路将输入信号中高于(或低于)给定水平的部分去掉；钳位电路则加上或减去一个直流电压，使得波形的正(或负)峰值为指定的电压。
11. 二极管的小信号等效电路为一个动态电阻，电阻值大小取决于工作点(*Q*点)。
12. 在小信号等效电路中，直流源和耦合电容由短路代替，二极管由其动态电阻代替。

习题

10.1 节　二极管的基本概念

P10.1　画出二极管的电路符号，并标出阳极和阴极。

P10.2　画出典型二极管的伏安特性，并标出其各个区。

P10.3　描述一个二极管载流子流动的模拟途径。

P10.4　写出肖克莱方程，定义所有的变量或者常量。

P10.5　计算温度为20℃和150℃时的 V_T。

*P10.6　已知稳压管的反向击穿电压，设包括稳压管在内的所有二极管的正向管压降为0.6 V。要求做出图 P10.6 所示电路的 $i \sim v$ 曲线。

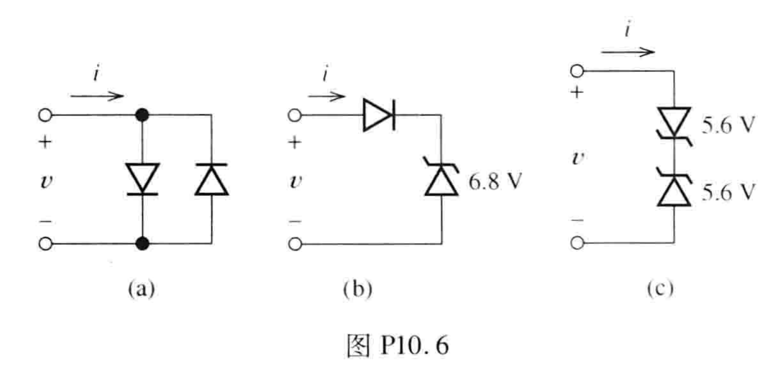


图 P10.6

P10.7　对于图 P10.7 所示电路，重复习题 P10.6 的要求。

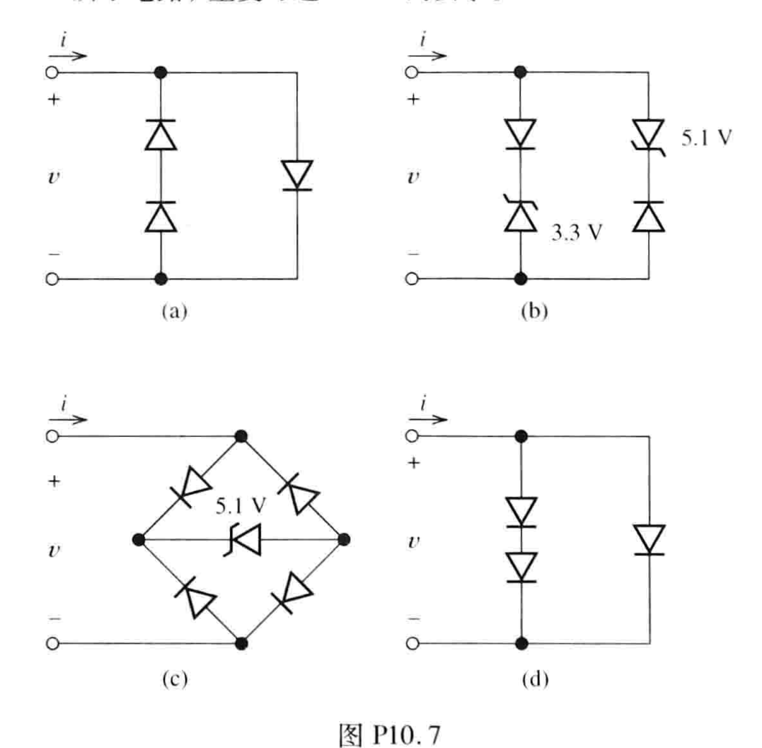


图 P10.7

*P10.8　一个二极管工作在正偏状态，特性如式(10.4)所示，其中 $V_T = 0.026$ V。当 $v_{D1} = 0.600$ V 时，电流 $i_{D1} = 1$ mA；当 $v_{D2} = 0.680$ V 时，电流 $i_{D2} = 10$ mA。请计算 I_s 与 n 的值。

P10.9　一个硅二极管流过的小信号正向电流为常值，则二极管两端的电压随着管体温度的升高而减小，速度大约为2 mV/K。假设电流为1 mA、温度为25℃时的端电压是0.650 V，要求计算温度在175℃、电流为1 mA时的二极管端电压。

P10.10 一个二极管工作在300 K温度下，且 $v_D=0.6$ V时，$i_D=0.2$ mA。设 $n=2$，$V_T=26$ mV。用肖克莱方程计算在 $v_D=0.65$ V和 $v_D=0.70$ V时二极管的电流。

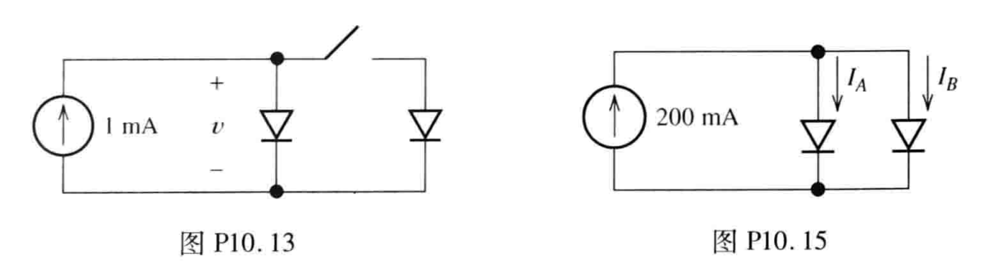
P10.11 一个二极管的 $n=1$，$I_s=10^{-14}$ A，$V_T=26$ mV。要求：(a)选择一种软件来绘制二极管的 $i_D\sim v_D$ 曲线，电流 i_D 范围为10 μA ~ 10 mA，i_D 选择对数坐标，v_D 选择线性坐标。问曲线是什么形状？(b)将一个100 Ω电阻与二极管串联，仍然在 $i_D\sim v_D$ 坐标轴上绘制曲线，比较这两条曲线的不同，问：电阻值为多大时曲线出现峰值？

P10.12 一个硅二极管满足肖克莱方程，$n=2$，工作在150℃下。当电流为1 mA时二极管两端电压为0.25 V，求电压增至0.30 V时的电流。

*P10.13 二极管的特性曲线与图P10.13所示相似，$n=1$，温度恒定为300 K。在开关闭合前，端电压为600 mV。要求计算开关闭合后的电压 v 值。当 $n=2$ 时重复以上要求。

P10.14 假设一个二极管的工作温度恒定为300 K，通过正向电流1 mA，端电压是600 mV；另外，当电流为10 mA时，端电压是700 mV。要求计算二极管的 n 值。

*P10.15 电流陡升，如图P10.15所示，假设所有二极管的特性相同，且 $n=1$。当环境温度为300 K，正向电流100 mA流过二极管时，二极管端电压是700 mV。求：(a) 如果两个二极管的温度都是300 K，计算 I_A、I_B 的值。(b) 如果一个二极管的温度是300 K，另一个二极管的温度是305 K，假设温度每升高5 K，I_S 值加倍，试计算 I_A、I_B 的值。[提示：对(a)的求解可采用对称性，对(b)则针对两个二极管的端电压采用超越方程来求解。经过反复实验，可以获得一个重要结论，即：当起始温度相同时，两个二极管流过相同的电流，即各自流过一半电流。但是，如果其中一个二极管通过的电流稍许增加，管子会升温，导致通过更大的电流。最终，此二极管电流会陡升，通过绝大部分电流。此应用尤其常见于彼此隔热的两个器件，这时可能引起其中一个器件严重发热。]



图P10.13　　　　图P10.15

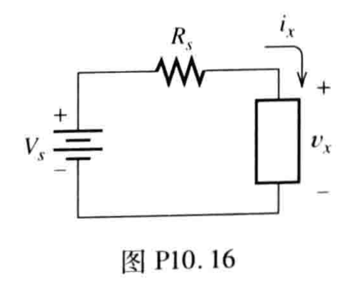
10.2节 二极管电路的负载线分析法

*P10.16 如图P10.16所示的非线性电路元件的伏安特性为 $i_x=[\exp(v_x)-1]/10$，已知 $V_S=3$ V，$R_S=1$ Ω，用图解负载线法求解 i_x 和 v_x。(可以用计算机程序画出特性曲线图和负载线。)

P10.17 重复习题P10.16，$V_S=20$ V，$R_S=5$ kΩ，$i_x=0.01/(1-v_x/5)^3$ mA。

P10.18 重复习题P10.16，$V_S=6$ V，$R_S=3$ Ω，$i_x=v_x^3/8$ mA。

P10.19 重复习题P10.16，$V_S=3$ V，$R_S=1$ Ω，$i_x=v_x+v_x^2$ mA。



图P10.16

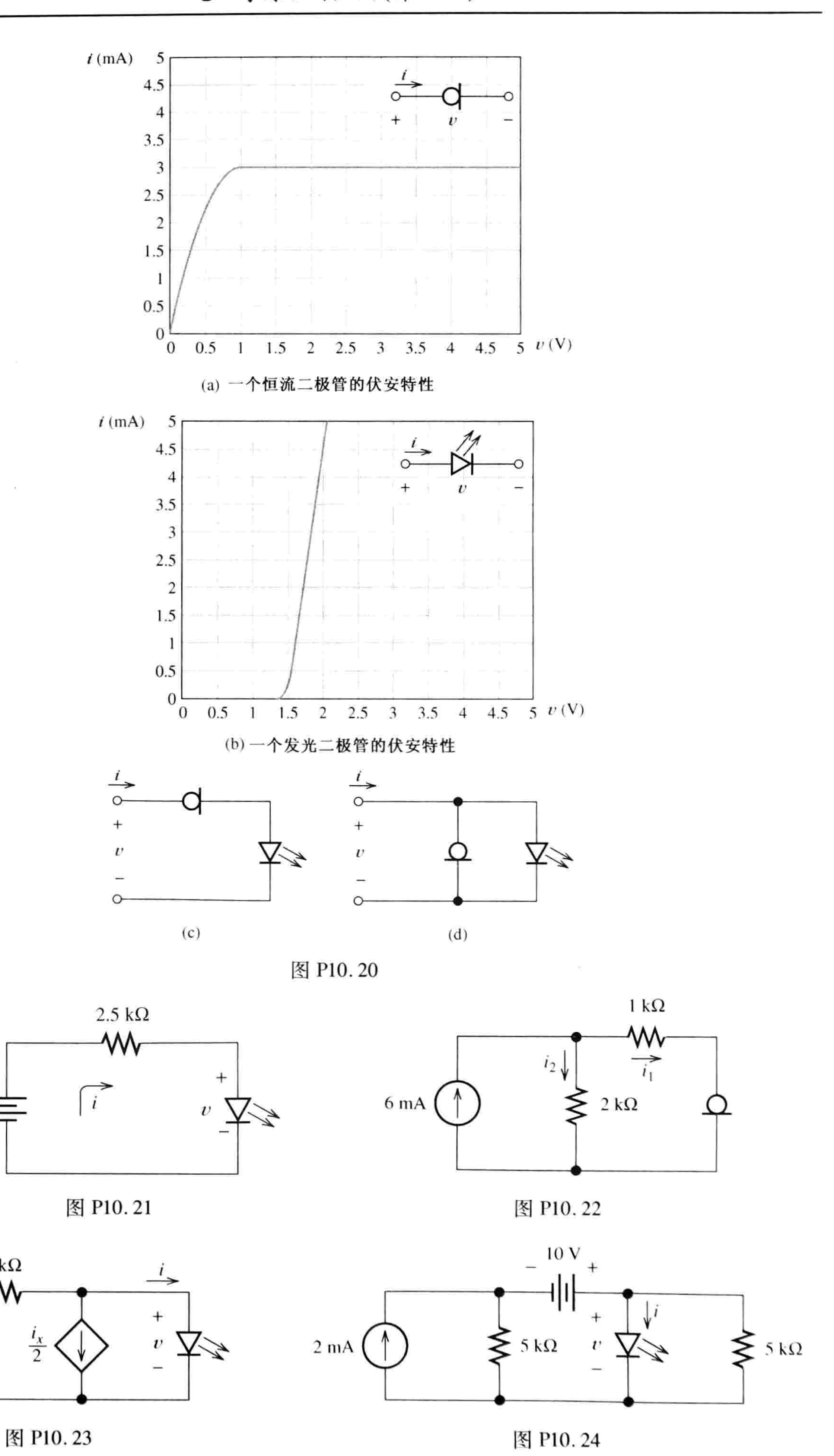
P10.20 这里介绍几种特殊用途的二极管。一种是恒流二极管，在变化较大的电压作用下，其电流保持为恒定值。电路符号和伏安特性如图P10.20(a)所示。另一种特殊的二极管是发光二极管(LED)，其电路符号和伏安特性如图P10.20(b)所示。有时，将这两种二极管串联用于电压变化的环境下为LED提供恒定的电流，如图P10.20(c)所示。请画出图P10.20(d)中并联电路的伏安特性曲线图。

P10.21 求图P10.21所示电路中的 i 和 v。LED的特性曲线如图P10.20(b)所示。

P10.22 求图P10.22所示电路中的 i_1 和 i_2。恒流二极管的特性曲线如图P10.20(a)所示。

P10.23 求图P10.23所示电路中的 i 和 v。LED的特性曲线如图P10.20(b)所示。

P10.24 电路如图P10.24所示，重复习题P10.23的问题和要求。



(a) 一个恒流二极管的伏安特性

(b) 一个发光二极管的伏安特性

(c)

(d)

图 P10.20

图 P10.21

图 P10.22

图 P10.23

图 P10.24

10.3 节 稳压管稳压电路

P10.25 什么是齐纳二极管(稳压管)? 其典型的应用是什么? 画出稳压值为 5.8 V 的理想稳压管的伏安特性曲线。

*P10.26 画出一个简单的稳压电路。

P10.27 如图 10.14 所示的稳压管稳压电路, 求 v_0 为 10 V 时的最小负载电阻值。

P10.28 如图 P10.28 所示的稳压器, 源电压 V_S 从 10 V 到 14 V 变化时, 负载电流 i_L 在 50 mA 到 100 mA 之间变化。设稳压管为理想的。求在变化的负载电流和电源电压下, 使得负载电压 v_L 保持恒定的电阻 R_s 的最大值, 以及 R_s 的最大功率损耗。

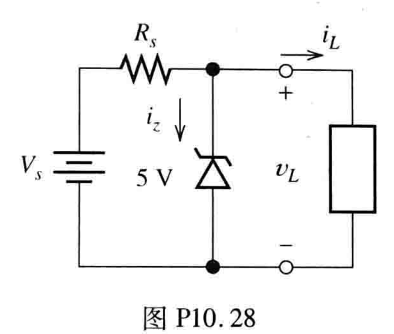


图 P10.28

P10.29 试设计一个稳压电路, 在交流电压变化时提供一个负载以恒定 5 V 的电压输出。负载电流变化范围为 0 ~ 100 mA, 源电压波动范围为 8 ~ 10 V。可以假设稳压管是理想的, 可以选取任意阻值的电阻。请画出稳压电路图并给定各元件的参数值。同时计算各元件的最大功率损耗, 试着评估自己设计的电路。

P10.30 当源电压在 6 ~ 10 V 变化时, 重复习题 P10.29 的要求。

P10.31 当负载电流在 0 ~ 1 A 变化时, 重复习题 P10.29 的要求。

P10.32 某电路包含一个非线性元件、电阻器、直流电压源和直流电流源, 并且已知电路中非线性元件的伏安特性。试概述一种求解该电路的方法。

*P10.33 某线性二端电路的两端分别为 a 和 b, 开路时测得电压 $v_{ab} = 10$ V。将电路两端短路时测得电流为 2 A, 方向从 a 端经短路电路到 b 端。设有一特性为 $i_{ab} = \sqrt[3]{v_{ab}}$ 的非线性元件接在电路的两端, 求此时的 v_{ab}。

10.4 节 理想二极管模型

P10.34 什么是理想二极管? 画出其伏安特性。应用理想二极管模型求解电路时, 怎样检验二极管的初始导通或断开的假设是正确的?

P10.35 已知由两个理想二极管反向串联的电路, 其等效电路有何特性? 如果将这两个理想二极管反向并联, 其等效电路又有何特性?

P10.36 求出图 P10.36 中各电路的 I 和 V, 设二极管均为理想的。

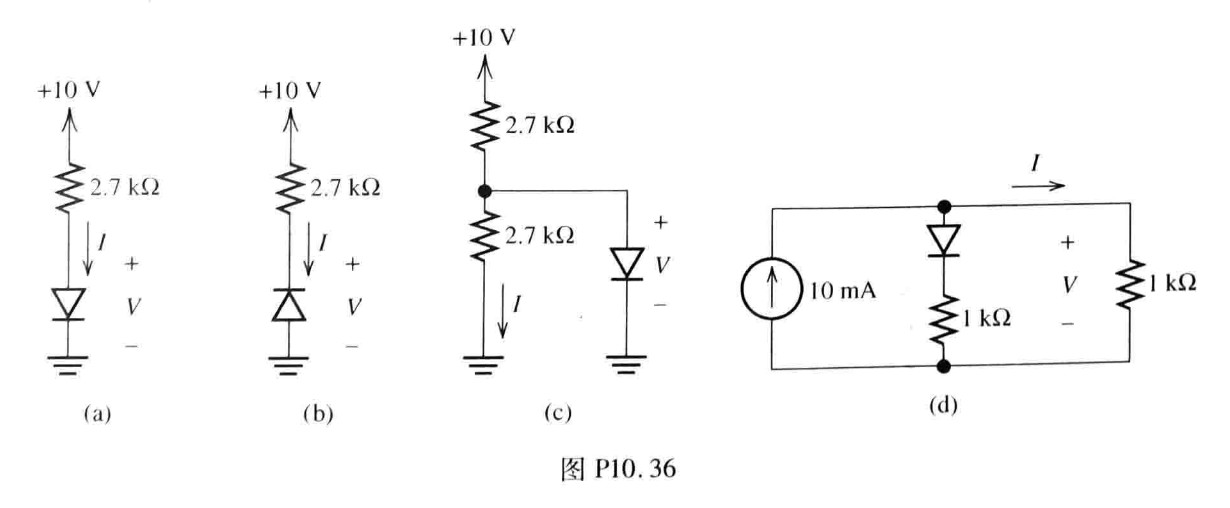


图 P10.36

*P10.37 求出图 P10.37 中各电路的 I 和 V, 设二极管均为理想的。

P10.38 求出图 P10.38 中各电路的 I 和 V，设二极管均为理想的。图 P10.38(b)所示电路中，V_{in} 分别为 0，2，6，10 V，请作出 V_{in} 变化范围为 −10 V 到 10 V 的 $V \sim V_{in}$ 图。

图 P10.37

图 P10.38

P10.39 做出图 P10.39 中各电路的 $i \sim v$ 图。设二极管均为理想的，v 的变化范围为 −10 V 到 +10 V。

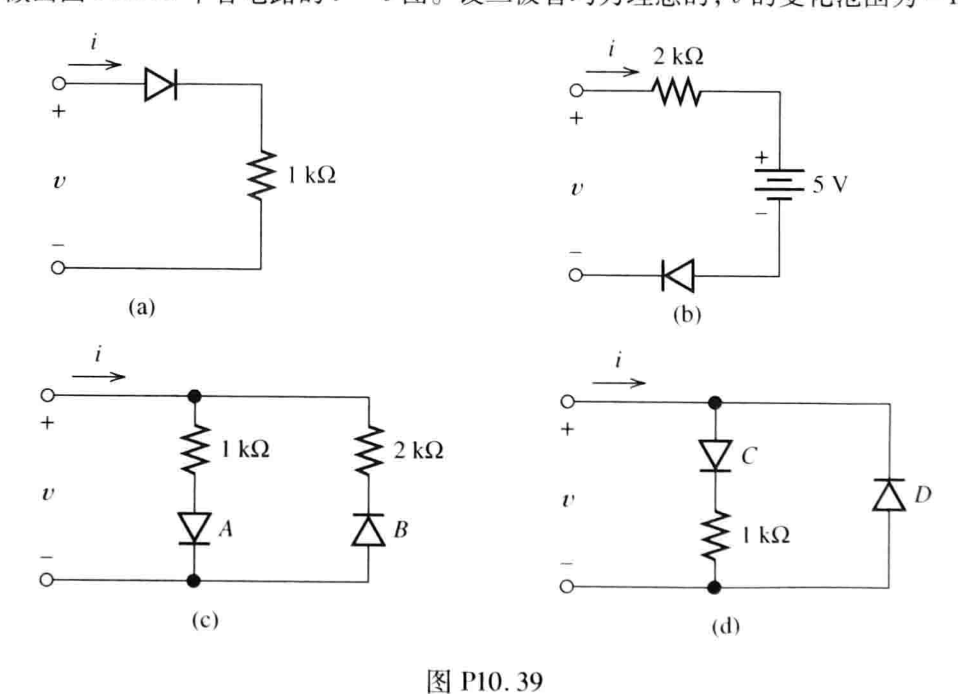


图 P10.39

P10.40 图 P10.40(a)所示电路为一种逻辑门电路。设二极管为理想的。电压 V_A 和 V_B 相互独立，取值分别为 0 V(表示逻辑 0 或低电平)或 5 V(表示逻辑 1 或高电平)。(a)在输入电压的 4 种

组合中哪一种输出为高(即 $V_o=5\ \mathrm{V}$)？该逻辑门的类型是什么？(b)对图 P10.40(b)所示电路，重复上述问题。

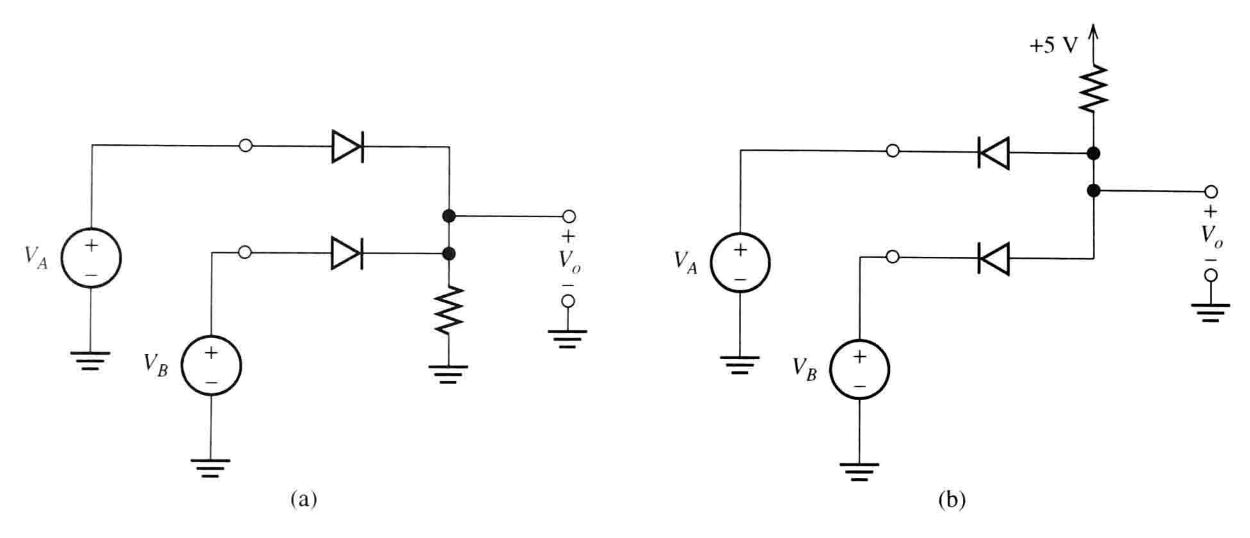


图 P10.40

P10.41　作出图 P10.41 所示电路的 $v_o(t)\sim t$ 图，设二极管均为理想的。

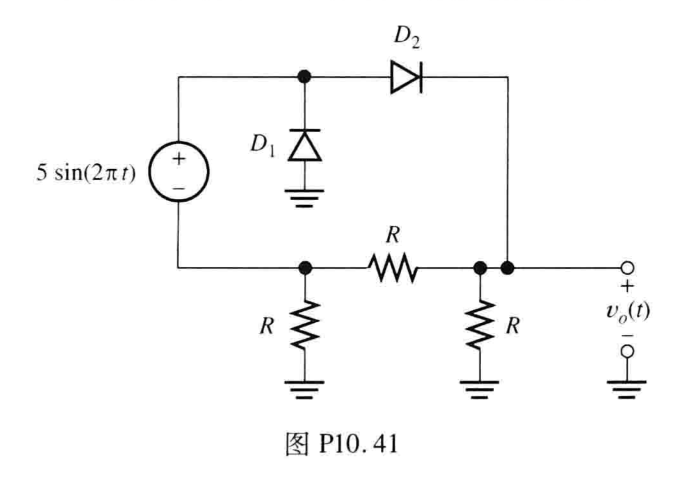


图 P10.41

10.5 节　二极管折线模型

P10.42　如果用分段线性法建立一个非线性二端元件的模型，求出各直线段的等效电路。

P10.43　将一个电阻 R_a 与电压源 V_a 相串联，画出电路图。如果标注此组合电路的端电压为 v，流过的电流为 i，要求绘制其伏安特性曲线 $i\sim v$。

P10.44　某二端元件的伏安特性为一条经过点(2 V, 5 mA)和点(3 V, 15 mA)的直线，电流参考方向为流进正极性的电压方向。求该元件的等效电路。

P10.45　一个理想稳压管的稳压值为 10 V，其伏安特性如图 10.14 所示。求出特性曲线各段的分段线性等效电路。

*P10.46　由图 P10.46(c)所示的直线段近似模拟一个非线性元件的伏安特性。求各段的等效电路，再用所求得的等效电路求出图 P10.46(a)和(b)中的 v。

*P10.47　图 P10.47 所示电路中，稳压管的分段线性模型如图 P10.19 所示。当负载电流 i_L 的变化范围为 0 ~ 100 mA 时，试做出 $v_L\sim i_L$ 图，v_L 为负载电压。

P10.48　如图 P10.48 所示，将其中的二极管替换为图 10.23 中的等效模型，且 $V_f=0.7\ \mathrm{V}$。(a)假设二极管工作在断开状态，解得节点电压 v_1 和 v_2，问结果是否与模型一致；(b)假设二极管等效为一个0.7 V的电压源，重复(a)的要求。

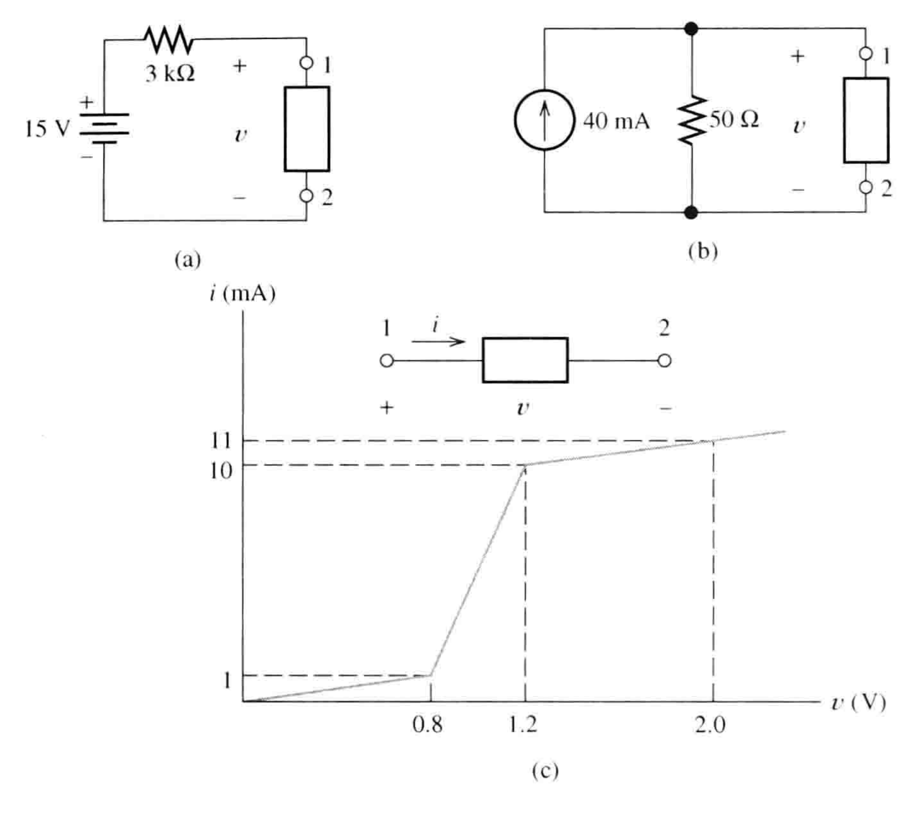


图 P10.46

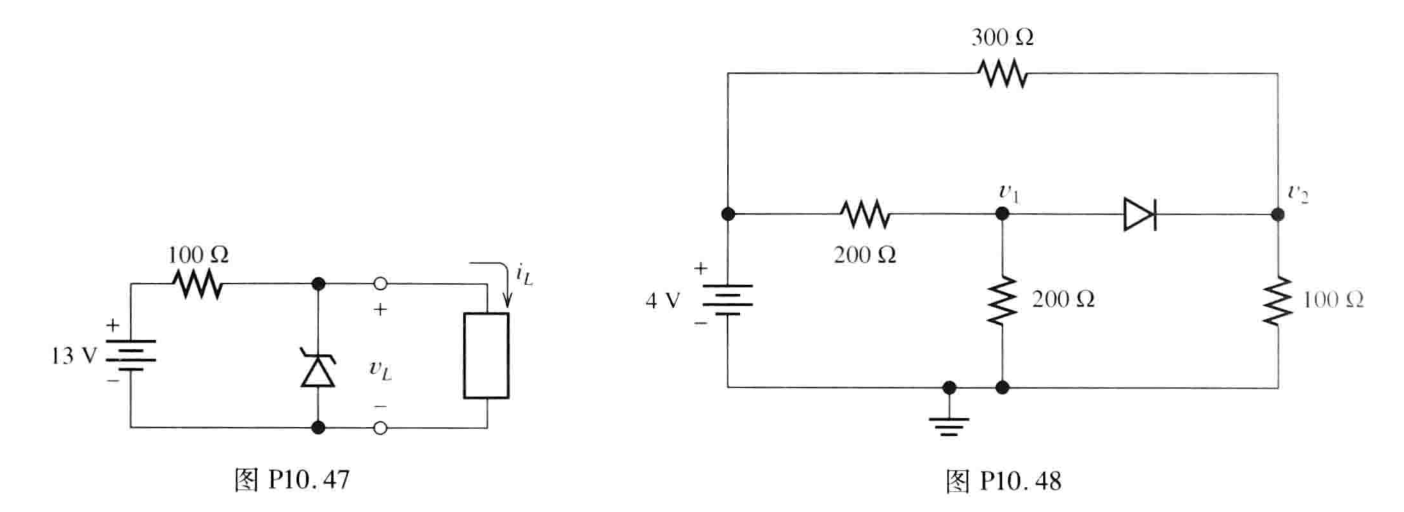


图 P10.47

图 P10.48

10.6 节 整流电路

P10.49 绘制一个半波整流电路,将一个交流电压源输出一个基本稳定的直流电压值。另外,绘制两个不同的全波整流电路。

P10.50 一个有效值为 20 V、频率为 60 Hz 的交流源与一个理想二极管和一个 100 Ω 的电阻串联。求二极管的峰值电流和反向峰值电压(PIV)。

P10.51 如图 10.25 所示的电池充电电路。交流源的峰值为 24 V, 频率为 60 Hz。电阻为 2 Ω, 二极管是理想的, V_B =12 V。求平均电流(即每秒通过电池的电荷值)。假设电池初始为完全放电状态, 其容量为 100 安培小时, 电池充满电需要多长时间?

P10.52 如图 10.26 所示的半波整流电路, 交流电压源的有效值为 20 V, 频率为 60 Hz。由于二极管是理想的, 电容值非常大, 这样, 纹波电压 V_r 非常小。假设负载电阻为 100 Ω, 要求计算二极管两端的反向峰值电压, 以及每周期通过二极管的电量。

P10.53 大多数电压表的读数等于被测电压的平均值。一个周期波形的平均值的数学定义为

$$V_{\text{avg}} = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\mathrm{d}t$$

其中，T 为电压 $v(t)$ 的周期。计算：(a)如果所测电压 $v(t) = V_m\sin(\omega t)$，其直流电压表的读数。(b)如果所测电压为正弦波经半波整流后的电压，其直流电压表的读数。(c)如果所测电压为正弦波经全波整流后的电压，其直流电压表的读数。

*P10.54 设计一个半波整流电路，平均输出电压为 9 V，纹波峰-峰值为 2 V，平均负载电流为 100 mA。假设二极管是理想的，频率为 60 Hz 的交流电压源取值任意。请画出设计的电路图，并给定各个元件的参数值。

P10.55 设计一个桥式整流电路，重复习题 P10.54 的要求。

P10.56 用两个二极管和两个反相电压源构成一个全波整流电路，重复习题 P10.54 的要求。

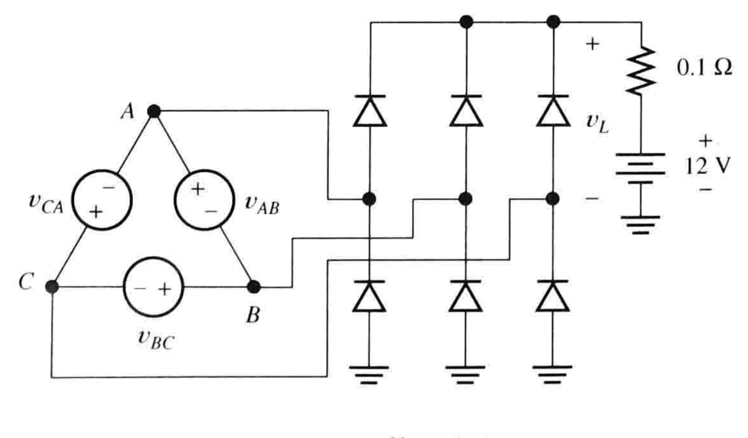
P10.57 假设二极管的正向压降为 0.8 V，重复习题 P10.54 的要求。

*P10.58 设计一个向负载提供 15 V 电压的半波整流器，负载平均电流为 250 mA。纹波峰-峰值应低于 0.2 V。计算所允许的滤波电容最小值；如果为全波整流器，计算滤波电容的最小值。

P10.59 如图 10.25 所示的电池充电电路，$v_S(t) = 20\sin(200\pi t)$，$R = 80\ \Omega$，$V_B = 12$ V，设二极管为理想的。(a)作出 $i(t) \sim t$ 图。(b)求出电池的平均充电电流。(提示：平均充电电流为周期内流过电池的电荷量。)

P10.60 如图 10.27 所示的全波整流器，其中大容值的滤波电容与负载 R_L 并联，$V_m = 12$ V，设二极管为理想的。(a)求负载电压的近似值及二极管的反向峰值电压(PIV)。(b)如图 10.28 所示的全波桥式整流器，求负载电压的近似值及二极管的反向峰值电压(PIV)。

P10.61 图 P10.61 所示为一个汽车电池充电系统的等效电路，三相交流电源表示电枢线圈(三相交流源已在5.7 节学习过。交流电源通常是 Y 形连接，但是，其三相输出电压与 Δ 形连接的输出是一致的)。图中没有画出稳压电路，用于将旋转电机的线圈输出交流电压转换为电压 V_m 和电池的充电电流。(a)画出负载电压 $v_L(t)$的变化曲线 $v_L(t) \sim t$，假设二极管是理想的，而且 V_m 足够大，电流始终流进电池(提示：每个电源和其中 4 个二极管构成一个桥式整流电路)；(b)计算 V_m 的平均电压以及纹波峰-峰值电压；(c)欲提供 30 A 的平均充电电流，计算需要多大的 V_m 值；(d)在实际计算 V_m 的相关参数时，需要考虑哪些因素？



$$v_{AB} = V_m\cos(\omega t)$$
$$v_{BC} = V_m\cos(\omega t - 120°)$$
$$v_{CA} = V_m\cos(\omega t + 120°)$$

图 P10.61 一个汽车电池充电系统的理想模型

10.7 节 波形整形电路

P10.62 什么是削波电路？画出一个实例图，给出元件参数、输入波形和相应的输出波形。

P10.63 如图 P10.63 所示，画出该电路的输出波形图。设二极管为理想的。

P10.64 如图 P10.64 所示，要求画出电路的传输特性曲线($v_o \sim v_{in}$)，假设二极管是理想的。

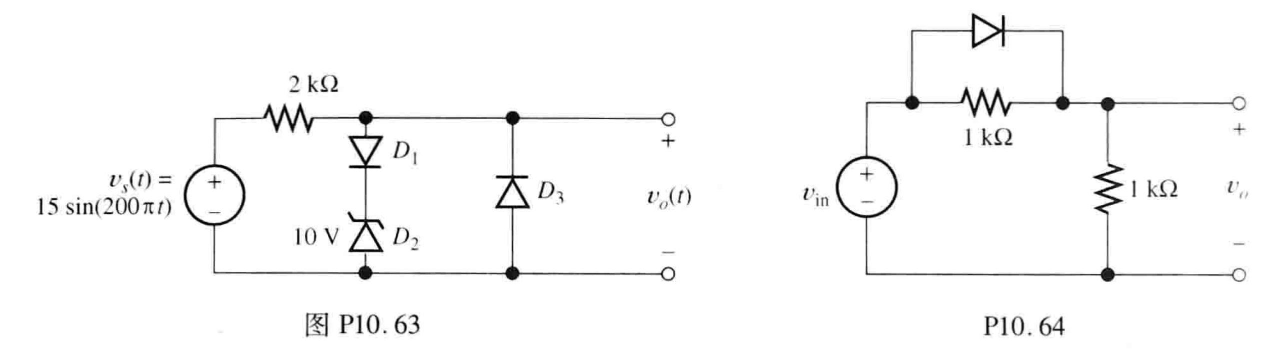


图 P10.63　　P10.64

P10.65 作出图 P10.65 所示电路的传输特性图($v_o \sim v_{in}$ 曲线)。设二极管为理想的。

P10.66 作出图 P10.66 电路的传输特性图($v_o \sim v_{in}$ 曲线)。设二极管为理想的，v_{in} 的变化范围为 -5 V 到 +5 V。

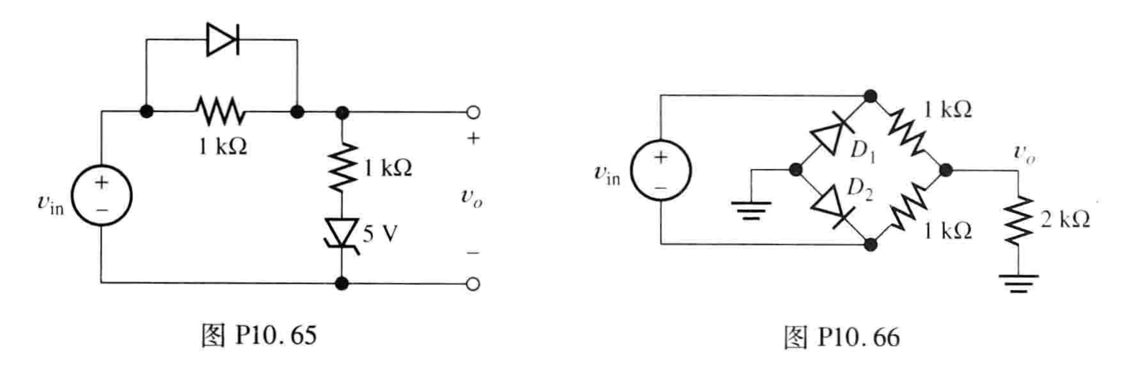


图 P10.65　　图 P10.66

P10.67 作出图 P10.67 所示电路的传输特性图($v_o \sim v_{in}$ 曲线)，仔细标明断点及斜率。设二极管为理想的，v_{in} 的变化范围为 -5 V 到 +5 V。

P10.68 什么是一个钳位电路？画出一个实例图，给出元件参数、输入信号波形和相应的输出波形。

P10.69 如图 P10.69 所示电路的 RC 时间常数与输入信号周期相比足够大，二极管为理想的。作出 $v_o(t)$ 的波形图。

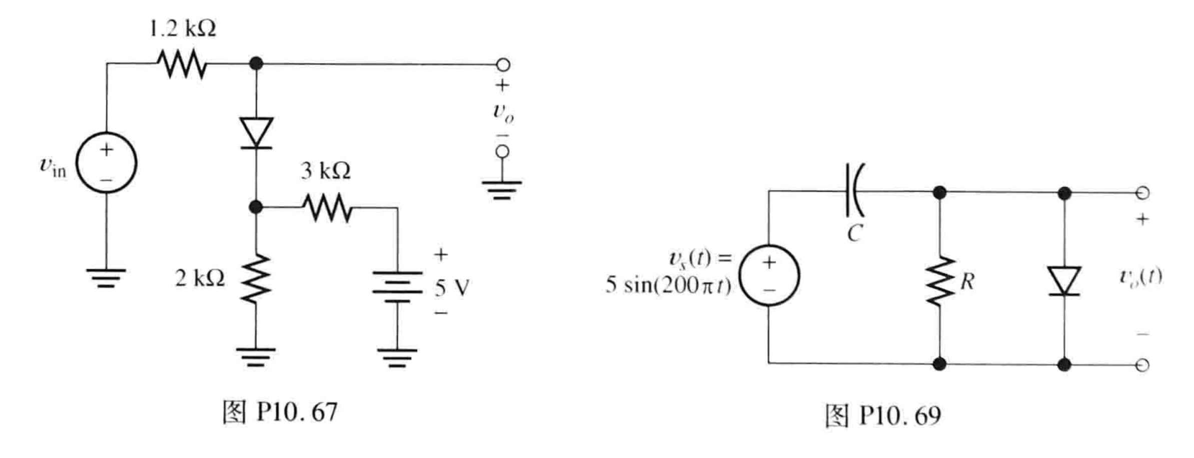


图 P10.67　　图 P10.69

P10.70 如图 P10.70 所示，画出此电路的稳态输出波形，假设 RC 值远大于输入电压的周期，而且二极管是理想的。

P10.71 电压倍增电路。如图 P10.71 所示电路的电容值很大，使得电路仅在每个周期的很小部分时间内放电。因此，电容两端没有交流电压，在 A 点的电压为交流输入电压加上 C_1 的直流电。要求作出 A 点的电压～时间图；求出负载两端的电压；解释为什么称该电路为电压倍增电路？每个二极管的反向峰值电压为多少？

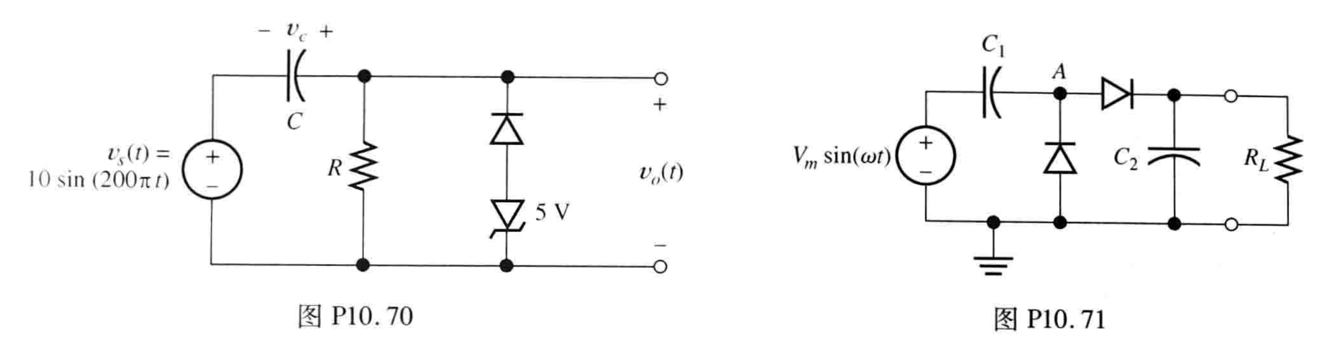


图 P10.70　　图 P10.71

* P10.72　设计一个削波电路，将输入电压波形中高于 3 V 以及低于 −5 V 的波形削掉。假设二极管的正向压降为 0.7 V，理想稳压管工作于反向击穿状态，直流电源可以输出任意值。

P10.73　重复习题 P10.72 的要求，削波电压是低于 2 V 以及高于 5 V(即：将低于 2 V 以及高于 5 V 的波形削掉)。

P10.74　采用二极管、稳压管和任意阻值的电阻，设计一个电路具有如图 P10.74 所示的传输特性曲线，假设 v_{in} 取值范围为 −10 ~ +10 V。再假设所有二极管的正向压降为 0.6 V，稳压管的反向击穿特性为理想的，电流电源值为 ±15 V。

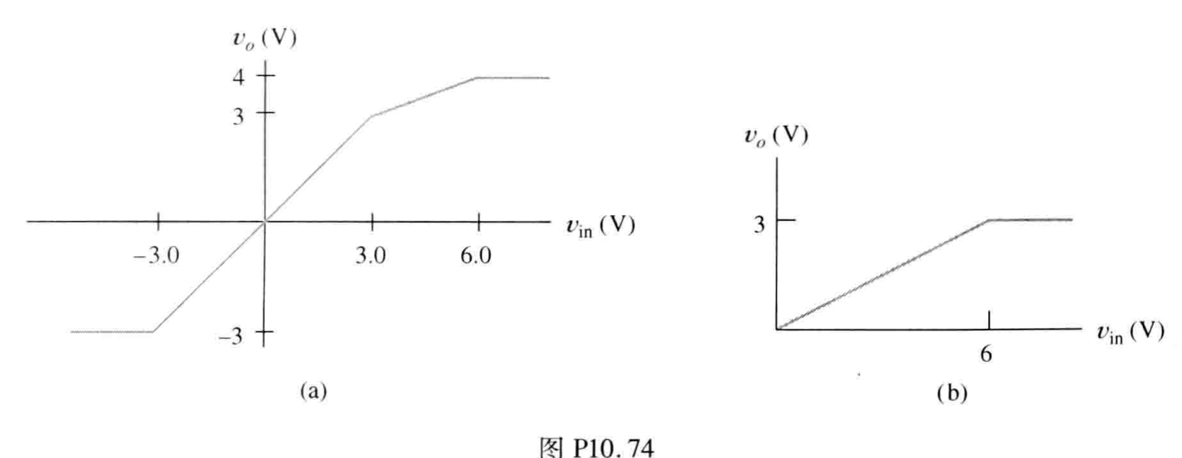


图 P10.74

* P10.75　采用二极管、稳压管和任意阻值的电阻，设计一个钳位电路，将一个周期性输入电压波形的负峰值钳位至 −5 V。假设所有二极管的正向压降为 0.6 V，稳压管的反向击穿特性为理想的，电流电源值为 ±15 V。

P10.76　设计一个钳位电路，将一个周期性输入电压波形的负峰值钳位至 +5 V。其余要求同习题 P10.75。

10.8 节　线性小信号等效电路

P10.77　某二极管的 $I_{DQ} = 4$ mA，$i_d(t) = 0.5\cos(200\pi t)$。求 $i_D(t)$ 的表达式，并作出 $i_D(t)$ 的波形图。

P10.78　二极管的小信号等效电路由什么组成？非线性元件的动态电阻在给定工作点处是怎样确定的？

P10.79　在小信号交流等效电路中直流电压源用什么代替？为什么？

P10.80　在小信号交流等效电路中直流电流源用什么代替？为什么？

* P10.81　一个非线性元件的伏安特性为 $i_D = v_D^3/8$。要求画出 $i_D \sim v_D$ 的关系曲线，v_D 的取值从 −2 V 到 +2 V。问：该元件是二极管吗？计算其动态电阻，当 v_D 的取值从 −2 V 到 +2 V 时，画出动态电阻 − v_D 的关系曲线。

P10.82　一个二极管工作在击穿区的表达式为

$$i_D = \frac{-10^{-6}}{(1 + v_D/5)^3}, \qquad -5\text{ V} < v_D < 0$$

要求画出 $i_D \sim v_D$ 在反偏区的特性曲线。同时，计算当 $I_{DQ} = -1$ mA 和 $I_{DQ} = -10$ mA 时的等效动态电阻。

P10.83 一个非线性元件两端所加电压为

$$v_D(t) = 5 + 0.01\cos(\omega t)\ \text{V}$$

电流为

$$i_D(t) = 3 + 0.2\cos(\omega t)\ \text{mA}$$

求动态电阻和在该条件下器件的 Q 点。

P10.84 理想情况下，我们希望稳压管在反向击穿区的电压是恒定的。对于稳压管在反向击穿区的动态电阻，这意味着什么?

*P10.85 如图 P10.85 所示为一稳压电路，交流电压的峰-峰值为 1 V，负载的直流(平均)电压为 5 V。问稳压管 Q 点的工作电流为多少? 如果输出电压的峰-峰值小于 10 mV，问稳压管的最大动态电阻为多大?

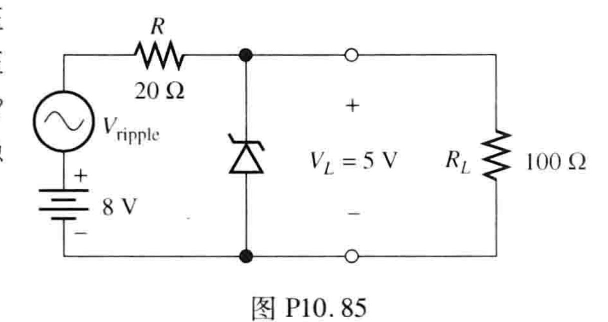


图 P10.85

测试题

以下是一组测试题，以此检测自己是否掌握了本章的重要概念。测试题的答案在附录 E 中，详解则在学生资源中。附录 F 说明了学生资源的详细信息。

T10.1 对图 T10.1 中的各电路计算 i_D 值，二极管的特性见图 10.8。

T10.2 如图 T10.2 所示的二极管是理想的，要求计算二极管的工作状态，以及 v_x 和 i_x。

T10.3 某二端元件的伏安特性通过了两个工作点(5 V, 2 mA)和(10 V, 7 mA)，电流流入元件电压的正极性端。要求计算此折线模型的电阻和电压源的值。

T10.4 画出以一个电阻为负载的桥式全波整流电路图。

T10.5 假设一个正弦交流电压源的峰值为 10 V，要求设计电路来削掉 5 V 以上和 −4 V 以下的正弦波形。假设电路中的二极管是理想的，需要标注 $v_o(t)$ 输出端。

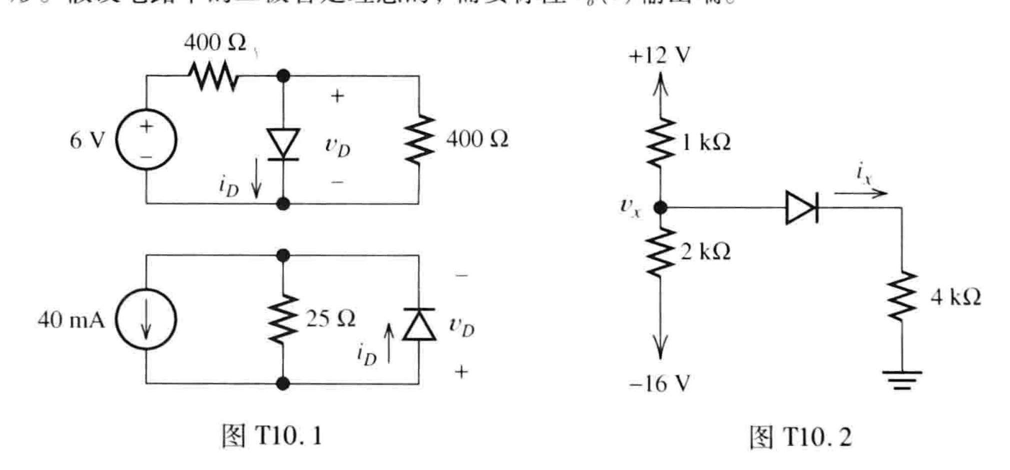


图 T10.1　　图 T10.2

T10.6 假设有一个频率 10 Hz 的正弦电压源 $v_{in}(t)$，要求设计电路来将正峰值电压钳位至 −4 V。电路中有理想二极管、直流电压源和其他元件，需列表给定各元件的上限值，并标注 $v_o(t)$ 的两端点。

T10.7 假设一个硅二极管在 300 K 温度下的偏置电流是 5 mA，在关于二极管电流的肖特莱方程中 $n=2$，要求画出二极管的小信号等效电路，并标出数值。

第 11 章　放大器的技术参数和外部特性

本章学习目标

- 在给定信号源和负载的情况下，利用不同的放大器模型计算放大器的各性能参数
- 计算放大器的效率
- 了解放大器输入和输出阻抗的重要性
- 掌握各种应用下理想运放的最佳模型
- 掌握各种应用下满足需求的放大器频率响应
- 理解放大器的线性和非线性失真
- 确定放大器的脉冲响应参数
- 学习差分放大器，并确定其共模抑制比性能
- 理解不同输入的直流漂移，设计对称电路

本章介绍

电子系统中最重要的部件是放大器，通常放大器用于增大电信号的幅值。例如，在机械工程应用中的应变仪或化学处理中的流量计，大多数传感器的信号幅值相当小，需要放大之后再进一步处理。

本章重点介绍放大器的外部特性，以便于在各种测量应用中选择合适的放大器。同时，本章在介绍了放大器基本概念后，还分析了实际放大器的非理想特性，通过了解这些不足，可以避免在使用电子仪表时出现误差。而放大器电路的内部工作原理将在第 12、13 和 14 章中介绍。

11.1　放大器的基本概念

在理想情况下，放大器输出波形与输入波形是相同的，只是幅度更大，如图 11.1 所示。信号源产生一个电压信号 $v_i(t)$，即放大器的输入信号，在与输出端并联的负载电阻 R_L 上产生输出信号：

$$v_O(t) = A_V v_i(t) \tag{11.1}$$

常数 A_v 称为放大器的电压增益。通常电压增益是远大于 1 的，但在后续章节还会介绍 A_v 值小于 1 的放大器应用情况。

当我们对话筒（麦克风）讲话时，能产生幅值 1 mV 的电信号（即信号源）。该小信号通过放大器后幅值能达到 10 V，即放大 10 000 倍。如果把该输出电压信号加至音箱（扬声器），发出的声音可以比本人说话的声音更加响亮，这就是电子扩音的原理。

有时，A_v 是一个负值，所以输出电压与输入电压是反相的，这类放大器称为反相放大器。另一方面，如果 A_v 是一个正值，则为同相放大器。如图 11.2 所示为一个典型的信号分别通过同相放大器和反相放大器后对应的输出波形。

对于单声道音频信号，无论采用同相还是反相放大器均能产生同样的声音效果。但是，对于一个立体声系统，则左声道和右声道均需要使用同样的信号放大（即必须都经过同相放大或

者反相放大)，这样，传送给两个扬声器的信号在相位上才有合理的配合。此外，如果一个视频信号被反相放大，将得到一个黑白颠倒的图像。因此，选择同相放大还是反相放大对于视频放大器来说是非常重要的。

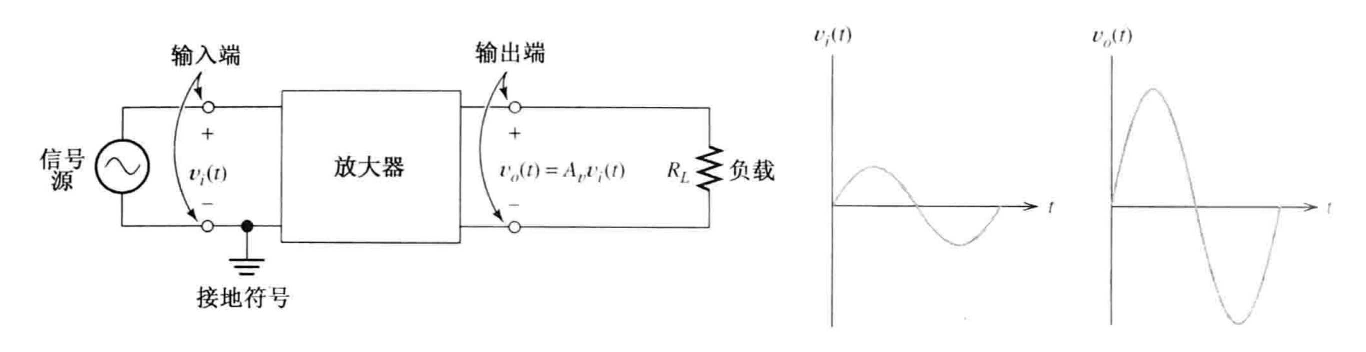


图 11.1 电子放大器

$v_i(t)$ t

(a) 输入波形

$v_o(t)$ t

(b) 经过同相放大器后的输出波形

$v_o(t)$ t

(c) 经过反相放大器后的输出波形

图 11.2 输入波形和相应的输出波形

11.1.1 公共接地点

通常，放大器输入信号的一端和输出信号的一端均连接到一个公共接地点，其接线符号如图 11.1 所示。通常，接地端可以是电路板布线的带状金属或者导线，用于为信号电流或者电子电路中的直流电源电流形成回路。

或许你对汽车布线中电气接地的概念比较熟悉。这里，接地导线包括汽车外壳、挡板及其

他导电性装置。例如，当电流通过线路使尾灯发光时，还必然通过挡板或者汽车外壳之类的接地体形成闭合回路。同样，家用 60 Hz 工频配电系统(美国使用该频率系统，而中国使用 50 Hz 工频系统)也是接地的，一般接到一个冷水管上。不过，这时就不能让电流通过接地导体(冷水管)，避免引起安全隐患。

有时(但不是经常)，电路机壳接地通过电线连接到 60 Hz 电源系统地。在电路的应用中，都一定要小心。在一些电子电路中，机壳接地端相对电源地可能达到交流 120 V。如果同时接触机壳地与电源系统地线(例如冷水管或者潮湿的混凝土地板)，则会有致命的危险。

练习 11.1　一个同相放大器的电压增益值是 50，输入电压为：$v_i(t) = 0.1\sin(2000\pi t)$。(a)计算输出电压 $v_o(t)$；(b)在反相放大器增益为 -50 的情况下，计算输出电压 $v_o(t)$。

答案：(a) $5\sin(2000\pi t)$；(b) $-5\sin(2000\pi t)$。

11.1.2　电压放大器模型

电压放大器等效为一个受控电压源模型，如图 11.3 所示。因为实际放大器要从信号源获取输入电流，因此，合理的放大器模型在输入端应该包括电阻 R_i。另外，电阻 R_o 必须串接于输出端，才能解释当电流流过负载时理想放大器的输出电压比空载时降低的现象。由此得到完善的电压放大器模型如图 11.3 所示。此后，我们还将学习表征放大器性能的不同模型。

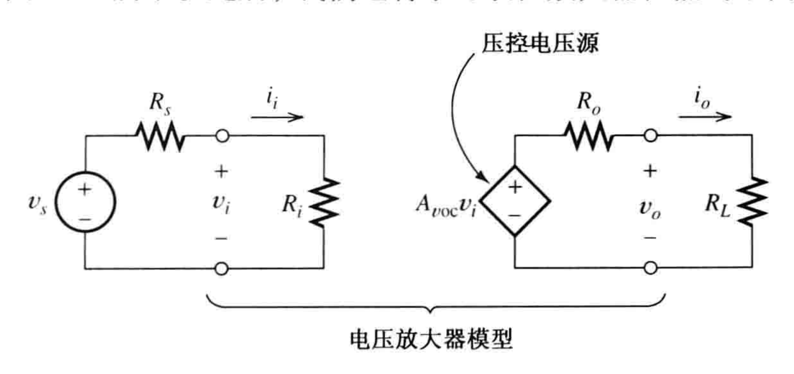


图 11.3　电压放大器的模型，包括输入电阻 R_i 和输出电阻 R_o

放大器的输入电阻 R_i 是从输入端看进去的等效电阻。后面我们将会发现，输入电路有时还包括电容性或电感性的效应，用输入阻抗来表示。例如，示波器的输入阻抗由 1 MΩ 的电阻并联 47 pF 的电容构成。在本章中，除非特别说明，我们均假设输入阻抗是纯电阻性的。

串联在输出端的电阻 R_o 称为输出电阻。实际放大器不能传递恒定电压给任意阻值的负载，而且，随着负载电阻的减小，输出电压变得更小。输出电阻正是导致输出电压减小的原因，当负载通过电流时，输出电阻上的电压降导致了输出电压的降低。

压控电压源模型反映了放大器的这一特性。注意，电压源的端电压与输入电压 v_i 有着简单的 A_{voc} 倍数关系。如果负载是开路的，输出电阻上没有电压降，输出电压 $v_o = A_{voc}v_i$，因此，A_{voc} 称为开环电压增益。

总而言之，表征电压放大器的模型包括输入阻抗、输出阻抗和开环电压增益。

11.1.3　电流增益

如图 11.3 所示，输入电流 i_i 从放大器输入端流入，输出电流 i_o 则是流过负载的电流。电流增益 A_i 是输出电流与输入电流的比值：

$$A_i = \frac{i_o}{i_i} \tag{11.2}$$

输入电流可以表示为输入电压与输入电阻的比值，输出电流则表示为输出电压除以负载电阻。这样，根据电压增益和电阻的定义得到电流增益为

$$A_i = \frac{i_o}{i_i} = \frac{v_o/R_L}{v_i/R_i} = A_v\frac{R_i}{R_L} \tag{11.3}$$

其中，

$$A_v = \frac{v_o}{v_i}$$

是有负载电阻的电压增益。通常，A_v 值比开环电压增益 A_{voc} 小，因为有部分电压降落在输出电阻 R_o 上。

11.1.4 功率增益

信号源传进输入端的功率称为输入功率 P_i，从放大器传送至负载的功率称为输出功率 P_o。因此，放大器的功率增益 G 是输出功率与输入功率的比值：

$$G = \frac{P_o}{P_i} \tag{11.4}$$

由于我们假设输入阻抗和负载是纯电阻性的，因此，输入端和输出端的平均功率是均方根电流(有效值)和电压(有效值)的乘积。因此：

$$G = \frac{P_o}{P_i} = \frac{V_oI_o}{V_iI_i} = A_vA_i = (A_v)^2\frac{R_i}{R_L} \tag{11.5}$$

注意，我们用大写字母表示电流和电压的均方根(有效值)，比如 V_o 和 I_o；用小写字母表示瞬时值，比如 v_o 和 i_o。当然，因为假设瞬时输出值等于瞬时输入值与一个常数的积，则电压有效值之间的比率和电压瞬时值之间的比率相同，也等于放大器的电压增益。

例 11.1 计算放大器的性能参数。

含有内电压 V_s = 1 mV，内阻 R_s = 1 MΩ 的电源连接到放大器的输入端，其开环电压增益 A_{voc} = 10^4，输入电阻 R_i = 2 MΩ，输出电阻 R_o = 2 Ω，负载电阻 R_L = 8 Ω。要求计算电压增益 $A_{vs} = V_o/V_s$ 和 $A_v = V_o/V_i$。同时，计算电流增益和功率增益。

解： 首先，画出包含电源、放大器和负载的电路，如图 11.4 所示。应用分压公式得到输入电压值：

$$V_i = \frac{R_i}{R_i + R_s}V_s = 0.667\ \text{mV rms}$$

压控电压源的电压为

$$A_{voc}V_i = 10^4V_i = 6.67\ \text{V rms}$$

接着，用分压公式计算输出电压：

$$V_o = A_{voc}V_i\frac{R_L}{R_L + R_o} = 5.33\ \text{V rms}$$

此时，得到电压增益：

$$A_v = \frac{V_o}{V_i} = A_{voc}\frac{R_L}{R_o + R_L} = 8000$$

和

$$A_{vs} = \frac{V_o}{V_s} = A_{voc}\frac{R_i}{R_i + R_s}\frac{R_L}{R_o + R_L} = 5333$$

利用式(11.3)和式(11.5)得到电流增益和功率增益:

$$A_i = A_v\frac{R_i}{R_L} = 2 \times 10^9$$

$$G = A_v A_i = 16 \times 10^{12}$$

注意，此电路的电流增益非常大，因为输入电阻高导致放大器的输入电流很小，不过，由于负载电阻很小，导致输出电流相对来说比较大。

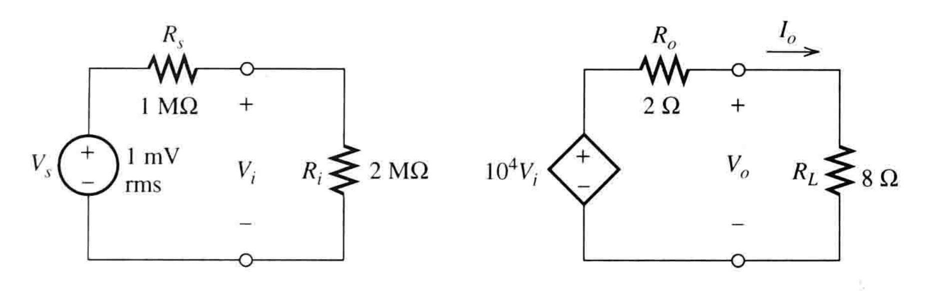


图 11.4　例 11.1 的信号源、放大器和负载

11.1.5　负载效应

请注意，不是所有的电源电压都施加在例 11.1 的放大器的输入端，因为放大器的输入电阻是有限值，使流入输入端的电流在源电阻 R_s 上出现一个电压降。与此相似，放大器的受控电压源的电压并非完全加至负载上，这些输出电压被减小的现象称为负载效应。由于负载效应的影响，电压增益(A_v 或者 A_{vs})将小于放大器内部的(开环)电压增益 A_{voc}。

练习 11.2　一个放大器的输入电阻为 2000 Ω，输出电阻为 25 Ω，开环电压增益为 500。电源电压为 20 mV，内阻为 500 Ω，负载电阻 R_L = 75 Ω。请计算电压增益 $A_v = V_o / V_i$ 和 $A_{vs} = V_o / V_s$，以及电流增益和功率增益。

答案: $A_v = 375$, $A_{vs} = 300$, $A_i = 10^4$, $G = 3.75 \times 10^6$。

练习 11.3　假如我们改变练习 11.2 中的负载电阻，能获取最大功率增益的负载电阻是多少? 负载电阻的功率增益是多少?

答案: $R_L = 25\ \Omega$, $G = 5 \times 10^6$。

11.2　级联放大器

有时，我们把一个放大器的输出作为下一个放大器的输入，如图 11.5 所示，这种电路连接称为放大器的级联。这时，整个级联放大器的总电压增益是

$$A_v = \frac{v_{o2}}{v_{i1}}$$

同时乘以和除以 v_{o1}，上式变为

$$A_v = \frac{v_{o1}}{v_{i1}} \times \frac{v_{o2}}{v_{o1}}$$

由图 11.5 可知 $v_{i2} = v_{o1}$，所以：

$$A_v = \frac{v_{o1}}{v_{i1}} \times \frac{v_{o2}}{v_{i2}}$$

因为第一级放大器的增益 $A_v = v_{o1}/v_{i1}$，第二级增益 $A_v = v_{o1}/v_{i2}$，可得

$$A_v = A_{v1}A_{v2} \tag{11.6}$$

因此，级联放大器的总电压增益是各级放大增益的乘积。(当然，计算每一级放大器的增益时必须包含负载效应。注意，第二级放大器的输入电阻是第一级放大器的负载电阻。)

类似地，级联放大器的电流总增益由各放大器增益相乘得到，总的功率增益也是各放大器增益的积。

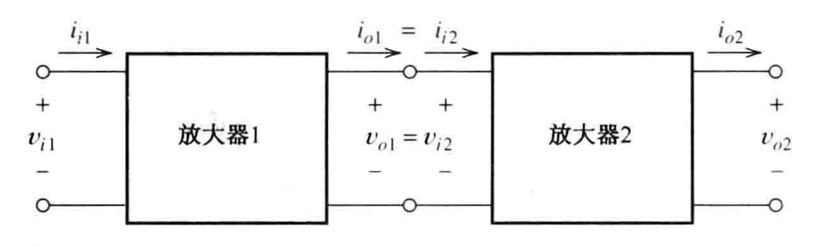


图 11.5 两个放大器的级联

例 11.2 计算级联放大器的性能参数。

如图 11.6 所示，级联放大器由两个放大器组成。计算每级放大器和总的电流增益、电压增益和功率增益。

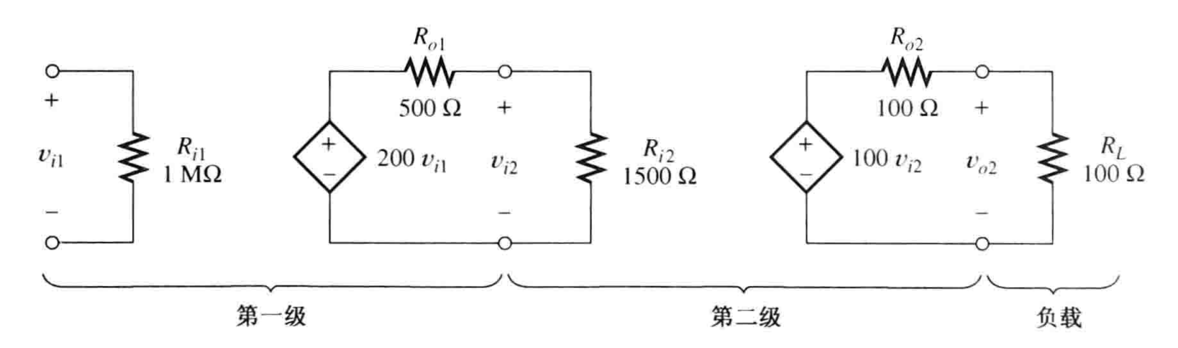


图 11.6 例 11.2 和例 11.3 的级联放大器

解：由于第二级放大器的输入电阻是第一级放大器的负载电阻，第一级的电压增益为

$$A_{v1} = \frac{v_{o1}}{v_{i1}} = \frac{v_{i2}}{v_{i1}} = A_{voc1}\frac{R_{i2}}{R_{i2}+R_{o1}} = 150$$

由图 11.6 知 $A_{voc1} = 200$。同样：

$$A_{v2} = \frac{v_{o2}}{v_{i2}} = A_{voc2}\frac{R_L}{R_L+R_{o2}} = 50$$

总电路的电压增益是

$$A_v = A_{v1}A_{v2} = 7500$$

因为 R_{i2} 是第一级的负载电阻，可以用式(11.3)算出第一级的电流增益：

$$A_{i1} = A_{v1}\frac{R_{i1}}{R_{i2}} = 10^5$$

类似地，第二级的电流增益为

$$A_{i2} = A_{v2}\frac{R_{i2}}{R_L} = 750$$

总电流增益为

$$A_i = A_{i1}A_{i2} = 75 \times 10^6$$

功率增益分别为

$$G_1 = A_{v1}A_{i1} = 1.5 \times 10^7$$
$$G_2 = A_{v2}A_{i2} = 3.75 \times 10^4$$

和

$$G = G_1 G_2 = 5.625 \times 10^{11}$$

11.2.1　级联放大器的简化模型

有时，我们希望得到一个级联放大器的电路模型，其办法是：视第一级的输入电阻是级联放大器的输入电阻，最后一级的输出电阻是级联放大器的输出电阻，开环放大增益用最后一级负载开路来计算。但是，必须考虑每级负载效应的影响。一旦获得级联放大器的开环电压增益，就获得了这个放大器的简化模型。

例 11.3　级联放大器的简化模型。

分析图 11.6 所示的级联放大器的总体简化模型。

解：考虑到第二级电路的加入，因此第一级放大器的电压增益为

$$A_{v1} = A_{voc1}\frac{R_{i2}}{R_{i2} + R_{o1}} = 150$$

当负载开路时，第二级的电压增益为

$$A_{v2} = A_{voc2} = 100$$

总的开环电压增益为

$$A_{voc} = A_{v1}A_{v2} = 15 \times 10^3$$

级联放大器的输入电阻为

$$R_i = R_{i1} = 1\ \text{M}\Omega$$

输出电阻为

$$R_o = R_{o2} = 100\ \Omega$$

图 11.7 所示为此级联放大器的简化模型。

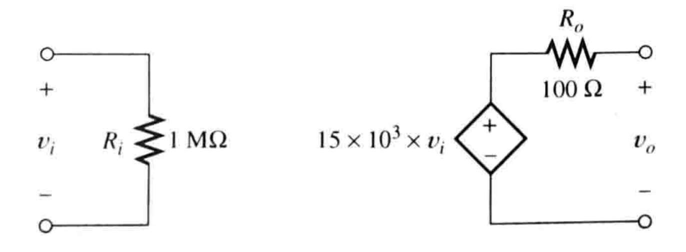


图 11.7　例 11.3 中级联放大器的简化模型

练习 11.4　3 个放大器分别具有如下特性参数并级联起来。

放大器 1：$A_{voc1} = 10$，$R_{i1} = 1\ \text{k}\Omega$，$R_{01} = 100\ \Omega$。

放大器 2：$A_{voc2} = 20$，$R_{i2} = 2\ \text{k}\Omega$，$R_{02} = 200\ \Omega$。

放大器 3：$A_{voc3} = 30$，$R_{i3} = 3\ \text{k}\Omega$，$R_{03} = 300\ \Omega$。

假设放大器级联的顺序为 1，2，3，计算级联放大器简化模型的参数。

解：$R_i = 1\ \text{k}\Omega$，$R_o = 300\ \Omega$，$A_{voc} = 5357$。

练习 11.5 如果放大器级联顺序为 3，2，1，重复练习 11.4 的计算。

解：$R_i = 3\ \text{k}\Omega$，$R_o = 100\ \Omega$，$A_{voc} = 4348$。

11.3 功率和效率

11.3.1 功率

由电源提供给放大器的功率称为电源功率。通常，由几个直流电压源向放大器输出电流从而提供能量，如图 11.8 所示为两个直流电源和放大器的接线图。每个电压源输送给放大器的平均功率是平均电流和电压的积，而总功率是各电压源输出功率的总和。例如，图 11.8 所示电路中总的平均功率是

$$P_s = V_{AA}I_A + V_{BB}I_B \tag{11.7}$$

注意，我们已经假设电流的参考方向是电源输出给放大器功率的方向，将一个电源输出的功率又传送至另一电源的情况极少发生。电路中可以只有一个电源或者多个电源，这时，改变式(11.7)中叠加单元的数量即可。在电子线路中直流电源通常用重复的大写下标来表示，例如 V_{CC}。

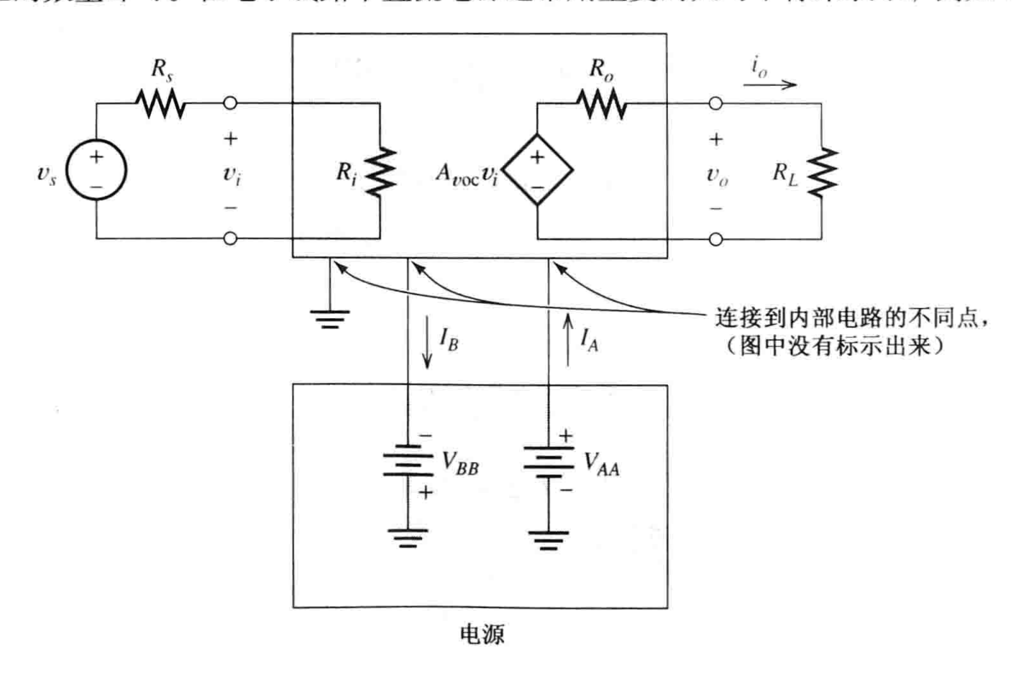


图 11.8 几个直流电源向放大器输出功率的电路图

我们知道典型放大器的功率增益是非常大的，因此输出到负载的功率比信号源提供的功率大得多。这些多余的能量由电源供给，同时，从电源提供的少部分能量在放大器内部电路中被转换为热量消耗掉，因此在设计放大器内部电路时要尽量减少这些能量耗散。

所有进入放大器的功率(即信号源功率) P_i 和电源功率 P_s 的和必然等于输出的功率 P_o 与损失的功率 P_d 之和：

$$P_i + P_s = P_o + P_d \tag{11.8}$$

图 11.9 表示了这个功率平衡关系。通常，此公式中的功率 P_i 与其他功率相比较非常小，可以忽略。

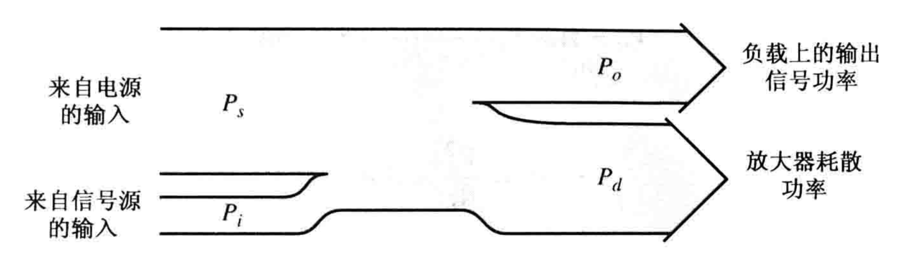


图 11.9　功率平衡关系的原理框图

总之，放大器是一个从直流电源获取能量，然后将部分能量转换为输出信号能量的系统。例如，立体声音响系统将从电源获取的部分能量转换为输出信号，并传递到扬声器变为声音信号。

11.3.2　效率

放大器的效率 η 等于输出功率占输入功率的百分比，即：

$$\eta = \frac{P_o}{P_s} \times 100\% \tag{11.9}$$

例 11.4　放大器的效率。

计算图 11.10 中放大器的输入功率、输出功率、电源功率和耗散功率，同时算出放大器的效率。(这组数据是在高输出阻抗的测试条件下获得的一个典型的立体声放大器的单通道数据。)

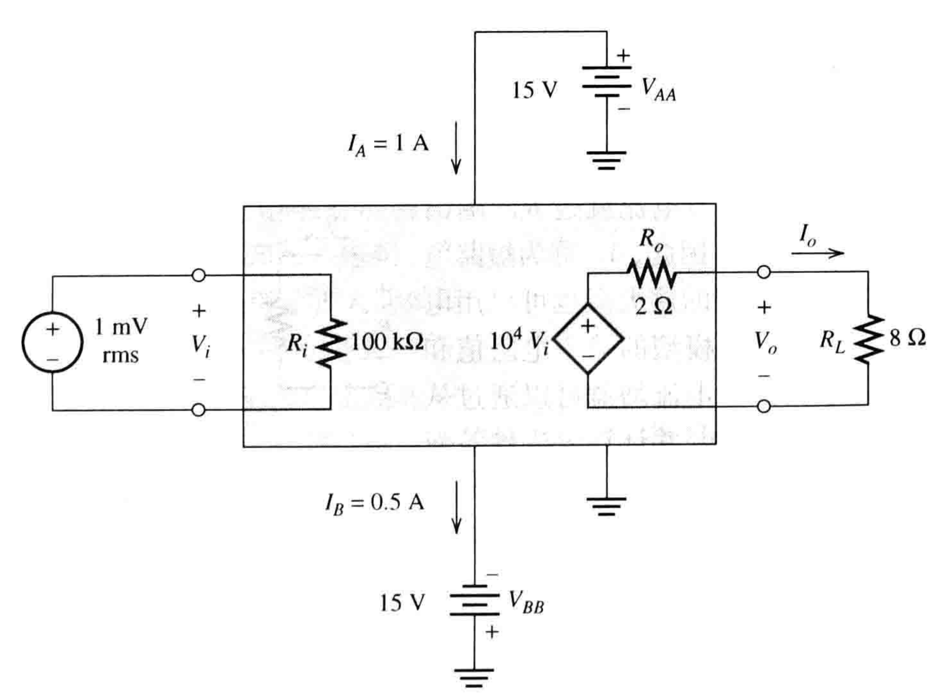


图 11.10　例 11.4 的放大器

解： 传送到放大器的平均信号功率为

$$P_i = \frac{V_i^2}{R_i} = 10^{-11}\ \text{W} = 10\ \text{pW}$$

(注：1 pW = 10^{-12}W)，输出电压为

$$V_o = A_{voc}V_i\frac{R_L}{R_L+R_o} = 8\ \text{V rms}$$

然后，得到平均输出功率：

$$P_o = \frac{V_o^2}{R_L} = 8\ \text{W}$$

电源提供的功率：

$$P_s = V_{AA}I_A + V_{BB}I_B = 15 + 7.5 = 22.5\ \text{W}$$

注意，(通常)输入信号的功率 P_i 与其他功率相比较非常小，可以忽略。放大器中的耗散功率为

$$P_d = P_s + P_i - P_o = 14.5\ \text{W}$$

放大器的效率为

$$\eta = \frac{P_o}{P_s} \times 100\% = 35.6\%$$

练习 11.6 一个电压为 15 V 的电源为放大器提供 1.5 A 的电流，输出的信号功率为 2.5 W，输入信号的功率是 0.5 W。请计算放大器损失的功率和效率。

答案： $P_d = 2.5$ W，$\eta = 11.1\%$。

11.4 其他放大器模型

11.4.1 电流放大器模型

迄今为止，我们学习了如图 11.3 所示的压控电压源放大器模型。图 11.11 则是一种电流放大器模型，通过电流控制电流源来表征其增益的特性。同样，放大器从信号源处获得的电流要流过输入电阻，而输出电阻与受控电流源并联，因为放大器不能给任意一个大电阻提供一个恒定的电流。

如果负载短路，那么就没有电流流过 R_o，输出电流与输入电流的比率是 A_{isc}。因此，A_{isc} 称为短路电流增益。采用电压放大器模型的放大器也可以用电流放大器模型来表示，这两种模型的输入电阻值和输出电阻值是相同的，而短路电流增益可以通过从电压放大器模型中短接输出端，并计算电流增益而得到。

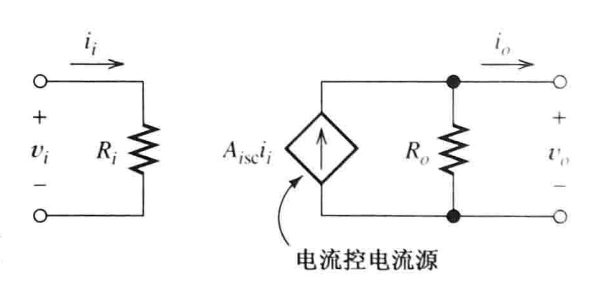


图 11.11 电流放大器的模型

注意，这就是将电压放大器模型的戴维南等效电路改变为电流放大器的诺顿等效电路。

例 11.5 将电压放大器模型转换为电流放大器模型的某放大器的电压放大器模型如图 11.12 所示，请分析其电流放大器模型。

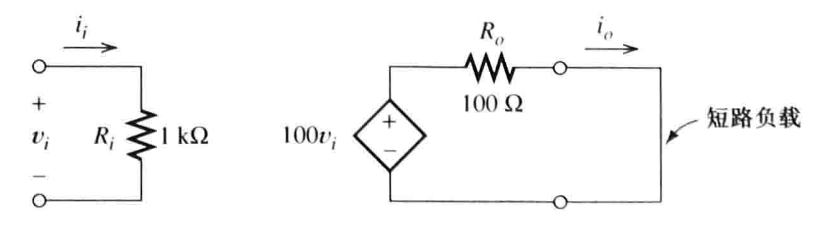


图 11.12 例 11.5、例 11.6 和例 11.7 的电压放大器模型

解： 将图 11.12 中的放大器输出端短路来计算短路电流增益，得到：

$$i_i = \frac{v_i}{R_i} \quad 和 \quad i_{osc} = \frac{A_{voc}v_i}{R_o}$$

短路电流增益为

$$A_{isc} = \frac{i_{osc}}{i_i} = A_{voc}\frac{R_i}{R_o} = 10^3$$

最终的电流放大器模型如图 11.13 所示。

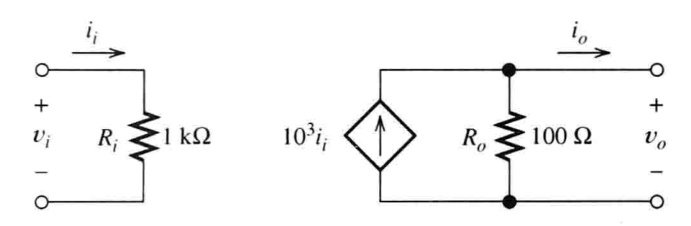


图 11.13　等效为图 11.12 所示电压放大器模型的电流放大器模型

练习 11.7　某电流放大器模型的输入电阻是 1 kΩ，输出电阻是 20 Ω，短路电流增益是 200。计算电压放大器模型的参数。

答案： $A_{voc} = 4$，$R_i = 1\ \text{k}\Omega$，$R_o = 20\ \Omega$。

11.4.2　跨导放大器模型

另一种放大器模型是跨导放大器模型，如图 11.14 所示。在这种情况下，采用电压控电流源来分析增益值 G_{msc}，即短路跨导增益。G_{msc} 是短路输出电流 i_{osc} 与输入电压 v_i 之比：

$$G_{msc} = \frac{i_{osc}}{v_i}$$

跨导增益的单位是西门子，与电压放大器和电流放大器模型中的输入电阻和输出电阻扮演着相同的角色。一个指定的放大器在已知输入电阻、输出电阻和短路跨导增益时可以得到跨导放大器模型。

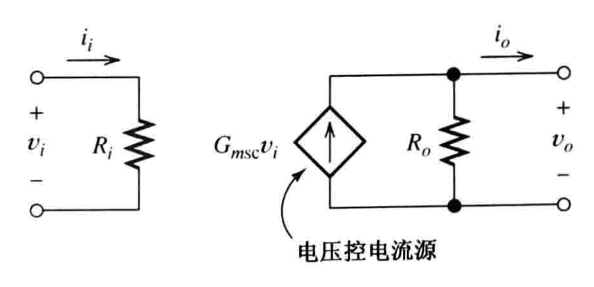
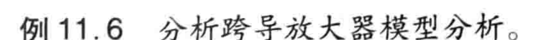


图 11.14　跨导放大器的模型

输入电阻是从放大器输入端看进去的等效电阻，与前述所有放大器模型的输入电阻值相同。同样，输出电阻是从输出端看进去的戴维南电路等效电阻，与前述所有放大器模型的输出电阻值相同。



例 11.6　分析跨导放大器模型分析。

图 11.12 中放大器的跨导放大器模型。

解： 短路跨导增益为

$$G_{msc} = \frac{i_{osc}}{v_i}$$

负载短路时的输出电流为

$$i_{osc} = \frac{A_{voc}v_i}{R_o}$$

因此，有：

$$G_{msc} = \frac{A_{voc}}{R_o} = 1.0\ \text{S}$$

最终的放大器模型如图 11.15 所示。

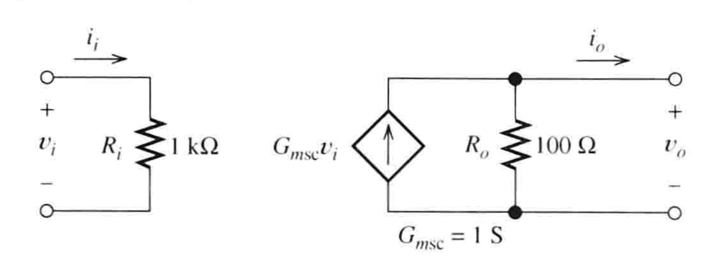


图 11.15 例 11.6 中图 11.12 所示电压放大器模型的等效跨导放大器模型

练习 11.8 一个电流放大器的输入电阻是 500 Ω，输出电阻是 50 Ω，短路电流增益是 100。请计算跨导放大器的相应参数值。

答案：G_{msc} =0.2 S，R_i =500 Ω，R_o =50 Ω。

11.4.3 互阻放大器模型

最后，我们来看图 11.16 所示的放大器模型。在这种情况下，放大器的等效模型为电流控电压源。增益参数 R_{moc} 称为开环互阻增益，单位是欧姆(Ω)，它是开环输出电压 v_{ooc} 与输入电流 i_i 的比值：

$$R_{moc} = \frac{v_{ooc}}{i_i}$$

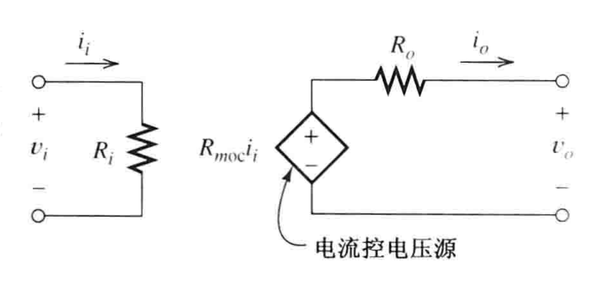


图 11.16 互阻放大器模型

在任何放大器模型中，输入和输出电阻是固定值。

例 11.17 确定互阻变压器模型。

分析图 11.12 中的互阻变压器模型。

解：开环负载的输出电压为

$$v_{ooc} = A_{voc}v_i$$

输入电流为

$$i_i = \frac{v_i}{R_i}$$

因此，得到互阻增益是

$$R_{moc} = \frac{v_{ooc}}{i_i} = A_{voc}R_i = 100\ \text{k}\Omega$$

最终得到的互阻放大器模型如图 11.17 所示。

图 11.17 例 11.17 的等效互阻模型

练习 11.9 一个放大器的输入电阻是 1 MΩ，输出电阻是 10 Ω。G_{msc} =0.05 S。求出此放大器的 R_{moc}。

答案：R_{moc} = 500 kΩ。

因此，放大器可以由以下四种模型之一来表达：电压放大器、电流放大器、跨导放大器或互阻放大器。但是，在输入或输出电阻为 0 或者无穷大值时，不能用任意一种模型来表达放大器，否则可能导致增益参数不能确定。例如，如果 R_i =0，那么 v_i =0，则电压增益 A_{voc} = v_o/v_i 是不确定的。

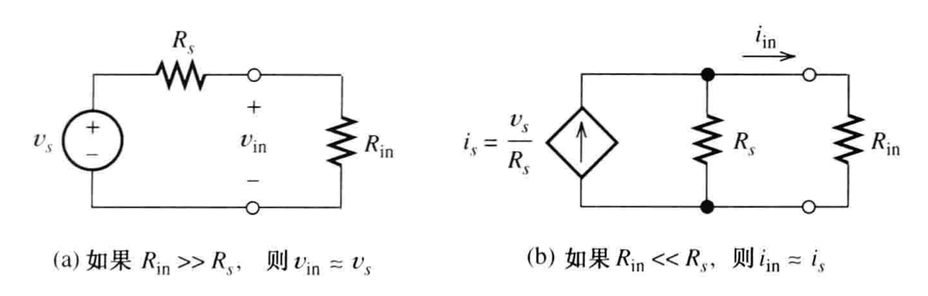
11.5 放大器阻抗在不同应用中的重要性

11.5.1 对输入阻抗的要求

通常，要求放大器将信号源的内电压加以放大。例如，采用心电图仪放大和记录一个人心脏的小电压信号。这些小电压信号的获取依靠放在人皮肤上的电极。对于不同的个体，电极的输入阻抗是不同的，通常阻值比较高。如果心电图仪的输入阻抗低，输出电压就会因为加上负载而降低。因为信号的幅值受到电极与皮肤接触电阻的影响，所以不能真实呈现心脏的活动情况；另一方面，如果心电图仪的输入阻抗比信号源电阻阻抗大很多，则心脏产生的电压几乎完全输出到心电图的输入端。可见，心电图仪放大器的输入阻抗值需要很大才合乎理想的要求。

另一方面，放大器需要对信号源的短路电流做出响应。这种情况下，需要放大器具有一个小的输入阻抗。例如，将一个电子电表串联在电路中用来测量电流。通常，我们不希望电表的接入改变电路的电流值，这时我们需要一个内阻足够小的电表才不会对电流有明显的影响。

总之，如果放大器的输入阻抗比信号源内阻大得多，则输入端的电压基本等于信号源的内电压，如图 11.18(a)所示。另一方面，如果输入阻抗很小，那么输入放大器的电流基本上等于信号源的短路电流，如图 11.18(b)所示。



(a) 如果 $R_{in} >> R_s$，则 $v_{in} \approx v_s$　　(b) 如果 $R_{in} << R_s$，则 $i_{in} \approx i_s$

图 11.18　电路如果需要传递信号源的开路电压值，则放大器的输入阻抗值应足够大，见(a)；如果需要传递信号源的短路电流值，则放大器的输入阻抗值应足够小，见(b)

11.5.2 对输出阻抗的要求

对放大器输出阻抗的要求也是多种多样的。例如，我们采用一个音频放大器通过各扬声器为一栋办公大楼的许多房间提供背景音乐，如图 11.19 所示，可以通过各开关独立控制各扬声器是否工作。因此，负载的等效电阻值变化范围较大，这取决于已开扬声器的数量。如果放大器的输出电阻比负载大得多，则输出电压取决于负载。因此，当关闭部分扬声器时，提供给其他扬声器的输出电压会变大，导致音量突然增大。事实上，我们并不希望这种情况发生。另一方面，如果放大器输出电阻相对负载而言非常小，那么输出电压基本与负载无关。可见，在这种音频应用的情况下，小的输出电阻更理想。

另一个实例是在光电通信系统中的应用。发光二极管(LED)将诸如声音波形之类的信号转换为与之成线性比例的光信号，因为流过 LED 的电流信号被转换为与之成正比的光强度变化。由于 LED 的电压与电流并非线性比例关系，因此必须将声音信号线性转换为电流信号而非电压信号，从而必须选择输出阻抗非常高的放大器来驱动 LED 器件。(反之，如果选择输出阻抗非常小的放大器来驱动 LED 器件，则声音信号被转换为与之成正比的电压信号，这时，电流与声音信号为非线性关系，则 LED 发出光的强度与声音信号无线性比例关系。)

总之，通过选择输出阻抗远小于负载的放大器，就能输出一个理想的与负载无关的电压波形。另一方面，我们能设计放大器输出阻抗比负载高很多的放大器，从而得到一个给定的电流波形。

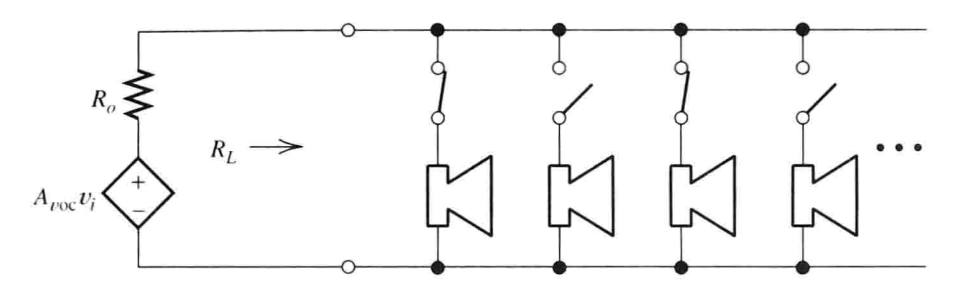


图 11.19 如果放大器输出电阻 R_o 相对负载来说非常小，那么负载电压基本与闭合开关的数量无关

11.5.3 对特殊阻抗的要求

不是任何情况下都要求放大器的阻抗很小或很大，例如一个通过传输线与信号源连接的放大器，如图 11.20 所示。通常我们了解的传输线有连接电视与天线之间的双绞线，还有同轴电缆。

每种传输线有各自的特征阻抗，例如双绞线是 300 Ω。当信号在导线上传输时，部分信号会反射回信号源，除非放大器的输入阻抗与传输线的特征阻抗相等，则正向传输在输入端终止，不再反射，如图 11.20 所示。否则，如果用双绞线来连接天线与电视，信号在天线处再次反射，使部分信号再次传回电视，这些多余的信号因为在传输线上往返而被延时，导致画面质量受到影响(现象是一个像鬼影的模糊画面出现在主画面的右侧)。可见，电视的输入阻抗与传输线的特征阻抗相同非常重要，这样可以防止反射的发生。

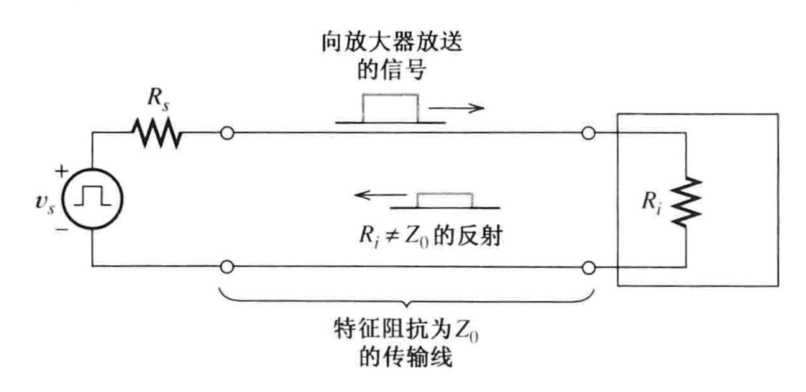


图 11.20 为避免发生反射，放大器的输入阻抗 R_i 应等于传输线的特征阻抗

音频放大器是另一种情形，其输出阻抗需要一个适中的阻值。由于扬声器的频率特性与放大器的输出阻抗关系密切，因此，如果对声音的高保真是首要的要求，那么放大器输出阻抗的选择应该能够使频率特性非常平坦才能实现。

11.6 理想放大器

我们在 11.5 节已经知道对放大器的输入电阻(与信号源内阻比较)和输出电阻(与负载比较)有一定的要求。这些放大器的分类如下。

1. 理想电压放大器：是将信号源的开路电压经过放大后传输至负载的放大器，而且输出电压与负载电阻无关。因此，理想电压放大器有无穷大的输入阻抗(这样，信号源的开路电压能传递到放大器输入端)和零输出阻抗(所以使输出电压与负载电阻无关)。

2. 理想电流放大器：是将信号源的短路电流经过放大后传输至负载的放大器，而且输出电流与负载电阻无关。因此，理想放大器具有零输入阻抗和无穷大输出阻抗。
3. 理想跨导放大器：是将信号源的开路电压经过放大和转换后，输出与电压成比例的电流至负载。因此，一个理想跨导放大器有无穷大输入阻抗和无穷大输出阻抗。
4. 理想互阻放大器：是将信号源的短路电流经过放大与转换后，输出与电流成比例的电压至负载。因此，理想互阻放大器有零输入阻抗和零输出阻抗。表 11.1 展示了每种理想放大器的输入阻抗、输出阻抗和增益等参数值。

表 11.1　理想放大器的特征参数值

放大器类型	输入阻抗	输出阻抗	增益参数
电压	∞	0	A_{voc}
电流	0	∞	A_{isc}
跨导	∞	∞	G_{msc}
互阻	0	0	R_{moc}

11.6.1　实际放大器分类

事实上，放大器不可能有零或者无穷大的电阻。不过，实际放大器仍然参照理想放大器的形式进行分类。例如，如果一个放大器的输入电阻非常大(与信号源电阻比较)并且输出电阻非常小(与负载比较)，就可以被视作一个理想的电压放大器。

需要注意的是，已知参数的放大器不能视为理想放大器，除非也预先知道了信号源和负载电阻值。例如，一个放大器的输入电阻是 1000 Ω，输出电阻是 100 Ω。这时，如果信号源内阻比 1000 Ω 小很多，并且负载电阻比 100 Ω 大很多，那么这个放大器能被看作近似理想的电压放大器；另一方面，如果信号源内阻为 1 MΩ 而负载电阻为 1 Ω，则该放大器应该被视为是近似理想的电流放大器。

通常，小功率电子电路的电阻在 1 kΩ 到 100 kΩ 之间，因此，电阻小于 100 Ω 被归类为“小”，电阻大于 1 MΩ 被归类为“大”。所以，通常可以将输入电阻为 10 Ω 且输出电阻为 2 MΩ 的放大器归类为理想电流放大器。当然，根据负载和信号源电阻的大小不同，分类方式可以灵活改变。

练习 11.10　给定放大器输入电阻 $R_i = 1\ \mathrm{k\Omega}$，输出电阻 $R_o = 1\ \mathrm{k\Omega}$。$R_s$ 是信号源内阻，R_L 是负载。要求分别对以下放大器加以分类：(a) R_s 小于 10 Ω，R_L 大于 100 kΩ；(b) R_s 大于 100 kΩ，R_L 小于 10 Ω；(c) R_s 小于 10 Ω，R_L 小于 10 Ω；(d) R_s 大于 100 kΩ，R_L 大于 100 kΩ；(e) R_s 接近 1 kΩ，R_L 小于 10 Ω。

答案：(a)近似的理想电压放大器；(b)近似的理想电流放大器；(c)近似的理想跨导放大器；(d)近似的理想互阻放大器；(e)这种情况难以归类。

练习 11.11　一个特殊传感器用来测量在化工处理过程中的液面高度，传感器的短路电流与液面高度成正比(传感器的开路电压与液高无关)。要求放大器传送与液面高度成比例的电压信号到负载，负载的阻值在 1 ~ 10 kΩ 之间变化。问需要什么类型的理想放大器来实现此要求？

答案：应该采用互阻放大器。因为放大器的输入电阻应足够小才能传递传感器的短路电流。此外，为了传送与负载无关的输出电压，放大器输出电阻相对负载电阻来说必须很小。

11.7 频率响应

至今，我们认为放大器增益参数是恒定的。事实上，如果把频率可变的正弦信号加至放大器，那么增益会是频率的函数。此外，放大器还会影响正弦信号的幅度和相位。因此，我们给放大器增益一个更普遍的定义，即增益相量，它是输出信号相量与输入信号相量的比：

$$A_v = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} \tag{11.10}$$

我们用黑体的大写符号表示输入电压相量和输出电压相量。类似地，我们也定义电流增益相量、跨导增益相量和互阻增益相量，用增益相量强调这些增益的幅度与相位的重要性。为方便起见，以后我们就不加相量这一后缀了，简称为增益。实际上，增益相量也是一种传递函数，第6章中已经讨论过了，因而当用分贝表示这个传递函数时，多采用20 dB的形式。

例11.8 计算增益相量。

已知放大器输入电压是

$$v_i(t) = 0.1\cos(2000\pi t - 30°)$$

输出电压是

$$v_o(t) = 10\cos(2000\pi t + 15°)$$

要求计算放大器的增益相量，并用分贝表示。

解：输入电压相量是一个复数，其幅值是正弦信号的峰值，角度是正弦信号的相位角。

$$\mathbf{V}_i = 0.1\angle{-30°}$$

类似地，

$$\mathbf{V}_o = 10\angle{15°}$$

这样，电压增益相量为

$$A_v = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_i} = \frac{10\angle{15°}}{0.1\angle{-30°}} = 100\angle{45°}$$

电压增益相量表示输出信号幅值是输入信号幅值的100倍，并且输出信号超前输入信号45°。

为了用分贝表示增益，我们首先去掉角度计算增益的模，得到分贝增益：

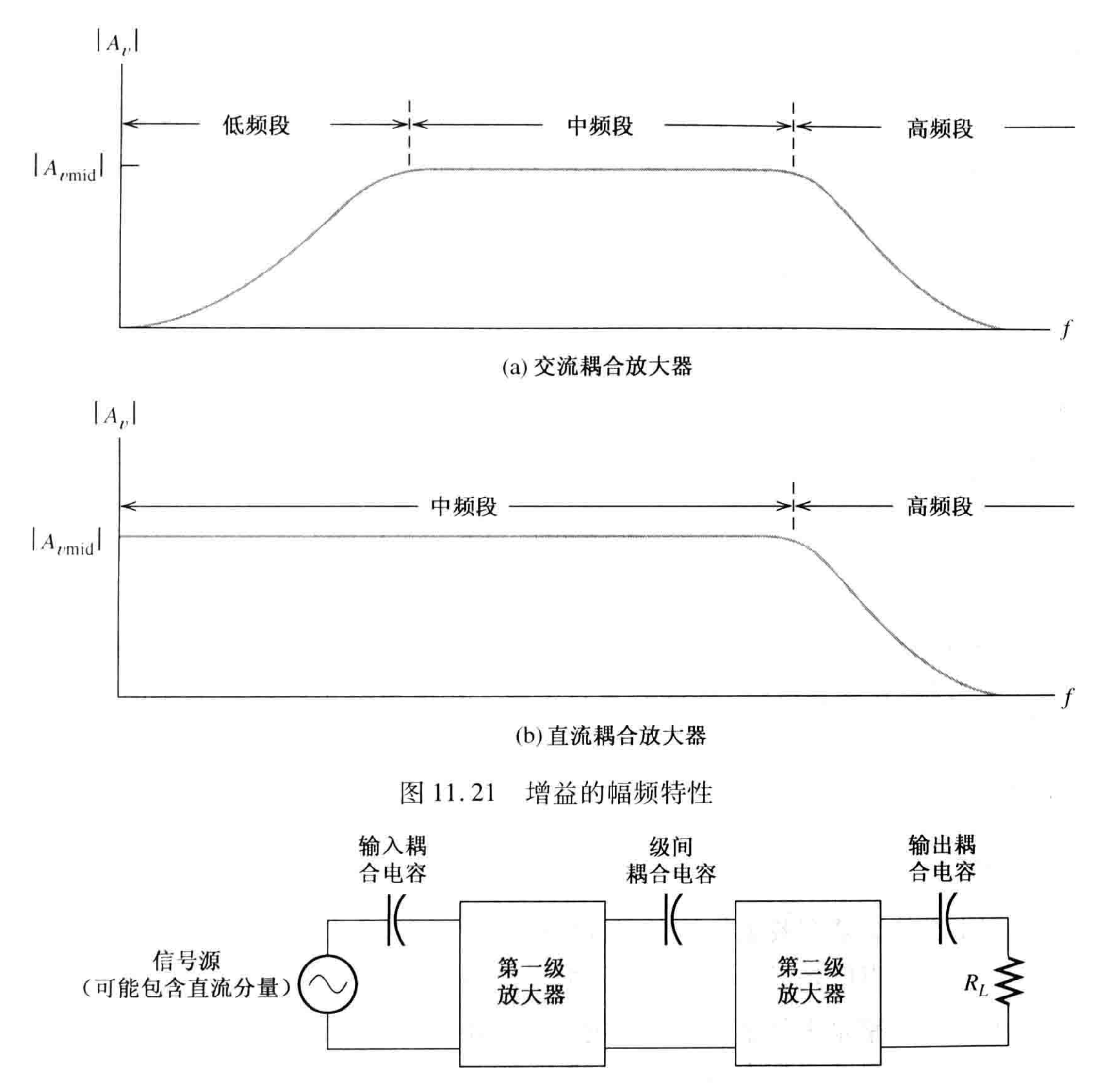
$$|A_v|_{\text{dB}} = 20\log|A_v| = 20\log(100) = 40\ \text{dB}$$

11.7.1 增益的频率响应

如果绘制典型放大器的增益与频率的关系(幅频特性)曲线，则得到如图11.21所示的曲线。注意，在一定频率范围内增益值保持不变，这段频率范围叫作中频带。

11.7.2 交流耦合与直流耦合

如图11.21(a)所示，在直流(频率为零处)信号输入时，增益降至零，这样的放大器连接因为只允许交流信号通过而被称为交流耦合方式。在此情况下，各级(或称各段)放大器都通过电容器级联起来，使本级放大器的直流电压不影响信号源、邻近放大器以及负载，如图11.22所示。(有时，也采用变压器来连接各级放大器，在直流情况下放大器的增益同样为零。变压器的知识在第15章中介绍。)



(a) 交流耦合放大器

(b) 直流耦合放大器

图 11.21　增益的幅频特性

图 11.22　电容耦合阻止了输入直流分量影响第一级放大器，第一级放大器的直流电压进入第二级放大器，第二级放大器的直流电压到达负载

其他一些放大器在直流输入以及不同频率的信号输入时有着相同的增益，如图 11.21(b)所示，这种方式称为直流耦合或直接耦合。集成电路中的放大器通常采用直流耦合方式，因为电容器或者变压器的制作难以集成化。

音频放大器通常采用交流耦合方式，因为人耳能听到的声音频率在 20 Hz 到 15 kHz 的范围，无须放大直流信号。另外，把直流电压施加至扬声器可能引起损坏，所以不需要采用直流耦合方式。

心电图仪放大器特意采用交流耦合方式，以此避免电极产生的一个差不多 1 V 的直流电压在输入心电图仪时被放大。心脏产生的交流信号幅度大约是 1 mV，因此要求放大器的增益足够高，典型增益值为 1000 或更高。这样，如果 1 V 的直流干扰信号输入放大器时会产生高达 1000 V 的电压输出，设计一个放大器产生这么高的电压输出是很难的，而且也不希望发生这种情况。因此，心电图仪需要采用交流耦合方式来防止直流信号成分引起的过载。

视频信号的放大器采用直流耦合方式，因为视频信号的频率范围通常为 0 ~ 4.5 MHz，而暗色画面比鲜艳画面的直流信号成分更高，为了能够得到合适的亮度，需要采用直流耦合方式来保留直流信号成分。实际上，某些视频信号在通过交流耦合放大器后，再经过波形整形（称为直流复原器），以此复原适当的直流信号成分。

11.7.3 高频区

如图 11.21(a)和(b)所示，放大器的幅度增益总是在高频区显著下降，这是因为放大器的通路上有等效的并联小电容和串联小电感，如图 11.23 所示。电容器的阻抗与频率成反比，所以在高频时可能引起短路；电感器的阻抗与频率成正比，所以在高频时相当于开路。

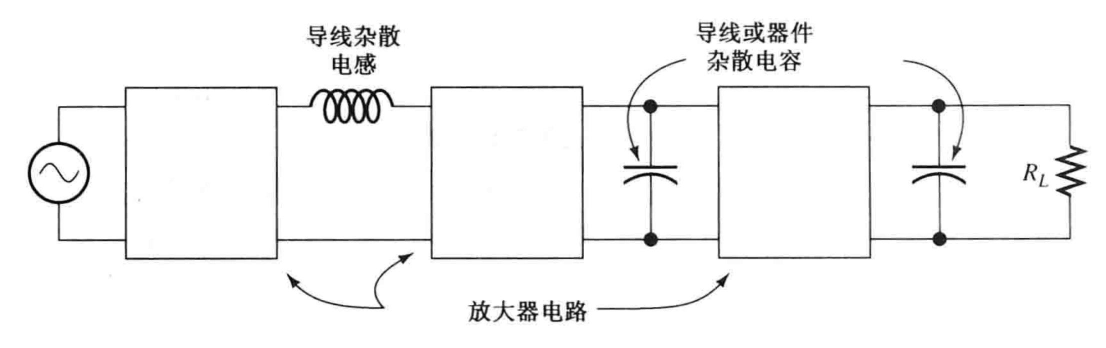


图 11.23 信号通路上的等效并联小电容和串联小电感引起高频区内放大器幅度增益的下降

这些小容量电容器的一部分表示传输信号的导线与大地之间产生的杂散电容，另一部分是放大器电路中元器件(比如晶体管)的等效集总电容。小电感是由电路中导线周围的磁场产生的。例如，在一重要位置布置的半英尺长导线有足够大的电感值，会阻碍放大器的频率响应工作在吉赫兹(GHz)的范围。

11.7.4 半功率频率与带宽

通常，我们定义放大器有效工作的频率范围在对应于 $1/\sqrt{2}$ 倍中频电压(或电流)增益的两个频率点以内，这两个点就是半功率频率点。如果使用一个幅度不变、频率可变的输入信号进行测试，此时的输出功率是中间带对应功率的一半。用分贝表示因子 $1/\sqrt{2}$，得到 $20\log(1/\sqrt{2}) = -3.01$ dB。因此，在半功率频率点的电压(或电流)增益比中频增益约小 3 dB。定义放大器的带宽 B 表示半功率频率点之间的距离，如图 11.24 所示。

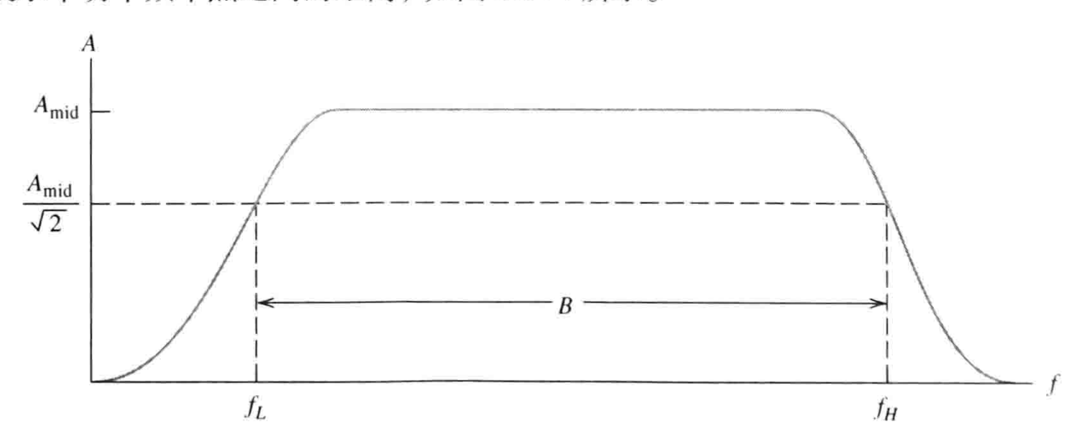


图 11.24 典型放大器的增益频率特性，包括半功率点的上限(f_H)、下限截止频率(f_L)和带宽 B

11.7.5 宽带与窄带放大器

直流耦合放大器或者下限截止频率很低的放大器叫作宽带或基带放大器。宽带放大器用于处理频率范围很宽的信号，比如音频信号(20 Hz ~ 15 kHz)或者视频信号(直流到 4 MHz)。

另一方面，某些放大器的频率响应被限制在一个与中心频率非常接近的小频率范围内，这

样的放大器叫作窄带或者带通放大器，其增益频率特性如图 11.25 所示。带通放大器用于无线电接收、放大从发送机获得的有用信号，滤除邻近频率的无用信号。

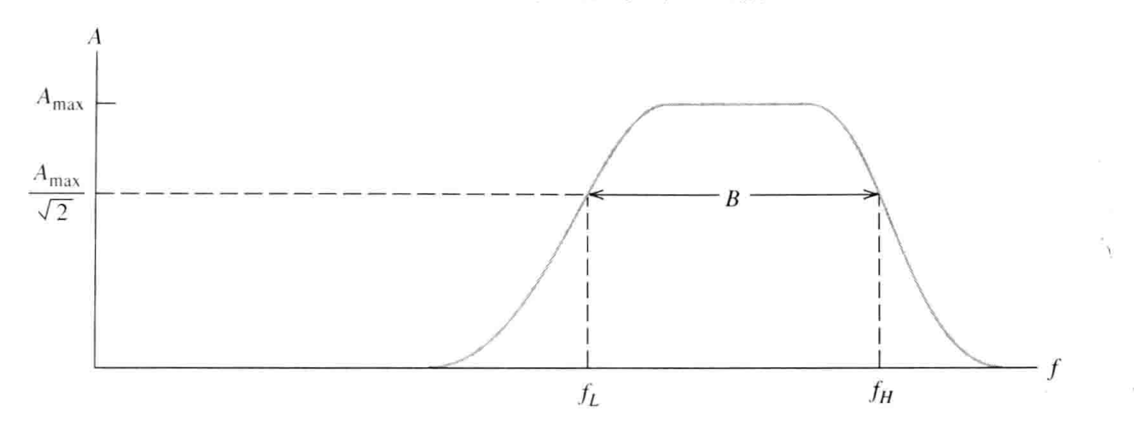


图 11.25　带通放大器的增益频率特性

11.8　线性波形失真

11.8.1　幅值畸变

如果放大器对于输入信号的不同频率成分有不同的增益值，称为幅值失真。

音频系统通常有幅值失真发生，因为与中频带的信号相比，放大器尤其是扬声器会减少对高音和低音部分的放大。毫无疑问，当我们接听电话时听到的音质比较差。

例 11.9　幅值失真

已知放大器的输入信号包含两种频率成分：

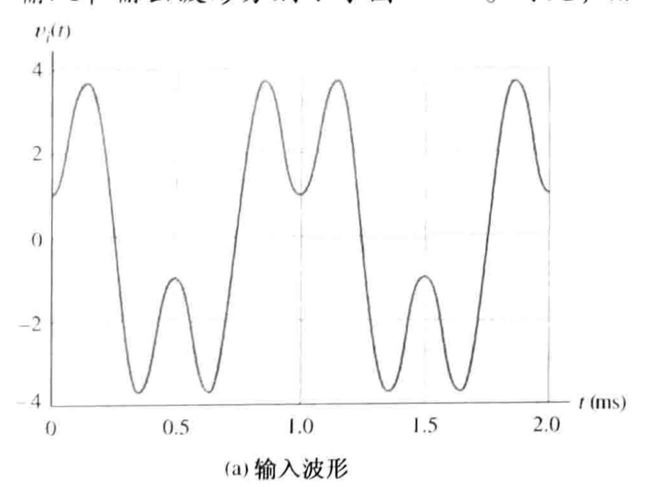
$$v_i(t) = 3\cos(2000\pi t) - 2\cos(6000\pi t)$$

放大器在 1000 Hz 时的增益是 $10\angle 0°$，在 3000Hz 时增益是 $2.5\angle 0°$。试绘制输入和输出的波形。

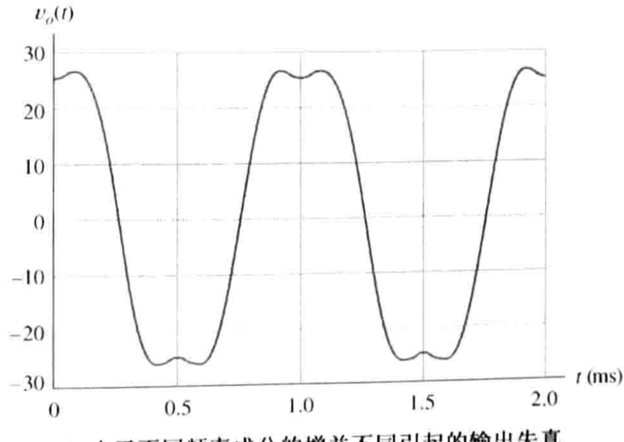
答案：第一种成分的频率是 1000 Hz，因此增益是 $10\angle 0°$，但第二种情况是频率 3000 Hz，所以增益是 $2.5\angle 0°$。根据输入信号大小以及增益与相位的关系，我们得到输出为

$$v_o(t) = 30\cos(2000\pi t) - 5\cos(6000\pi t)$$

输入和输出波形分别示于图 11.26。可见，输入和输出波形的形状不同是因为幅值失真引起的。



(a) 输入波形



(b) 由于不同频率成分的增益不同引起的输出失真

图 11.26　线性幅值失真

11.8.2 相位失真

如果放大器的相移与频率不成比例，则会发生相位失真。所有频率的零相移会导致输出波形与输入波形相同。另一方面，如果放大器的相移与频率成比例，则输出波形将是输入波形的时移，但不认为波形发生了失真，因为输入与输出波形并没有改变。如果相移与频率不成比例，则波形通过放大器时会发生改变，即产生相位失真。

例 11.10 相位失真。

已知输入信号：

$$v_i(t) = 3\cos(2000\pi t) - \cos(6000\pi t)$$

分别传输至3个放大器，其增益与频率的关系见表11.2。要求计算并绘制3种情况下放大器的输出波形。

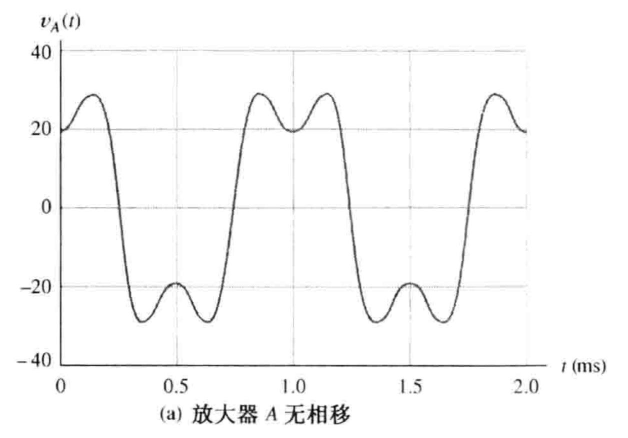
解： 根据增益和相移与频率的关系，得到放大器的输出信号是

表 11.2 例 11.10 中放大器的增益与频率的关系

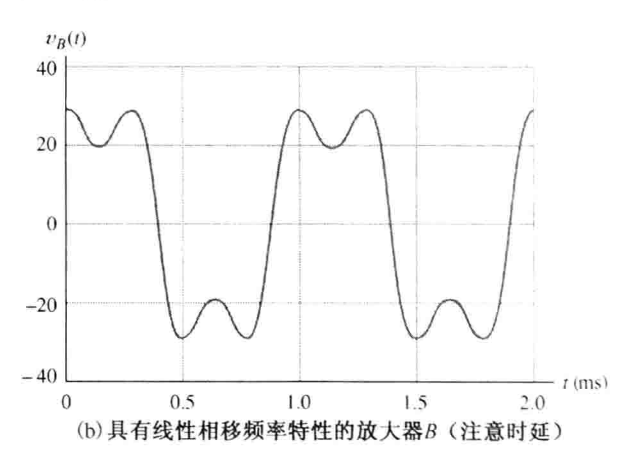
放大器	1000 Hz 时的增益	3000 Hz 时的增益
A	$10\angle 0°$	$10\angle 0°$
B	$10\angle 45°$	$10\angle -135°$
C	$10\angle -45°$	$10\angle -45°$

$$v_{oA}(t) = 30\cos(2000\pi t) - 10\cos(6000\pi t)$$
$$v_{oB}(t) = 30\cos(2000\pi t - 45°) - 10\cos(6000\pi t - 135°)$$
$$v_{oC}(t) = 30\cos(2000\pi t - 45°) - 10\cos(6000\pi t - 45°)$$

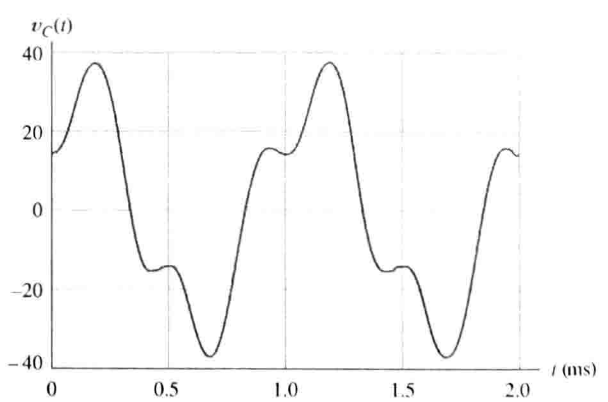
3个输出波形分别示于图11.27。放大器 A 产生一个与输入相同的输出波形，放大器 B 也产生与输入相同的输出波形，但有相位延迟，因为放大器 A 对两种频率信号的增益相移为零，而放大器 B 的增益相移与频率成比例(3000 Hz 的频率相移是 1000 Hz 频率相移的 3 倍)。放大器 C 产生一个失真的输出波形，因为其相移与频率不成比例。



(a) 放大器 A 无相移



(b) 具有线性相移频率特性的放大器B（注意时延）



(c) 具有非线性相移频率特性的放大器C（注意波形失真）

图 11.27 例 11.10 中放大器的相移频率特性(注意：放大器的输入波形与 $v_A(t)$ 的波形相同)

幅值失真和相位失真有时称之为线性畸变，因为尽管放大器是线性的(例如满足叠加性)，但失真仍然会发生。以后，我们会学习放大器中的另一类失真，即非线性失真。

简单地回顾叠加原理，该原理在2.7 节开始讨论。对一给定的放大器，假设输入 v_{inA} 对应输出 v_{oA}，输入 v_{inB} 对应输出 v_{oB}。如果输入是 $v_{inA}+v_{inB}$，那么对应输出是 $v_{oA}+v_{oB}$，我们就说放大器满足叠加原理或者是线性的。换句话说，如果输入和输出信号均满足叠加性，则这个放大器是线性的。举例如下，$v_o(t)=10v_{in}(t)$ 是线性的，因为 $10(v_{inA}+v_{inB})=10\,v_{inA}+10\,v_{inB}$。但是对于 $v_o(t)=[v_{in}(t)]^2$ 的放大器就不是线性的，因为 $(v_{inA}+v_{inB})^2\neq v_{inA}^2+v_{inB}^2$。

11.8.3　对无失真放大的要求

为了避免波形的线性失真，要求输入信号的频率范围在放大器带宽以内，并且具有恒定的增益和线性的频率相移特性。当然，不满足这些要求的带宽以外的信号就不会引起失真。无失真放大的这些要求示于图 11.28。

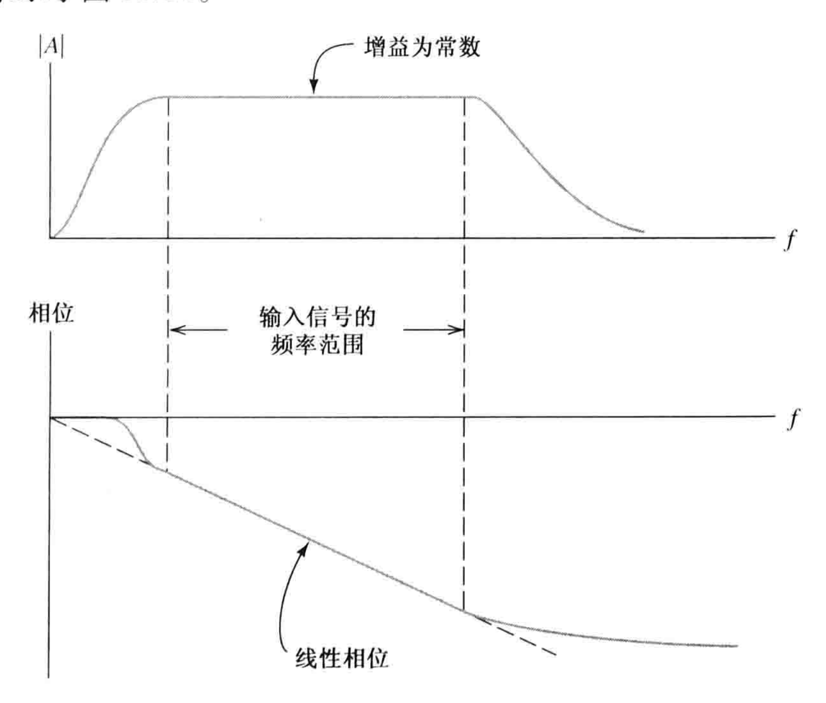


图 11.28　输入信号的频率范围在放大器带宽以内，并且具有恒定的增益和线性的频率相移特性

在之前给出的例子中，输入信号由几个特定的频率成分组成。但是，电子系统中的信号通常具有较大范围的连续频率成分。例如，音频信号包含的频率成分在 20 Hz 到 15 kHz 之间。因此，我们要求音频放大器在此带宽内具有几乎相同的增益。但是，因为耳朵对相位失真不敏感，因此没有必要要求音频放大器的相移与频率成比例。

电视信号的频率成分从直流到 4 MHz 不等，波形形状最终决定画面各点的亮度，无论相位失真还是幅值失真都将影响画面质量。因此，我们要求视频放大器的增益在带宽内是不变的，并且相移与频率成比例。

11.8.4　增益的再定义

我们过去定义增益为输出信号与输入信号之比：

$$A_V=\frac{v_O(t)}{v_I(t)}$$

但是，如果发生线性波形失真(或者有时延)，则输出信号对输入信号之比是时间的函数，而非

一个常数。因此，我们不应该将放大器的增益定义为瞬时输出和输入之比，而是考虑增益是频率的函数，并用输出相量与输入相量之比来计算不同频率的增益相量值。

练习 11.12 假设输入信号是

$$v_i(t) = \sin(1000\pi t) + \cos(2000\pi t) + 2\cos(3000\pi t)$$

频率为 1000 Hz 时，增益是 $5\angle 30°$。如果要防止波形线性失真，对不同频率的放大器增益和相移应该为多少？

答案： 对频率为 500 Hz 的信号的增益相量为 $5\angle 15°$，对 1500 Hz 频率成分的增益相量为 $5\angle 45°$。

练习 11.13 某放大器的输出是 $v_o(t) = 10v_{\text{in}}(t - 0.01)$。假设正弦输入信号为 $v_{\text{in}}(t) = V_m\cos(\omega t)$，试计算增益相量(幅值和相角)与 ω 的关系式。

答案： $10\angle -0.01\omega$。

11.9 脉冲响应

通常，我们需要放大一个如图 11.29(a)所示的脉冲信号。脉冲信号包含很广的频率成分，因此脉冲的放大需要宽带放大器。一个典型放大器的输出脉冲示于图 11.29(b)，其输出波形在几个重要方面与脉冲输入波形不同：脉冲显示过冲与振荡；前沿和后沿是渐进的而非突变的；如果放大器是交流耦合方式，则输出脉冲顶部是倾斜的。

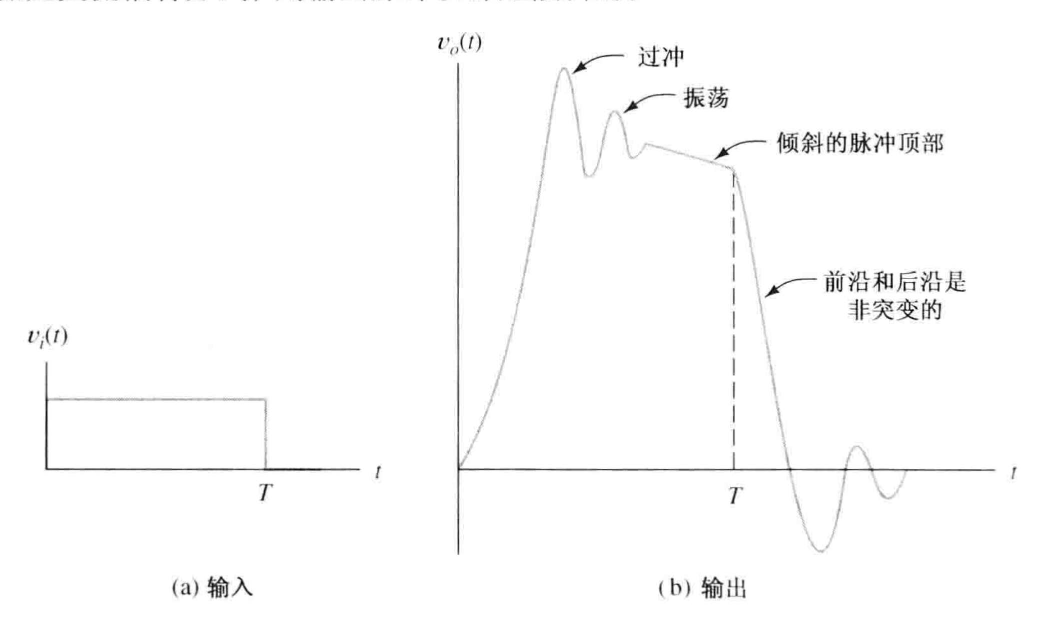


图 11.29 一个典型交流耦合宽带放大器的输入脉冲波形和相应的输出波形

11.9.1 上升时间

放大器响应前沿中逐渐上升至顶部的时间称为上升时间 t_r，这个时间间隔在最终稳定输出电压的 10% 处(t_{10}点)到 90% 处(t_{90}点)之间，如图 11.30 所示。

在高频带区域，前沿宽度的估计归因于增益的下降。经验得出半功率带宽 B 和宽带放大器的上升时间 t_r 存在如下关系：

$$t_r \approx \frac{0.35}{B} \tag{11.11}$$

这一关系并非对所有的宽带放大器都成立，但仍然有助于估计放大器的性能（尤其能精确地分析一阶电路，详见习题 P11.80）。

既然脉冲放大器是宽带的，则带宽几乎等于半功率频率点的上限频率。因此，主要是放大器的高频特性限制了上升时间。

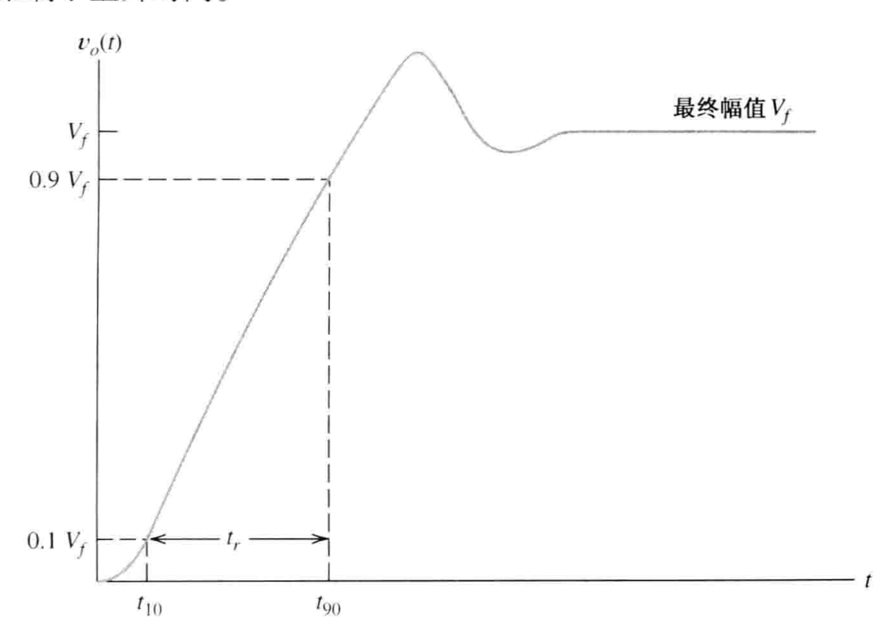


图 11.30　输出脉冲的上升时间（注意：此曲线中未显示倾斜下降部分。如果出现倾斜下降的波形，则最大值 V_f 需要重新估算）

11.9.2　过冲和振荡

如图 11.29 所示，过冲和振荡也是输出脉冲的特性，与放大器在高频区的增益特性有关。放大器的过冲和振荡在增益特性中表现为出现一个峰值，如图 11.31 所示。最大增益的频率接近于振荡的频率。

因为上升时间和过冲均与高频响应有关，通常要权衡两者的关系。在一个特定的设计中，为减少上升时间选择的元件值往往会导致更严重的过冲和振荡。但是，超过 10% 的过冲量最好不要出现。

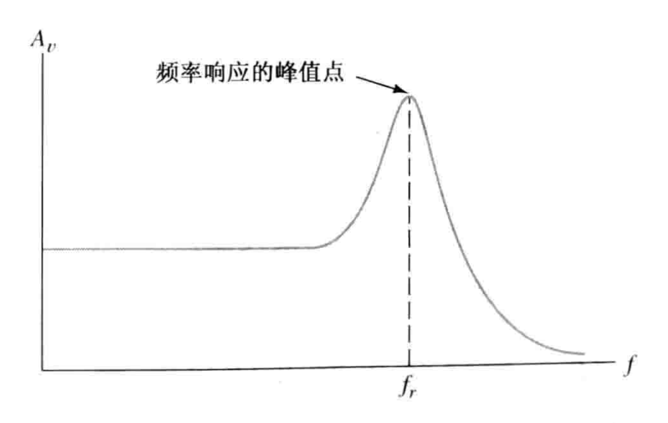


图 11.31　放大器的增益-频率特性，显示了脉冲响应的振荡现象，其振荡频率与频率响应的幅值点对应的频率基本相等

11.9.3　倾斜度

如图 11.32(a) 所示，如果放大器是交流耦合方式并且随着电容器充放电的影响，输出脉冲的顶部会发生倾斜（毕竟，如果脉冲无限持续，则好像一个新的直流输入，最终交流耦合放大器的输出电压会返回至零）。倾斜度被定义为放大器初始脉冲下降的百分比。

$$倾斜度百分比 = \frac{\Delta P}{P} \times 100\% \tag{11.12}$$

ΔP 和 P 的定义如图 11.32(a)所示。随着脉宽增加(或者通过改变耦合电容值而减小时间常数来增大放大器的下限半功率频率值),输出波形分别如图 11.32(b)和(c)所示。

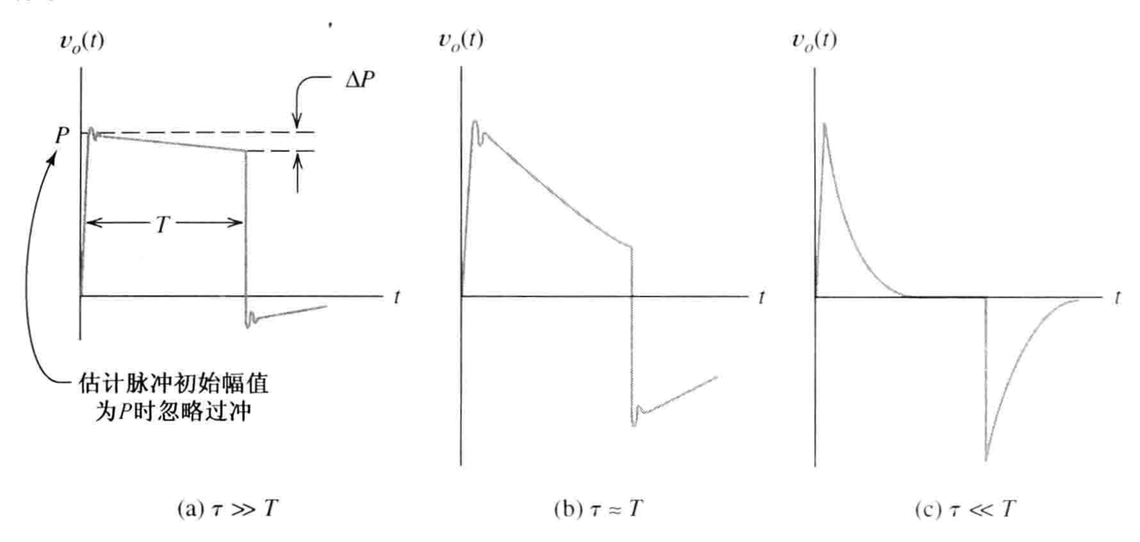


图 11.32 交流耦合放大器的脉冲响应,T 是输入脉宽,τ是耦合电路的最小时间常数

对于小的倾斜度,倾斜度与下限半功率频率点的近似关系为

$$倾斜度百分比 \approx 200\pi f_L T \tag{11.13}$$

式中,T 是脉冲持续时间,f_L 是放大器的下限半功率频率。(习题 P11.81 有倾斜度公式的推导。)

练习 11.14 在雷达系统中,通过发射无线电波,并根据物体的反射信号而检测物体的存在。当把反射信号转换为基带信号后,它们表现为脉冲信号,脉冲之间的时间间隔表示目标之间的距离。为了辨别在给定距离内的物体,令放大器允许最大的上升时间接近于反射物之间的反射时间。例如,如果想用雷达接收器区分 10 m 远的在同一直线上的物体,回声的时间间隔是 20 m(因为电波必然经过往返传输)除以光速,可计算得出一个最大的接近66.7 ns的上升时间,由此可估计放大器的最小带宽。

答案: $B \approx 5.25$ MHz。

练习 11.15 放大器需要放大脉宽 100 ms,有一个倾斜度不超过 1% 的脉冲信号。试估计放大器的下限半功率频率的最大值。

答案: $f_L = 15.9$ Hz。

11.10 传输特性和非线性失真

放大器的传输特性是瞬时输出幅值与瞬时输入幅值之比。对于理想放大器,输出波形比输入波形大很多,传输特性是直线,其斜率就是增益。实际放大器的传输特性不完全是直线,特别是对于信号幅值较大的情形,如图 11.33 所示。传输特性的弯曲反映了一个不希望的效应,即非线性失真。

有时,传输特性出现偏离直线的情况比较突然。这时,高幅值的输入信号产生的输出波形被严重削波,如图 11.34 所示。但是,即使很小的传输特性的直线偏离都会造成严重的后果。

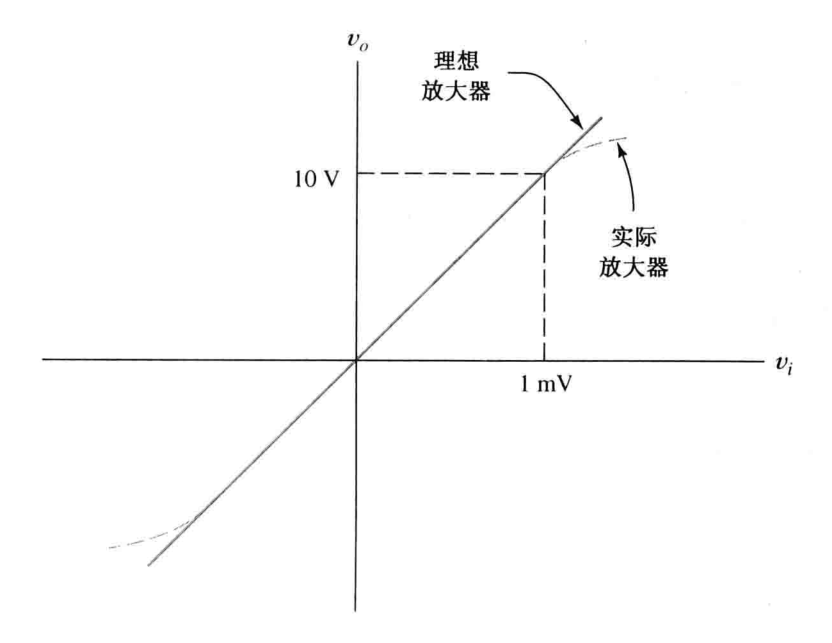


图 11.33　增益为 $A_v = 10\,000$ 的传输特性

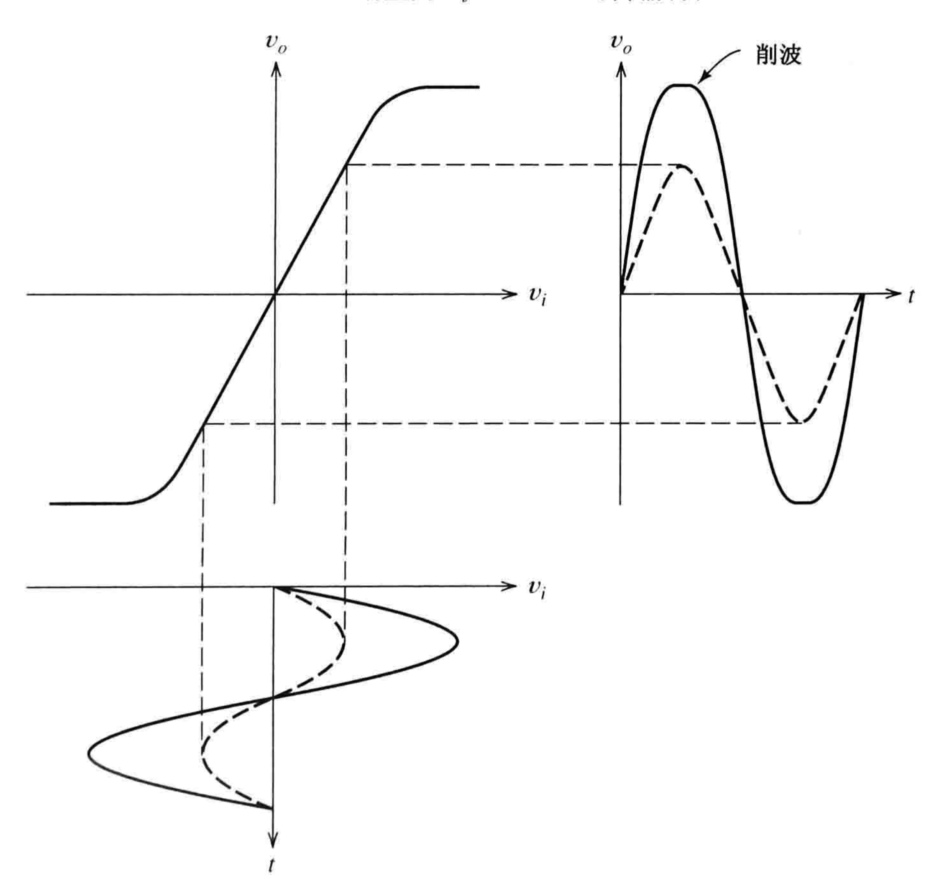


图 11.34　放大器的输入信号、传输特性和输出信号，输入信号幅值较大时出现削波现象

11.10.1　谐波失真

非线性放大器的输入-输出关系可以表示为：

$$v_o = A_1 v_i + A_2 (v_i)^2 + A_3 (v_i)^3 + \cdots \tag{11.14}$$

式中，$A_1, A_2, A_3 \cdots$ 是选定的常数，使这个等式与非线性传输特性的曲率相匹配。

假设输入信号是正弦信号：

$$v_i(t) = V_a \cos(\omega_a t) \tag{11.15}$$

我们可以找到与之相应的输出信号的等式。将式(11.15)代入式(11.14)，应用三角恒等式$[\cos(\omega_a t)]^n$，消去因子，定义V_0为所有常数之和，V_1是频率为ω_a函数的系数之和，V_2和V_3等也做出类似的定义，因此得到：

$$v_O(t) = V_0 + V_1\cos(\omega_a t) + V_2\cos(2\omega_a t) + V_3\cos(3\omega_a t) + \cdots \tag{11.16}$$

我们想要的输出是$V_1\cos(\omega_a t)$，叫作基波成分。V_0仅表示直流电平值(如果采用交流耦合方式，不会在放大器的负载电压中出现)。另外，也产生了对应于放大器输入信号频率的二次甚至更高次的电压分量，这些分量称为谐波失真。对应于频率为$2\omega_a$的电压分量叫作二次谐波，对应于$3\omega_a$的电压分量叫作三次谐波，等等。在式(11.14)中传输特性更高频率的分量对应更高次谐波。例如，三次分量对应三次谐波。

谐波失真在宽带放大器中是不允许的，因为它会减小需处理的部分信号。例如，在音频放大器中，谐波失真将降低扬声器发出的声音质量。

二次谐波失真因子被定义为二次谐波幅值与基波幅值的比值。等式表示为：

$$D_2 = \frac{V_2}{V_1} \tag{11.17}$$

V_1是式(11.16)中的基波幅值，V_2是二次谐波幅值。类似地，三次等高次谐波失真因子等定义为

$$D_3 = \frac{V_3}{V_1} \quad D_4 = \frac{V_4}{V_1} \quad \cdots \tag{11.18}$$

总的谐波畸变率(THD)(简单表示为D)是所有谐波畸变因子的平方和。总的谐波畸变率如下：

$$D = \sqrt{D_2^2 + D_3^2 + D_4^2 + D_5^2 + \cdots} \tag{11.19}$$

我们通常将THD表示为百分数。一个设计较好的音频放大器的THD在额定输出功率下可达到0.01%(即$D = 0.0001$)。几年前，THD为5%的放大器能在便宜的收音机和留声机中找到。

注意，放大器的THD由输出信号的幅值而定，因为传输特性的非线性程度与振幅有关。当然，如果输入信号太大，则任何放大器都将消减输出信号。当出现严重的削波时，THD值就很大。

练习11.16 放大器的传输特性为

$$v_O = 100v_i + v_i^2$$

(a)当输入正弦信号为$v_i(t) = \cos(\omega t)$时，计算放大器的THD值。(b)当$v_i(t) = 5\cos(\omega t)$时，计算THD值。[提示：注意$\cos^2 x = 1/2 + (1/2)\cos(2x)$。可见，这个放大器不会产生三次及以上的更高次谐波，因此，$D_3 = 0$，$D_4 = 0$，等等。]

答案：(a) $D = 0.005$；(b) $D = 0.025$。

注意：THD值随输入幅值的增大而增大。

11.11 差分放大器

到此为止，我们分析的均为只有一个输入信号源的放大器，下面将介绍一种差分放大器，它具有两个输入信号源，如图11.35所示。一个理想差分放大器的输出电压与两个输入电压之间的差值成比例，表示如下：

$$v_O(t) = A_d[v_{i1}(t) - v_{i2}(t)] \\ = A_d v_{i1}(t) - A_d v_{i2}(t) \tag{11.20}$$

注意：当输入信号加至1端时，增益为正极性；反之，输入信号加至2端时，增益为负极性。因此，2端称为反相输入端，用“－”号表示；1端称为同相输入端，用符号“＋”表示，如图11.35所示。

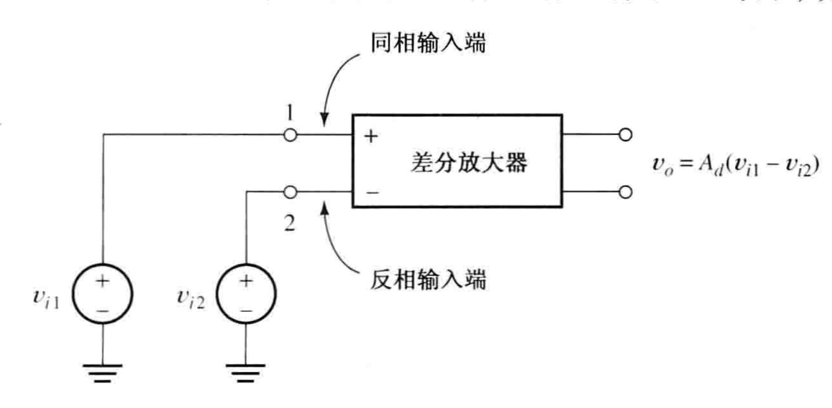


图 11.35　带两个输入信号源的差分放大器

两个不同的输入电压产生差模信号：

$$v_{id} = v_{i1} - v_{i2} \tag{11.21}$$

A_d 通常被称作差模增益。因此，理想差分放大器的输出是

$$v_O = A_d v_{id} \tag{11.22}$$

共模信号 v_{icm} 是输入的平均值：

$$v_{icm} = \frac{1}{2}(v_{i1} + v_{i2}) \tag{11.23}$$

原始输入信号 v_{i1} 和 v_{i2} 可以表示为如图11.36所示的等效信号源。可见，差分放大器的两个输入信号分别由差模信号 v_{id} 和共模信号 v_{icm} 构成。

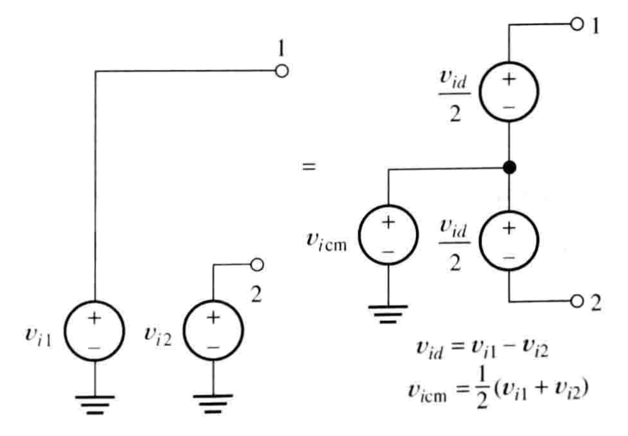


图 11.36　差模放大器的两个输入信号分别由差模信号 v_{id} 和共模信号 v_{icm} 构成

有时，我们只希望放大电压值较小的差分信号，但是电压值较大的共模信号总是令人讨厌地存在着，一个典型的例子就是记录病人的心电图信号。假设一个病人躺在床上，而且与地绝缘，如图11.37所示。如果两个电极分别连接在病人的两只手臂上，则由病人心脏跳动而产生在两电极之间的差分信号就是心电图信号。不过，我们发现在各电极和本地电源接地线之间有一个较大的60 Hz(在中国则为50 Hz)的共模信号，这是因为病人与频率60 Hz的电源线之间以及在病人身体和地线之间均存在着小的分布电容。这样，多个电容器构成了分压器，因此病人身体与地之间获得部分分压(如果你在实验室里接触具有高输入电阻的交流表或者示波器的输入端，可以观察到60 Hz共模信号的存在)。因此，在心电图放大器的输入端，存在一个大约1 mV的差模信号和一个频率为60Hz的几十伏电压的共模信号。在理想情况下，心电图应该仅对差模信号有反应。

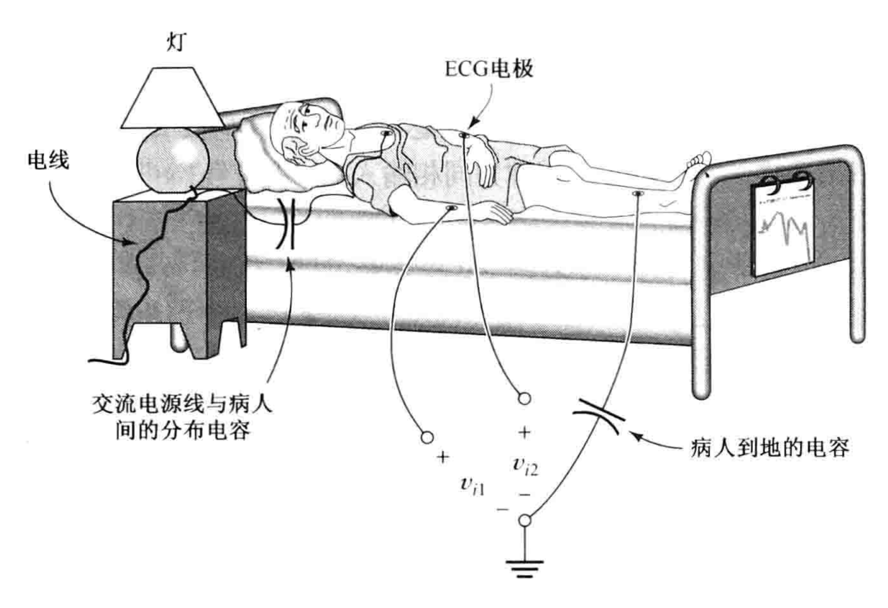


图 11.37 存在较大的 60 Hz 共模信号干扰的心电图机

在所有科学和工程领域中，传感器与电脑之间的接口应用都非常普遍，所以从电力线引起的大共模信号干扰的问题也很常见。因此，掌握共模信号的概念是非常重要的。

11.11.1 共模抑制比

遗憾的是，实际差分放大器对共模信号和差模信号都有放大。我们知道差模信号的增益是 A_d，如果用 A_{cm} 表示共模信号增益，则实际差分放大器的输出电压为

$$v_O = A_d v_{id} + A_{cm} v_{icm} \tag{11.24}$$

对于一个性能较好的差分放大器，其差模增益 A_d 应远大于共模增益 A_{cm}，量化的指标是共模抑制比(CMRR)，其定义为差模信号增益值与共模信号增益值的比值。通常，CMRR 用分贝表示为

$$\mathrm{CMRR} = 20\log\frac{|A_d|}{|A_{cm}|} \tag{11.25}$$

CMRR 通常是频率的函数，频率越高 CMRR 越低。如果在频率为 60 Hz 时，放大器的 CM-RR 值达到 120，则认为该放大器的性能较佳。

例 11.11 计算 CMRR 的最小值。

试计算心电图放大器 CMRR 值的最小值，如果该放大器的差模信号增益是 1000，差模输入信号的峰值是 1 mV，共模输入信号是峰值 100 V、频率 60 Hz 的正弦波，要求输出信号中由共模信号产生的输出电压占差模信号产生的输出电压的 1% 或者更少。

解： 既然差模输入信号的峰值是 1 mV，而差模增益是 1000，则输出电压峰值为 1 V。根据要求，共模信号输出的峰值必须是 0.01 V 或者更小。因此，共模增益为

$$A_{cm} = \frac{0.01\ \mathrm{V}}{100\ \mathrm{V}} = 10^{-4}$$

可见，共模增益值的确很小。根据式(11.25)计算 CMRR 的值：

$$\mathrm{CMRR} = 20\log\frac{|A_d|}{|A_{cm}|} = 20\log\frac{1000}{10^{-4}} = 140\ \mathrm{dB}$$

因此，心电图放大器需要非常高的 CMRR。

或许，我们可以采用另一种似乎更简单但却非常危险的方法来解决心电图机的共模信号干扰问题。例如，把连接病人的一个电极与地线相连接，从而短接了共模信号，使60 Hz 的共模干扰降到很低，同时，也就降低了放大器对共模抑制比参数的严格要求。但是，一旦病人与电源地线之间有联系，则病人只要触摸电线就会有潜在的触电危险，尤其是对于重病患者，甚至一个不易察觉的小电流如果流经病人的心脏都将是致命的，这些小电流可能通过其他医疗仪器甚至是大夫的双手而传播。因此，有必要将病人与地线之间进行隔离，从而保护病人，防止此类危险的发生。

11.11.2　CMRR 的测量

测量放大器的 CMRR 是相当直接的，我们必须找到差模和共模增益。依靠将放大器输入端连接在一起，同时接入测试电源，可得到共模增益，如图 11.38 所示。注意，当放大器输入端连接在一起时，差模信号 v_{id} 是 0，任何输出是共模信号和测试电源一起通过输入终端产生的。因此，输入和输出电压都要测量，然后计算出它们的比，得出共模增益。

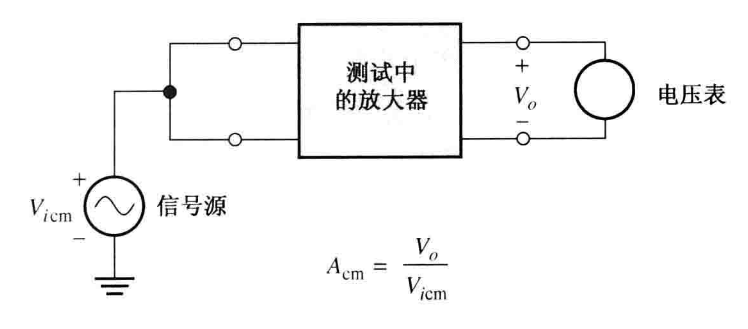


图 11.38　共模增益的测试电路

理论上，为了提供两个纯净的差模信号，必须保证这两个信号是反相的，如图 11.39(a)所示。不过，既然共模增益通常比差模增益小很多，也可以采用一个信号源输入的方式，这时结果仅有一个小偏差，如图 11.39(b)所示。

在图 11.39(b)中，输入信号包含一个差模信号 v_{id} 和一个共模信号 $v_{icm} = v_{id}/2$。不管怎样，差模增益是在共模输入电压为 0 或忽略不计时计算输出电压与输入电压的比得到的。最后，通过所测的差模和共模增益的比值得到放大器的 CMRR。

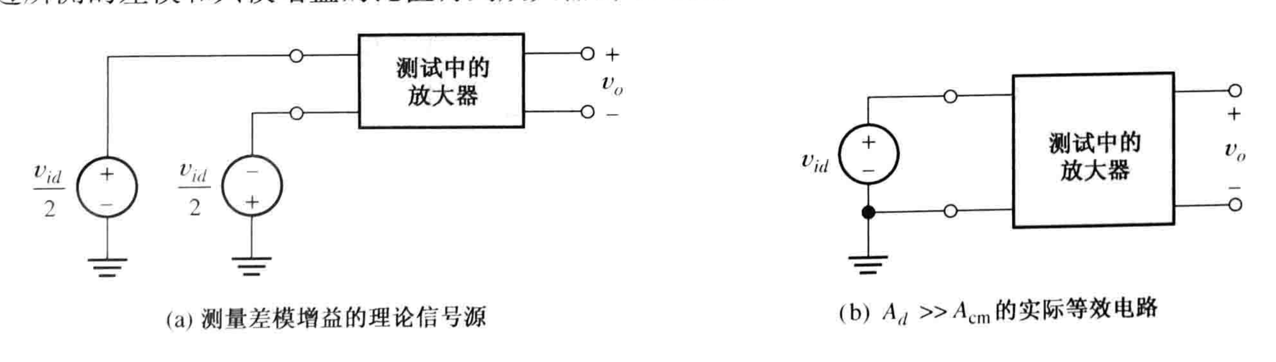


图 11.39　差模增益的测试电路

练习 11.17　放大器的差模增益 $A_d = 50\ 000$。如果把两个输入端连接在一起，并施加 1 V 的输入信号时输出信号是 0.1 V，则放大器的共模增益是多少？CMRR 是多少(均用分贝表示)？

答案： $A_{cm} = -20$ dB，CMRR = 114 dB。

练习 11.18　放大器满足如下关系：$v_o = A_1 v_{i1} - A_2 v_{i2}$。(a)假设 $v_{i1} = 1/2$，$v_{i2} = -1/2$，试计

算 v_{id} 和 v_{icm}。根据 A_1 和 A_2 计算 v_o 和 A_d。(b)假设 $v_{i1}=1$, $v_{i2}=1$，计算 v_{id} 和 v_{icm}。根据 A_1 和 A_2 计算 v_o 和 A_{cm}。(c)根据(a)与(b)的计算结果，并用 A_1 和 A_2 表示 CMRR。如果 $A_1=100$, $A_2=101$，计算 CMRR 值。

答案：(a) $v_{id}=1$, $v_{icm}=0$, $v_o=A_d=\frac{A_1}{2}+\frac{A_2}{2}$; (b) $v_{id}=0$, $v_{icm}=1$, $v_o=A_{cm}=A_1-A_2$; (c) $\text{CMRR}=20\log\frac{|A_1+A_2|}{2|A_1-A_2|}=40\ \text{dB}$。

11.12　失调电压、偏流和失调电流

迄今，我们总是假设放大器输入信号为0时输出也是0。但是，实际直接耦合放大器并非如此，即使输入信号为0，直流输出电压仍然能被观测到。这是由于放大器内部电路的各器件数值不平衡造成的，并且某些放大电路要求外部输入一些小的直流信号到放大器的输入端。这样的差分放大器可以等效为由3个电流源和一个电压源接入输入回路的形式，如图11.40所示。

两个用 I_B 表示的电流源叫作偏流源，产生小的直流电流(如图所示)流入放大器的输入端，两个偏流有相同的数值和方向(均流入放大器或者均流入地)。偏流 I_B 是温度的函数，对于给定类型的放大器，每个单元的 I_B 是不同的。

电流 I_{off} 叫作失调电流，它是因为放大器内部构成的不平衡而产生的。失调电流数值通常比偏流小。失调电流方向是不定的——它能在输入端任意流动，对于给定的放大器模型，失调电流方向可以不同。注意，图11.40所示的失调电流源数值是 $1/2I_{off}$。

电压源 V_{off} 串联在输入端电路中，叫作失调电压。同失调电流一样，它是因为电路内部的不平衡产生的。失调电压的大小通常是温度的函数。另外，从放大器单元到单元之间其数值会改变。失调电压源可以串联在输入终端的任何地方。

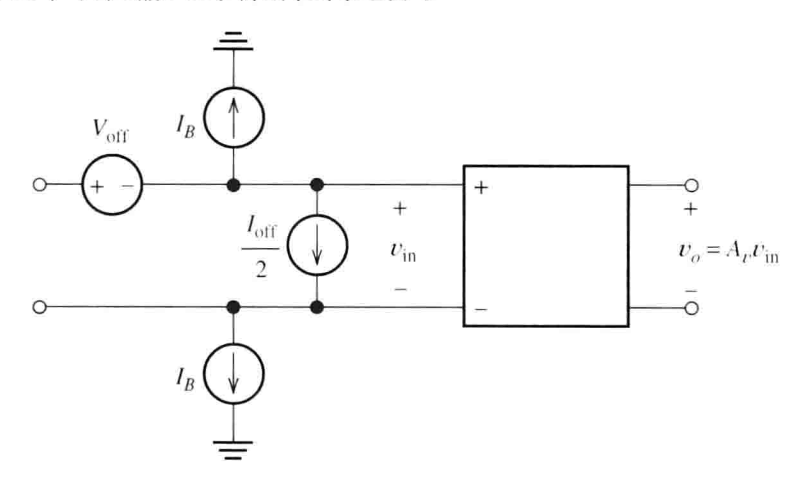


图11.40　包含(直流)电流源的差分放大器，当输入信号为0时，输出不为0

实际应用11.1　电子螺栓仪

当我们想要将一个很重的照片或架子挂在墙上时，我们经常需要立一个木桩，以承受照片或架子的重量。通常，这可以通过一个电子螺栓仪来实现。

一个简单的电子螺栓仪如图 PA11.1 和图 PA11.2 所示，可以通过使用本书讨论的一些电子工程的概念来设计。首先，正如3.3节中所讨论的，金属板之间的电容依赖金属板周围材料的介

电常数。配置图如图 PA11.1 所示，板块 A 和 B 之间的电容比 B 和 C 之间的电容小，这是因为木桩的介电常数比空气高。随着螺栓仪移动到右边，成为以螺栓为中心，电容因而相等。然后，随着螺栓仪稍微偏离中心，A 和 B 之间的电容变得更高。

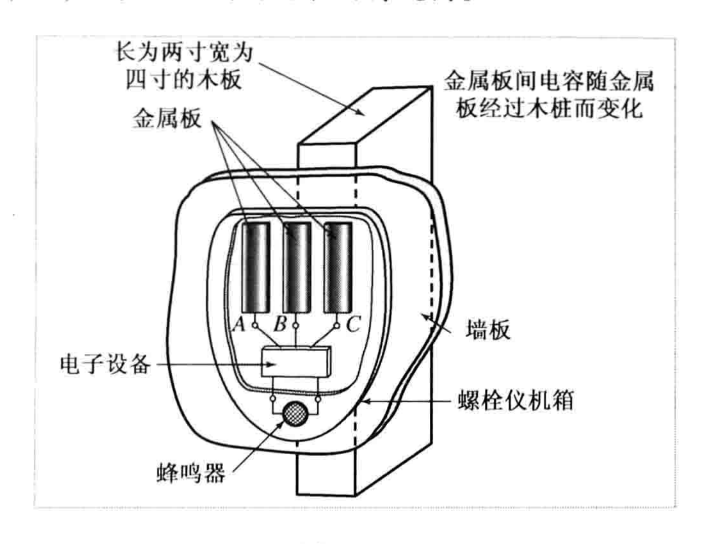


图 PA11.1

第二个应用于螺栓仪的概念是一种类似于 2.8 节所讲的惠斯通电桥的交流电桥电路。如图 PA11.2所示，电容变量连接到有两个相等电阻和一个交流源的电桥上。回想一下，当电桥平衡时，节点 A 和 C 之间的电压为零，这种情况的前提是电容相等。第三个概念是使用一个高增益微分放大器(如 11.11 节中讨论的那样)和一个蜂鸣器机(这是一个简单的扬声电桥探测器)。

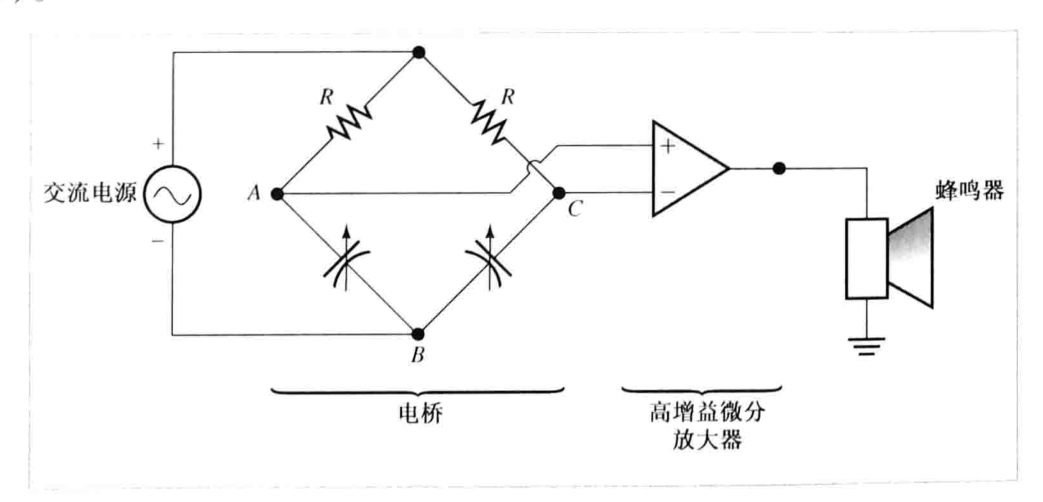


图 PA11.2

当螺栓仪位于螺栓之上但却不在中心时，电容彼此不相等，电桥也是不平衡的。然后，一个交流电压出现并作为输入施加到差分放大器，一个声音就由蜂鸣器发出。当螺栓仪居中时，电桥变得平衡，声音相应消失。因此，通过移动墙表面的螺栓仪，我们可以很容易地定位钉子的中心线。

11.12.1　降低偏流的影响

相同的戴维南电阻连接在输入终端，能降低偏流的影响(2.6 节中介绍的网络戴维南模型，使独立电源为零，然后计算出网络的阻抗。独立电压源依靠短路置零，独立电流源依靠开路置

零)。图 11.41(a)显示了有电源电阻和偏流源的差动放大器。只要有合适的电阻，每个电流源就能被转换为电压源串联电路，如图 11.41(b)所示。如果电源电阻相等，这些电压就是相等的，所以就没有差动信号供给放大器。假设共模增益是零，输出电压也将为零。

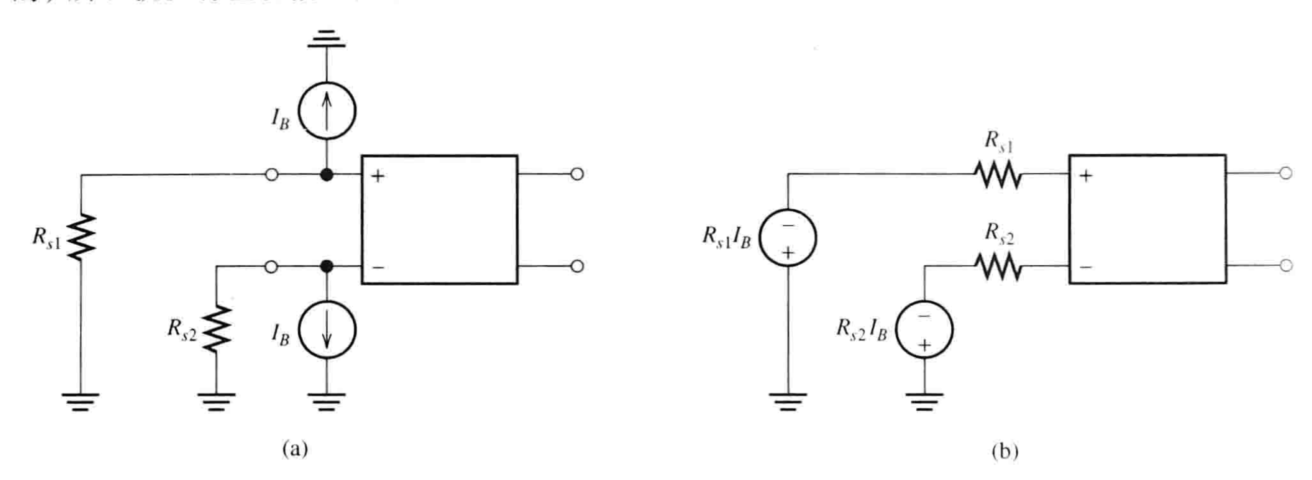


图 11.41 当 $R_{s1}=R_{s2}$时，失调电流源的作用消失

例 11.12 计算最坏的直流输出电压。

一个直接耦合差分放大器的差动电压增益为 100，输入电阻是 1 MΩ，输入偏置电流是 200 nA，最大失调电流为 80 nA，最大失调电压为 5 mV。如果放大器输入终端通过 100 kΩ 电源电阻接地，计算最坏情况下的输出电压。

解: 包括电源电阻的电路如图 11.42(a)所示，既然电路是线性的，可运用叠加原理，分别考虑每个电源。因为两个输入阻抗是相等的，因此偏置电流平衡的影响可以忽略不计。

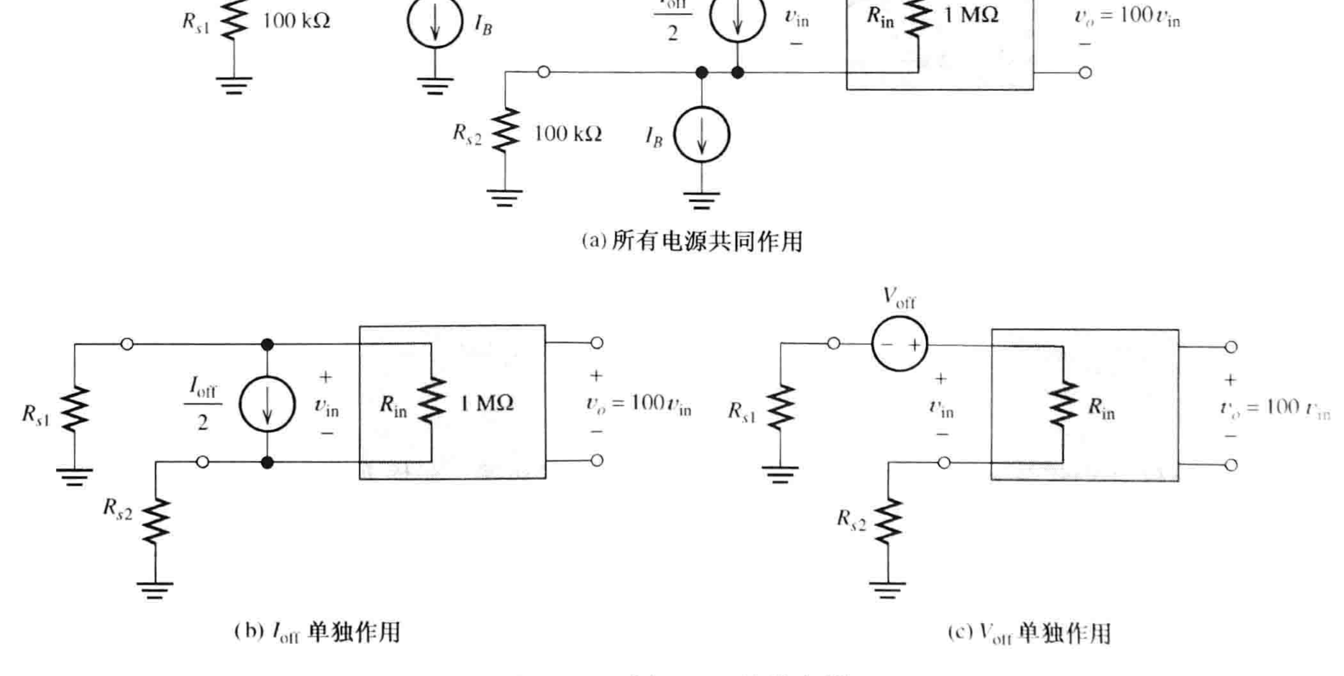


图 11.42 例 11.12 的放大器

失调电流流过电阻 R_{in} 和电源电阻，如图 11.42(b)所示。因此，来源于失调电流的差分输入电压有一个极大值：

$$V_{I\text{off}} = \frac{I_{\text{off}}}{2}\frac{R_{\text{in}}(R_{s1}+R_{s2})}{R_{\text{in}}+R_{s1}+R_{s2}} = 6.67\ \text{mV}$$

只有失调电压源的电路示于图 11.42(c)。差分输入电压起因于输入终端出现的失调电源电压和其他流过 R_{s1} 和 R_{s2} 的补偿电压。输入终端的部分可以用分压原理计算：

$$V_{V\text{off}} = V_{\text{off}}\frac{R_{\text{in}}}{R_{\text{in}}+R_{s1}+R_{s2}} = 4.17\ \text{mV}$$

再乘以放大器增益，就得到由失调电流源和失调电压源引起的最大输出电压分别为 0.667 V和 0.417 V。这些电压是极大值，有各自的极性，因此总的输入电压在 -1.084 V ~ +1.084 V 之间。

11.12.2 平衡电路

消除失调电流和电压的影响依靠如图 11.43 所示的平衡电路。在电位计两边电阻器 R_1 和 R_2 构成的各个分压器将小的电压提供到电位计的终端——一方是正，另一方是负。在使用中，电位计可以简单调整，以便于当输入信号源是零时，使放大器输出也为零。

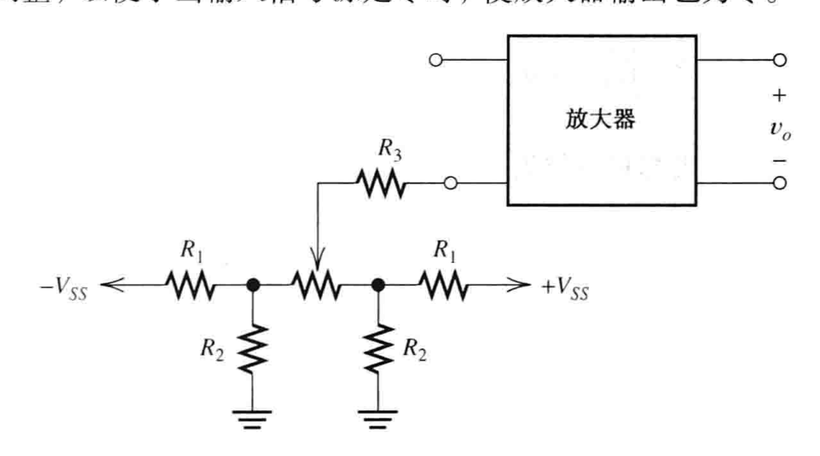


图 11.43　可抵消失调和偏置电源作用的电阻网络

虽然使用了这样一种平衡电路，但是两个输入端与地之间保持相等的电阻仍是一种好的选择，因为偏置电流随温度而改变。相等的电阻为偏置电流提供平衡，其数值上是独立的。遗憾的是，失调电流和电压随温度而改变，因此用固定电路实现所有温度下的最佳平衡是不可能的。

原则上，分压器(R_1 和 R_2)可以从图 11.43 所示电路中删除掉，电位计的末端能直接连接供电电压。但是，调整的范围比需要的大，很难实现正确的调整。

一些放大器为平衡电路提供独立的接入端，从而避免了对信号输入终端的妨害。

练习 11.19　直接耦合的差动放大器的差动电压增益为 500，输入阻抗是 100 kΩ，输入偏置电流是 400 nA，最大失调电流为 100 nA，最大失调电压为 10 mV。如果放大器输入终端通过 50 kΩ 的电阻接地，计算最坏的输出电压。

答案： v_o 范围是 -3.75 V ~ +3.75 V。

练习 11.20　如果输入终端直接接地且同相输入通过 50 kΩ 的电阻接地，重复练习 11.19 的求解。

答案： v_0 范围是 +2.5 V ~ +10.84 V。

本章小结

1. 放大器的作用是从信号源传输一个放大的可用信号到负载。
2. 根据输入阻抗、输出阻抗和增益参数来对放大器进行归类。
3. 反相放大器有负的电压增益，因此输出波形与输入波形是反相的。而同相放大器有正的电压增益。
4. 负载效应起因于在终端电源阻抗和放大器输出端阻抗之间的电压降。
5. 在级联电路中，每个放大器的输出连接下一个放大器的输入。
6. 放大器效率是输入供电功率转变为输出信号功率的比率。
7. 各种放大器模型的归类，包括电压放大器模型、电流放大器模型、跨导放大器模型和互阻放大器模型。
8. 根据输入和输出阻抗，理想放大器被分为 4 种类型：理想电压放大器，理想电流放大器，理想跨导放大器，理想互阻放大器。放大器的最佳选择取决于实际应用要求。
9. 放大器的直接耦合方式，对直流有固定的增益。另一方面，放大器的交流耦合方式，使得在低频时增益下降，直流增益为 0。当频率足够高的时候，所有的放大器的增益值均为 0。
10. 线性失真包括幅值失真和相位失真。幅值失真发生的条件是放大器对于输入信号的不同频率成分有不同的增益值；而如果放大器的相移与频率不成比例，则会发生相位失真。
11. 放大器脉冲响应具有上升时间、过冲、振荡和倾斜度等特性。
12. 如果放大器的传输特性不是直线，会产生非线性失真。在输入正弦信号时，这将导致输出信号出现谐波。放大器的总谐波畸变率反应了非线性失真的程度。
13. 理想差分放大器仅对其两个输入端信号的不同产生响应(例如差分输入信号)。
14. 对于差分放大器，共模输入是两个输入的平均值。CMRR 定义为差模信号增益值与共模信号增益值的比值，它是很多仪器仪表应用的重要参数。
15. 直接失调是放大器直流偏置电流、失调电流和失调电压共同产生的结果，可以通过采用合适的平衡电路消除其影响。

习题

11.1 节　放大器的基本概念

P11.1　说明反相放大器和同相放大器的区别。

P11.2　画出电压放大器的模型，并标明其基本组成。

P11.3　在放大器电路中，负载效应的两个原因是什么？

*P11.4　一个信号源的开路电压为 $V_s = 2$ mV，内阻为 50 kΩ，将此信号源连接至一个开路电压增益为 100、输入电阻 100 kΩ 以及输出电阻 4 Ω 的放大器。同时，放大器的输出端连接一个 4 Ω 的负载。试求解电压增益 $A_{vs} = V_o/V_s$，$A_v = V_o/V_i$，以及功率增益和电流增益。

*P11.5　一个放大器带 100 Ω 负载电阻时，具有电压增益 50 和功率增益 5000。试求解该放大器的电流增益和输入电阻。

P11.6　一个放大器的电流增益为 500，负载电阻为 100 Ω，输入电阻为 1 MΩ。试求解电压增益和功率增益。

P11.7　一个放大器的 $R_i = 1\ \text{M}\Omega$, $R_o = 1\ \text{k}\Omega$, $A_{voc} = -10^4$, 负载电阻为 1 kΩ。一个信号源的开路电压为 $v_s = 3\cos(200\pi t)\text{mV}$, 内阻为 2 MΩ。试求解输出电压和功率增益。

P11.8　一个单位开环电压增益的放大器，其输入电阻为 1 MΩ，输出电阻为 100 Ω。信号源内部电压源的有效值为 5 V，内阻为 100 kΩ。将信号源接到放大器的输入端，同时接上负载，试求解负载的电压和功率。如果将负载直接接到信号源，试求负载上的电压和功率。比较两种情况下的结果，采用单位电压放大器具有什么优点？

P11.9　一个放大器，其 $R_i = 12\ \text{k}\Omega$, $R_o = 1\ \text{k}\Omega$, $A_{voc} = -10$, 驱动 1 kΩ 的负载。将一个戴维南等效电阻 4 kΩ、短路电流 $2\cos 200\pi t$ mA 的信号源接到放大器的输入端。试求电压的函数表达式。

* P11.10　一个理想的电流源作为放大器的输入信号，这个放大器的输出电压有效值为 2 V。将 2 kΩ 的电阻与电流源并联接在放大器的输入端，输出电压有效值变为 1.5 V。试确定放大器的输入电阻。

P11.11　一个开路电压增益为 100 的放大器，接上 10 kΩ 的负载后，电压增益变为 80，试求解放大器的输出电阻。

P11.12　假设有一个 5 ~ 10 kΩ 的电阻性负载，连接到放大的负载端，我们需要负载端的电压变化小于 1%。在这种情况下，放大器哪个参数是最重要的，论参数的取值范围是多少？

P11.13　某个带电阻性负载的放大器，电流增益和电压增益相等。其输入、输出电阻是多少？

P11.14　某放大器的 $R_i = 20\ \text{k}\Omega$, $R_o = 2\ \Omega$, $A_{voc} = 1000$, 负载电阻为 8 Ω。一个信号源的内阻为 10 kΩ。试求解电压增益 $A_{vs} = V_o/V_s$, $A_v = V_o/V_i$ 的表达式，以及功率增益和电流增益。

* P11.15　如图 P11.15 所示电路，当开关闭合时，输出电压 $v_o = 100$ mV；当开关断开时，输出电压 $v_o = 50$ mV。试求解放大器的输入电阻值。

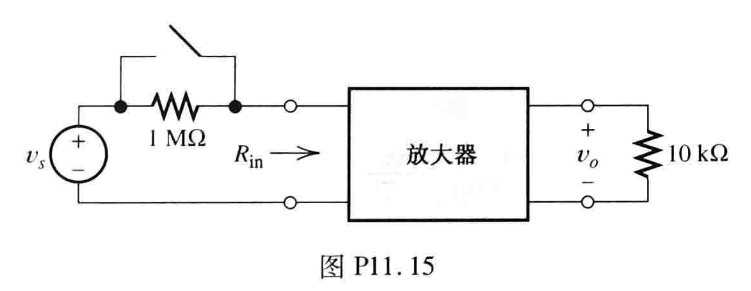


图 P11.15

P11.16　某放大器的电压增益为 0.1，但功率增益为 10，问：这可能吗？电流增益值为多大？与放大器的输入电阻相比，负载电阻值应为多少呢？

P11.17　假设有一个传感器，其戴维南等效电阻为 0 ~ 10 kΩ，将它连接到放大器的输入端。随着传感器电阻的变化，我们希望输出电压的变化小于 2%。在这种情况下，放大器哪个参数是最重要的？该参数的取值范围是多少？

11.2 节　级联放大器

P11.18　画出两个放大器的级联电路。写出以各级放大器的开路电压增益和阻抗表达的级联电路开路电压增益的表达式。

P11.19　表 P11.19 中给出了放大器 A 和 B 的特征参数，放大器级联的顺序是 A, B。要求计算级联电路的输入阻抗、输出阻抗和开路电压增益。当级联的顺序为 B, A 时，再重复计算上面的问题。

表 P11.19

放 大 器	开路输入电压增益	输 入 电 阻	输 出 电 阻
A	100	3 kΩ	400 Ω
B	500	1 MΩ	2 kΩ

*P11.20 3 个放大器 1、2、3 的特征参数如下。

放大器 1：A_{voc1} = 100，R_{i1} = 2 kΩ，R_{o1} = 1 kΩ。

放大器 2：A_{voc2} = 200，R_{i2} = 4 kΩ，R_{o2} = 2 kΩ。

放大器 3：A_{voc3} = 300，R_{i3} = 6 kΩ，R_{o3} = 3 kΩ，级联顺序是 1，2，3。要求计算级联放大器简化电路的输入阻抗、输出阻抗和开路电压增益。

P11.21 级联顺序改为 3，2，1，重做习题 P11.20。

*P11.22 放大器的特征参数 A_{voc} = 10，R_i = 2 kΩ，R_o = 2 kΩ。如果在连接 1 kΩ 负载之后，要求电压增益不小于 1000，问：至少需级联多少个此规格的放大器？

P11.23 将 3 个相同的放大器级联起来，它们的 A_{voc} = 25，R_i = 2 kΩ，R_o = 3 kΩ。试确定总的输入电阻、电压增益和输出电阻。

11.3 节 功率和效率

P11.24 如何定义功率放大器？什么是放大器的耗散功率？放大器的耗散功率是如何产生的？

*P11.25 如图 P11.25 所示电路，试计算 3 个直流电源提供给放大器的功率值。

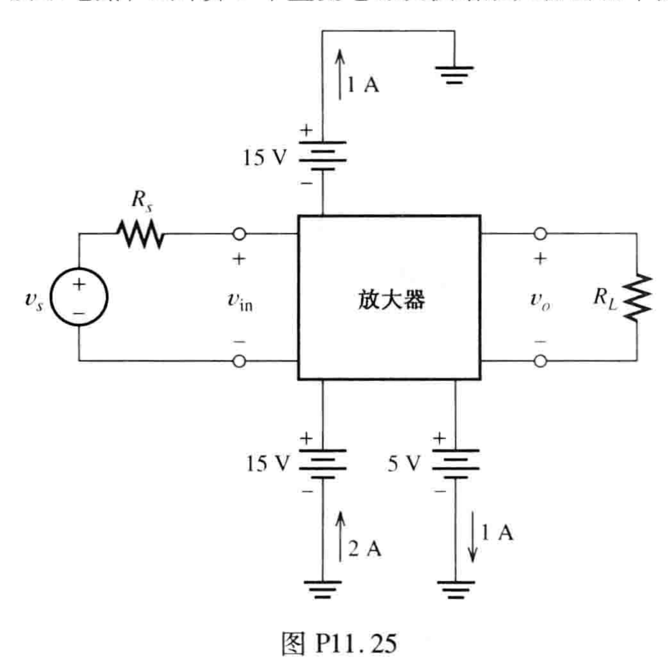


图 P11.25

P11.26 某放大器的输入电压有效值为 100 mV，输入电阻为 100 kΩ，在 8 Ω 负载上输出有效值为 10 V 的电压。电源电压为 15 V，平均电流为 2 A。试计算放大器的耗散功率和能量传输的效率。

P11.27 某放大器的工作电源电压为 12 V，平均电流为 1.5 A。输入信号的电流有效值为 1 μA，输入电阻为 100 kΩ。放大器在 10 Ω 负载上输出的电压有效值为 10 V。试计算放大器的耗散功率和能量传输的效率。

P11.28 在大信号测试条件下，音频放大器向 8 Ω 负载提供有效值为 24 V 的电压。工作电源电压为 50 V，平均电流为 4 A。输入信号的功率很小，可以忽略。试计算放大器的耗散功率和能量传输的效率。

P11.29 两个放大器级联在一起，第一级具有功率为 2 W、输入电阻为 1 MΩ、输入有效值为 2 mV 的电源，第二级具有功率为 22 W、负载电阻为 8 Ω、输出有效值为 12 V 的电源。试确定总增益、耗散功率和效率。

11.4 节 其他放大器模型

P11.30 绘制一个电压放大器的电路模型，问：增益参数应该在开路还是短路状态下进行测量？对于电流放大器模型、互阻放大器模型和跨导放大器模型，又该如何测量？

P11.31　(a)哪种放大器模型包含电流控制电压源？(b) 哪种放大器模型包含电流控制电流源？(c) 哪种放大器模型包含电压控制电流源？

*P11.32　某放大器的输入电阻为 20 Ω，输出电阻为 10 Ω，短路电流增益为 3000。信号源的内电压有效值为 100 mV，内阻 200 Ω，负载 5 Ω。试计算放大器的电流增益、电压增益和功率增益。如果工作电源电压为 12 V，平均电流为 2 A。试计算放大器的耗散功率和能量传输的效率。

*P11.33　一个放大器的特征参数 R_{moc} = 10 kΩ，R_i = 100 Ω，R_o = 12 kΩ。试求解放大器的 A_{voc} 、G_{msc} 和 A_{isc} 值。

P11.34　一个放大器的特征参数 G_{msc} = 0.5 S，R_i = 10 kΩ，R_o = 100 Ω。试求解放大器的 A_{voc} 、R_{moc} 和 A_{isc} 值。

P11.35　一个放大器的输入电阻为 100 Ω，输出电阻为 10 Ω，短路电流增益为 500。画出该放大器的电压放大器模型、互阻放大器模型和跨导放大器模型，并标明所有参数。

P11.36　一个短路电流增益为 10 的放大器，其负载为 50 Ω，电流增益为 8。试求出输出电阻。

P11.37　一个放大器的特征参数 A_{ics} = 200，R_i = 2 kΩ，R_o = 300 Ω。试求解放大器的 A_{voc} 、R_{moc} 和 G_{msc} 的值。

*P11.38　放大器 A 的输入电阻为 1 MΩ，输出电阻为 200 Ω，开路互阻增益为 100 MΩ。放大器 B 的输入电阻为 50 Ω，输出电阻为 500 kΩ，短路电流增益为 100。求出 B 级联在 A 之后的电压放大器模型，并确定相应的跨导放大器模型。

P11.39　把级联顺序改为 B，A，重做习题 P11.38。

*P11.40　一个放大器的输入电阻为 1 kΩ，输出电阻为 200 Ω，短路跨导增益为 0.5 S。试确定开路电压增益、短路电流增益和开路互阻增益。

*P11.41　一个放大器的输入电阻为 10 kΩ，输出电阻为 2 kΩ，开路互阻增益为 200 kΩ。试确定开路电压增益、短路电流增益和短路跨导增益。

P11.42　一个放大器的开路电压增益为 100，短路跨导增益为 0.2 S，短路电流增益为 50。试确定输入电阻、输出电阻和开路互阻增益。

P11.43　一个放大器的开路互阻增益为 200 Ω，短路跨导增益为 0.5 S，短路电流增益为 50。试确定输入电阻、输出电阻和开路电压增益。

P11.44　一个放大器的参数为 R_i = 2 kΩ，R_o = 500 Ω，$R_{moc} = -10^7$ Ω，接 1 kΩ 的负载。输入信号源的戴维南电阻为 1 kΩ，开路电压为 $2\cos(200\pi t)$ mV。试确定输出电压的表达式。

11.5 节　放大器阻抗在不同应用中的重要性

P11.45　介绍一个需要放大器具有高输入阻抗应用的例子。

P11.46　给出一个需要放大器具有低输入阻抗的实例。

P11.47　如果需要放大器向一组并联负载(并联的数量是变化的)输出恒定的信号，这时输出阻抗值应该是多少？为什么？如果负载是串联连接的，输出阻抗值又该是多少？

P11.48　假设一个电压源 $v(t) = V_{dc} + V_m\cos(\omega t)$ 连接到一个放大器的输入端，而负载是非线性器件，例如发光二极管(LED)。(a)如果要求负载电流正比于电压源 $v(t)$，则放大器的输出阻抗应该如何取值？(b)如果要求负载电压正比于电压源 $v(t)$，则放大器的输出阻抗又该如何取值？

P11.49　给出一个需要特定输入阻抗放大器的实例。

11.6 节　理想放大器

P11.50　分别给出理想电压和理想电流放大器的输入和输出阻抗。

P11.51　一个理想跨导放大器的短路跨导增益为 0.1 S，放大器的外部连接图如图 P11.51 所示。试计算从输入端看进去的电阻 $R_x = v_x/i_x$。

*P11.52　假设跨导放大器的输入阻抗为 1000 Ω，输出阻抗为 20 Ω，开路互阻增益为 10 kΩ。试计算从输入端看进去的电阻 $R_x = v_x/i_x$。

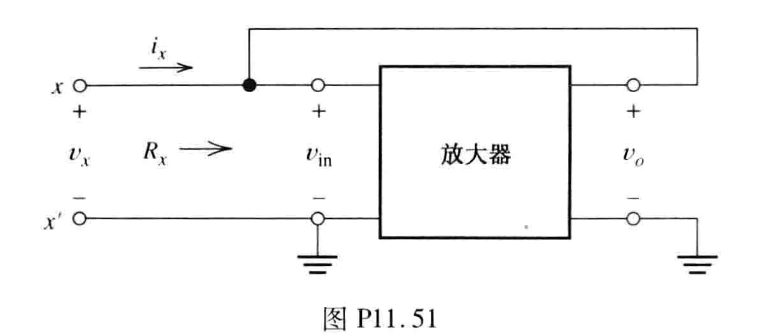


图 P11.51

P11.53 某放大器的输入阻抗为 1 Ω，输出阻抗为 1 Ω，开路电压增益为 10。问：该放大器属于哪一类放大器等效模型？并求解各增益值。提示：在确定放大器的类型时，建议视信号源电阻和负载电阻值的数量级为 1 kΩ。

P11.54 某放大器的输入阻抗为 1 MΩ，输出阻抗为 1 MΩ，开路电压增益为 100。问：该放大器属于哪一类放大器等效模型？求各增益值。

*P11.55 在进行一个物理实验时，我们需要记录一个特定的传感器的开路电压。电压需要放大 1000 倍并应用到一个变化的负载电阻上。问需要什么类型的理想放大器？给出求证过程。

*P11.56 一个理想的互阻放大器的输出端连接到另一个理想的跨导放大器的输入端。问需要什么类型的理想放大器？分阶段确定其增益参数。

P11.57 在记录汽车排放时，我们需要测得一种化学传感器的短路电流，该传感器有一个变化的戴维南阻抗。对该数据采集模块必须输入一个与此电流成正比的电压。问需要什么类型的理想放大器？证明你的回答。

P11.58 如果我们要测得传感器的短路电流并对一个可变负荷驱动一个成比例的电流，问需要什么类型的理想放大器？解释你的回答。

P11.59 一个理想的电压放大器的输出端连接到理想的跨导放大器的输入端。它是什么类型的理想放大器？分阶段确定其增益参数。

*P11.60 假设有一个两级的级联放大器，其中一个理想的跨导放大器作为第一级，另一个理想的互阻放大器为第二阶段。这是什么类型的放大器？增益参数是多少？按相反的顺序将其级联，重复上述问题。

P11.61 在一个应用中，需要用放大器测得电源的开路电压，并使电流流过一个负载。源电阻和负载电阻可变。负载电流与源电阻和负载电阻无关。需要什么类型的理想放大器？如果源电阻从 1 kΩ 增加到 2 kΩ 所导致负载电流减少了 1%，输入电阻为多少？如果负载电阻从 100 Ω 增加到 300 Ω，这将导致负载电流减少 1%，输出电阻的值为多少？

P11.62 我们需要设计一个放大器以记录电化学电池随时间变化的短路电流。(为了实现这个目的，短路回路的电阻必须小于 10 Ω。)每施加 1 V 的电压，放大器的输出就使纸带记录器弯曲 ±1 cm (误差为 1%)。记录器的输入电阻未知，可能是变量，但是它大于 10 kΩ。每毫安纸带弯曲 1 cm，要求有 ±3% 的精度。这个应用需要什么类型的理想放大器？做出你的最佳判断，计算放大器的输入阻抗、输出阻抗和增益参数。

P11.63 在电力配电系统中，电压记录系统需要一个放大器。放置在地上的探测器之间的电压波形通过模数转换器(ADC)作为笔记本电脑的输入。在干沙中探头的内阻可以高达 10 kΩ，在淤泥中可低至 10 Ω。因为工程中模数转换器有几种不同型号，其放大器的负载阻抗范围为 10 kΩ ~1 MΩ。理论上，模数转换器的电压是探测器开路电压的 1000 倍，误差为 ±3%。什么类型的理想放大器最适合这个应用？做出你的最佳判断？确定阻抗值和放大器的增益参数。

P11.64 如果使用一个低于 100 Ω 的未知阻抗的纸带记录器取代模数转换器，重复习题 P11.63 的问题。每施加 1 mA 的电流，纸带记录器就弯曲 ±1 cm(误差为 1%)。设计一个记录器，使探测器电压每增加 0.1 V，记录器就弯曲 1 cm。

11.7 节　频率响应

P11.65　画出典型直流耦合放大器增益大小随频率变化的曲线。对一个交流耦合放大器做同样的工作。

P11.66　宽频放大器和窄频放大器有什么不同？

*P11.67　一个放大器的输入为

$$v_{\text{in}}(t) = 0.1\cos(2000\pi t) + 0.2\cos(4000\pi t + 30°)$$

相应的输出电压为

$$v_O(t) = 10\cos(2000\pi t - 20°) + 15\cos(4000\pi t + 20°)$$

确定 $f = 1000$ Hz 和 $f = 2000$ Hz 时的复合增益。

*P11.68　分析习题 11.62 中的放大器，这个放大器是直流耦合还是交流耦合？给出解释。

P11.69　输出信号由一个有 2 V 直流电压和一个有效值为 10 mV 的交流音频信号的驻极体麦克风产生。交流音频信号的频率范围从 20 Hz 到 10 kHz。我们需要将音频信号的有效值放大到 10 V，然后应用在一个扬声器中。该放大器是交流耦合还是直流耦合？给出解释。中频电压增益是必要的吗？半功率的频率的值是多少？

*P11.70　放大器的增益如下：

$$A = \frac{1000}{[1 + \mathrm{j}(f/f_B)]^2}$$

以 f_B 的形式确定半功率的频率上限。

P11.71　如图 P11.71 所示，A 区域是一个理想的跨导放大器，B 区域是一个理想的电压放大器。电容一开始没有充电。(a)以放大器增益的形式推导当 $t \geq 0$ 时 $v_o(t)$ 的表达式。(b)以频率的函数推导整个系统的电压增益。(提示：假设 $v_{\text{in}}(t) = V_m\cos(2\pi ft)$，确定 $v_o(t)$ 的表达式，然后以输入和输出相量比值的形式确定复数电压增益。)(c)给定 $G_{msc} = 10^{-6}$S，$A_{voc} = 200\pi$，$C = 1$ μF，画出从 1 Hz 到 1 kHz 范围内电压增益的大小和相位的伯德图。

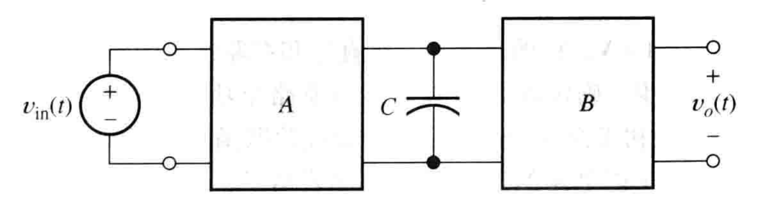


图 P11.71

P11.72　考查图 P11.72，A 区域是一个理想的电压放大器，B 区域是一个理想的互阻放大器。(a)推导以放大器增益、$v_{\text{in}}(t)$ 和电容 C 表达的 $v_o(t)$ 表达式。(b)以频率函数的形式推导电压增益的表达式。(提示：假设 $v_{\text{in}}(t) = V_m\cos(2\pi ft)$，确定 $v_o(t)$ 的表达式，然后以输入和输出相量比值的形式确定复数电压增益。)(c)给定 $R_{moc} = 10^3$ Ω，$A_{voc} = 50$，$C = 1$ μF，画出从 1 Hz 到 1 kHz 范围内电压增益的大小和相位的伯德图。

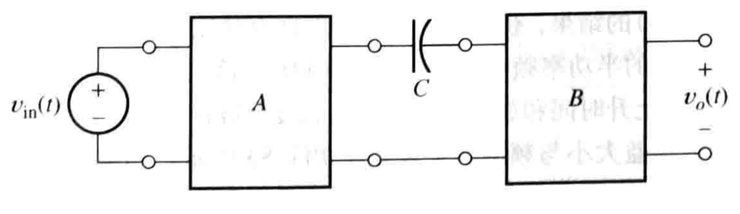


图 P11.72

11.8节 线性波形失真

P11.73 为了不发生线性失真，放大器增益的大小和相位该如何确定？

P11.74 一个放大器的输入信号是 $v_i(t)=0.01\cos(2000\pi t)+0.02\cos(4000\pi t)$。这个放大器以频率函数表达的增益为

$$A=\frac{100}{1+\mathrm{j}(f/1000)}$$

推导放大器输出信号以时间函数表示的表达式。

* P11.75 一个放大器的输入信号是 $v_{in}(t)=0.01\cos(2000\pi t)+0.02\cos(4000\pi t)$。这个放大器在1000 Hz时的复数增益是 $100\angle -45°$。为了在2000 Hz时获得无失真增益，复数增益应该为多少？绘出或编写一个计算机程序来画出输入和输出随时间变化的波形。

P11.76 用于创建特效音频信号的放大器的输出为 $v_0(t)=v_{in}(t)+Kv_{in}(t-t_d)$，这里 K 和 t_d 是常量。(a)这是一个线性放大器吗？请解释。(b)以频率函数的形式确定复数电压增益。(提示：假设 $v_{in}(t)=V_m\cos(2\pi ft)$，确定 $v_o(t)$ 的表达式，然后以输入和输出相量比值的形式确定复数电压增益。)(c)给定 $K=0.5$ 和 $t_d=1$ ms，用计算机绘制增益大小和相位随频率变化的曲线，其中 $0\leqslant f\leqslant 10$ kHz。(d)该放大器是否产生振幅失真？是否产生相位失真？请解释。

P11.77 $v_0(t)=v_{in}(t)+Kdv_{in}/dt$，重复习题P11.76的问题。对于(c)，$K=1/(2000\pi)$。

P11.78 某些放大器的输入－输出关系为 $v_0(t)=Kv_{in}(t-t_d)$。(a)这是一个线性放大器吗？请解释。(b)以频率函数的形式确定复数电压增益(提示：假设 $v_{in}(t)=V_m\cos(2\pi ft)$，确定 $v_o(t)$ 的表达式，然后以输入和输出相量比值的形式确定复数电压增益。)(c)给定 $K=100$ 和 $t_d=0.1$ m，绘制增益大小和相位随频率变化的曲线，其中 $0\leqslant f\leqslant 10$ kHz。(d)该放大器是否产生振幅失真？是否产生相位失真？请解释。

11.9节 脉冲响应

P11.79 画出一个放大器的脉冲响应，标出上升时间、过冲、振荡和倾斜度。给出一个宽带放大器上升时间和半功率频率上限的近似关系。给出一个倾斜度百分比和半功率下限频率的近似关系。

P11.80 考查一个简单的低通滤波器，如图P11.80所示。(a)求出频率的函数复数增益 $A=\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$ 的表达式。在直流和在非常高的频率时 A 的值为多少？确定以 R 和 C 表达的电路半功率带宽。(b)考虑电容器最初未充电，$v_1(t)$ 是一个单位阶跃函数时，求 $v_2(t)$ 和上升时间 t_r 以电路的 R 和 C 表示的表达式。(c)合并(a)和(b)的结果，获得这个电路带宽和上升时间的关系，并把结果与方程(11.11)进行比较。

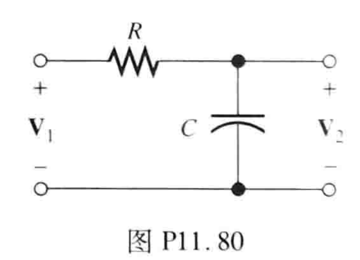


图 P11.80

P11.81 考查如图P11.81(a)所示的简单高通滤波器。

(a) 求出频率的函数复数增益 $A=\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$ 表达式。

(b)该直流增益为多大？在非常高的频率时增益又为多大？以 R 和 C 的形式表示半功率频率。

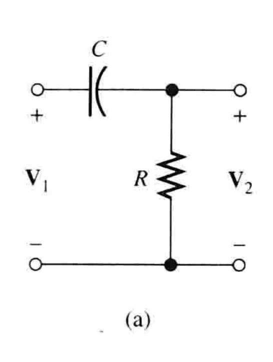
(c)考查如图P11.81(b)所示的输入脉冲。假设电容器未充电，确定输出电压 $v_2(t)$ 在 t 位于0和 T 之间的表达式。假设 RC 远大于 T，找到一个百分比倾斜度的近似表达式。

(d)合并(a)和(b)的结果，获得这个电路倾斜度百分比和半功率频率的关系。

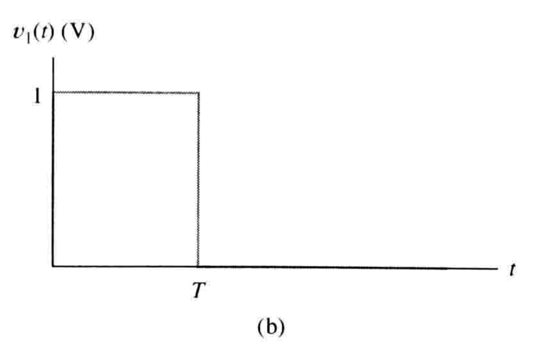
* P11.82 一个音频放大器的半功率频率为15 Hz～15 kHz。该放大器被用来放大了如图P11.81(b)所示的脉冲。估算上升时间和放大器输出的倾斜度。脉冲宽度 T 是2 ms。

* P11.83 几个放大器的增益大小与频率的关系如图P11.83所示。如果放大器的输入为图中所示的脉冲，画出每个放大器增益大小随时间变化的关系。在波形图中定量地说明尽可能多的特征。

P11.84 几个放大器的输入信号和相应的输出信号如图P11.84所示。画出每个放大器增益大小随频率变化的关系。在画出的增益图上尽可能多地进行定量估计。

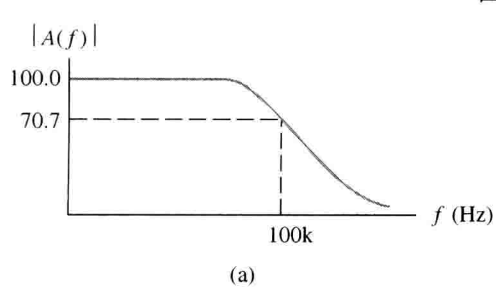


(a)

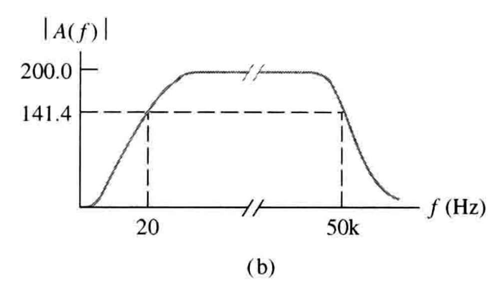


(b)

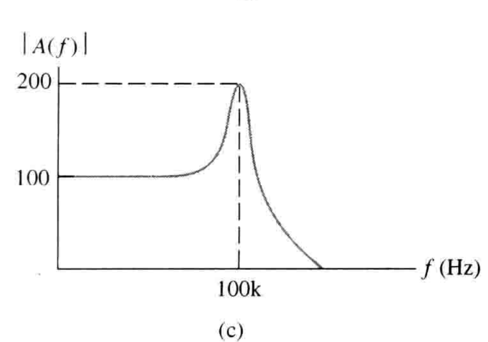
图 P11.81



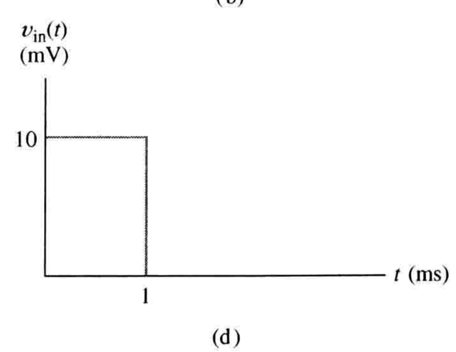
(a)



(b)

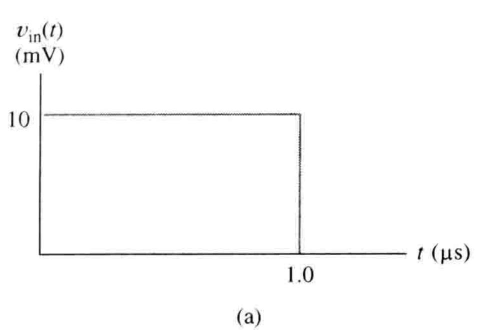


(c)

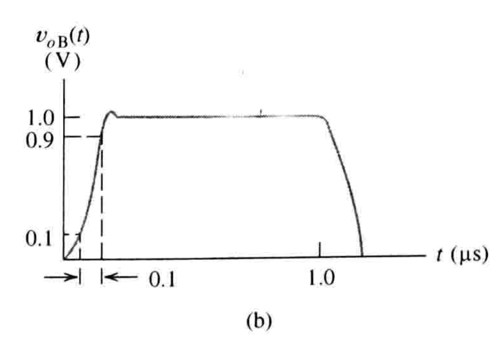


(d)

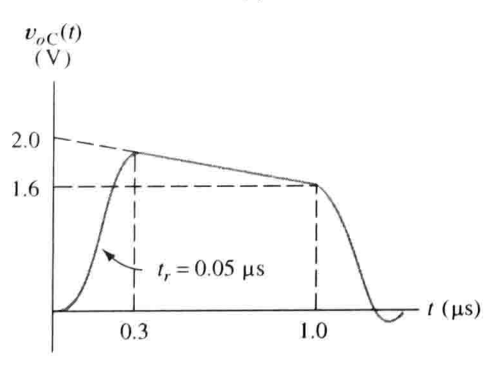
图 P11.83



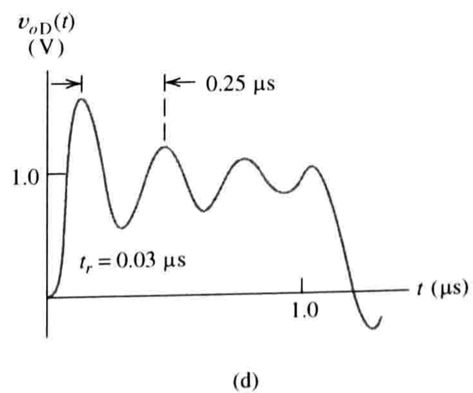
(a)



(b)



(c)



(d)

图 P11.84

11.10 节　传输特性和非线性失真

P11.85　什么是谐波失真？它是由什么造成的？

* P11.86　一个放大器的输入为

$$v_{in}(t) = 0.1\cos(2000\pi t)$$

相应的输出为

$$v_O(t) = 10\cos(2000\pi t) + 0.2\cos(4000\pi t) + 0.1\cos(6000\pi t)$$

确定畸变因素 D_2、D_3 和 D_4。同时，确定谐波失真占总额的比例。

P11.87　一个放大器传输特性的描述方程为

$$v_O(t) = 10v_{in}(t)+0.6v_{in}^2(t)+0.4v_{in}^3(t)$$

对于输入 $v_{in}(t)=2\cos(200\pi t)$，确定畸变因素 D_2、D_3 和 D_4。同时，计算总谐波失真。你可能会发现以下三角关系有用：

$$\cos^2(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2A)$$

$$\cos^3(A) = \frac{3}{4}\cos(A) + \frac{1}{4}\cos(3A)$$

P11.88　放大器的传输特性由以下方程描述：

$$v_O(t) = v_{in}(t) + 0.1v_{in}^2(t)$$

对于输入 $v_{in}(t)=\cos(\omega_1 t)+\cos(\omega_2 t)$，确定每个输出部分的频率与振幅。你可能会发现以下三角关系有用：

$$\cos^2(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2A)$$

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\cos(A-B) + \frac{1}{2}\cos(A+B)$$

11.11 节　差分放大器

P11.89　什么是差分放大器？定义差分输入电压和共模输入电压。给出一个由差分和共模输入形式表示的输出表达式。

P11.90　定义差分放大器的共模抑制比。

P11.91　用你自己的语言，分别描述一个对小的差分信号和大的共模信号感兴趣的情况。

P11.92　输入信号 v_{i1} 和 v_{i2} 如图 P11.92 所示，它们是一个增益 A_d = 10 的差分放大器的输入(假设共模增益是零)。画出放大器输出随时间变化的关系。画出共模输入随时间变化的关系。

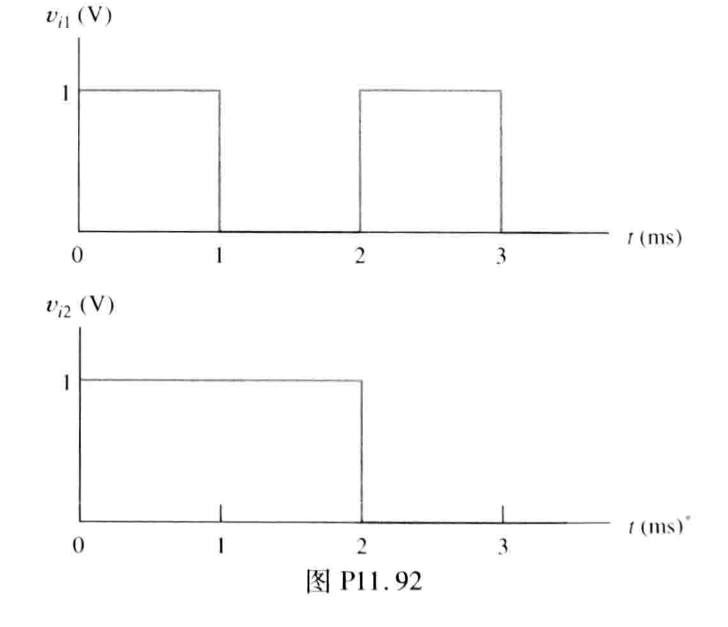


图 P11.92

* P11.93 某放大器的差分增益为 500。如果两个输入终端连接在一起，并施加一个有效值为 10 mV 的输入信号，输出信号有效值是 20 mV。算出这个放大器的共模抑制比。

P11.94 在一个仪表放大器中，输入信号有效值由一个 20 mV 的差分信号和一个有效值为 5 V、频率为 60 Hz的共模信号组成。期望共模输出分量至少比差模输出分量低 60 分贝，该放大器的共模抑制比最低为多少分贝？

P11.95 某仪器放大器的输入、输出关系为 $v_o(t) = 1000\ v_{i1}(t) - 1001\ v_{i2}(t)$。确定这种放大器的共模抑制比，单位为分贝。

11.12 节 失调电压、偏流和偏移电流

P11.96 绘制差分放大器符号，标出偏移电压、偏置电流和偏移电流。它们对放大器输出信号有什么影响？

P11.97 画出差分放大器平衡电路的电路图。

* P11.98 一个差分放大器差分增益为 500，共模增益可忽略。输入端与地面通过精度为 ±5% 的 1 kΩ 电阻相连接。由 100 nA 偏置电流引起的输出电压极值为多少？如果电阻相等，输出电压为多少？

* P11.99 一个差分放大器有 100 nA 的偏置电流，最大偏移电流为 20 nA，最大偏移电压 2 mV，输入电阻为 1 MΩ，差分增益为 1000。输入端与地面通过 100 kΩ 的电阻相连接。如果共模增益假定为零，确定输出电压的极值。

P11.100 重复习题 P11.99 的问题，如果放大器的共模抑制比为 60 dB。在这种情况下，输出电压极值与零共模增益时的值的百分比为多少？

P11.101 一个差分放大器，包括了直流缺陷的电源模型，3 种不同试验条件如图 P11.101 所示。放大器的差分电压增益为 100，共模电压增益为零，输入阻抗为无限大。确定 V_{off}、I_B和 I_{off}的值。

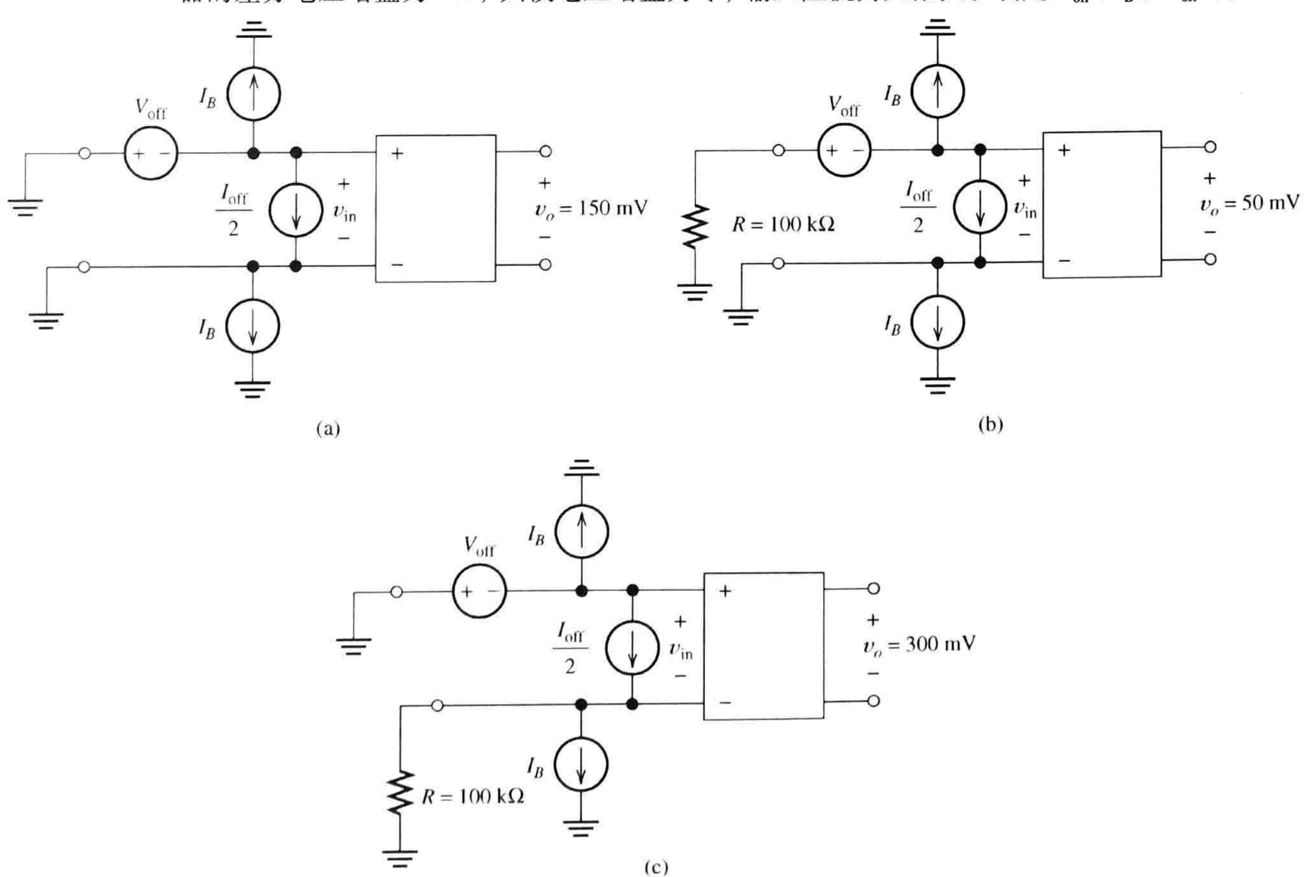


图 P11.101

测试题

这里有一组测试题，可以帮助你检查是否对本章重点内容有了很好的理解。答案在附录 E 中，而完整的解决方法在学生资源中。关于学生资源，更多信息可以参阅附录 F。

T11.1 假设有两个相同的放大器，均有 $A_{voc}=50$、$R_i=60\ \Omega$ 和 $R_o=40\ \Omega$，将它们进行级联。确定开路电压增益、级联的输入电阻和输出电阻。

T11.2 列出 4 种类型的理想放大器的增益参数、输入阻抗和输出阻抗。

T11.3 假设有一个内部阻抗和负载阻抗均为变量的传感器。在下列情况下，我们分别需要什么类型的理想放大器？(a)负载电流与电源的戴维南电压成正比；(b)负载电流与电源短路电流成正比；(c)负载电压与电源开路电压成正比；(d)负载电压与电源短路电流成正比。

T11.4 假设有一个放大器，$R_i=200\ \Omega$，$R_o=1\ \mathrm{k}\Omega$，$A_{isc}=50$。确定放大器的 A_{voc}、R_{moc} 和 G_{msc} 的值(包括单位)。然后画出放大器的 4 个模型，并标出每个参数的值。

T11.5 有一个放大器从 15 V 的直流电源获取 2 A 的电流。输入信号电流有效值是 1 mA，输入电阻是 2 kΩ。放大器为 8 Ω 的负载提供有效值为 12 V 的电压。确定放大器的耗散功率和放大器的效率。

T11.6 假设一个放大器输入信号电压峰值为 100 mV，并包含频率为 1 ~ 10 kHz 的信号成分。我们想要使输出电压波形与输入波形近似相同[大小(比例为 100 倍)和延迟时间除外]。基于这个信息，应该如何设置放大器？

T11.7 在信号被放大时，什么是偏移电流、偏置电流和电压的偏移量的基本效应？

T11.8 什么是谐波失真？引起它的原因是什么？

T11.9 共模抑制比是什么？它在什么类型的应用中很重要？

第 12 章　场效应晶体管

本章学习目标

- 理解 MOSFET(金属氧化物半导体场效应晶体管)的基本原理
- 利用负载线法分析基本 FET(场效应管)放大器
- 分析偏置电路
- 利用小信号等效电路分析 FET 放大器
- 几种 FET 性能参数的计算
- 根据特定的应用要求选择合适的 FET 放大电路
- 理解 CMOS(互补金属氧化物半导体)逻辑门电路

本章介绍

场效应晶体管(Field-Effect Transistor, FET)是一种重要的元件，它广泛应用于放大器和逻辑门电路中。本章主要讨论增强型金属氧化物半导体场效应晶体管(Metal-Oxide-Semiconductor Field-Effect Transistor, MOSFET)，它是近几十年数字电子技术快速发展的主要元件之一。FET 还有其他几种类型，但本书仅详细讨论增强型 MOSFET，而不再涉及其他 FET。

下一章将讨论双极结型晶体管(BJT)，它也应用于放大器和逻辑门电路中。与 BJT 相比，MOSFET 具有体积小、制作简单等优点，因此 MOSFET 常用于制作存储器和微处理器这类复杂的数字电路。不过，BJT 能提供较大的电流而被广泛应用于快速开断容性负载，例如连接数字芯片的电路板。可见，每种元件都因其独特的优点而有不同的应用。

12.1　NMOS 和 PMOS 晶体管

12.1.1　简介

n 沟道增强型 MOSFET(即 NMOS 管)的结构如图 12.1 所示，是在纯净硅晶片的不同部位通过掺入杂质的方式分别构成 p 型和 n 型材料而成。n 型材料主要依靠负极性自由电子来导电，而 p 型材料则通过带正极性的空穴来导电。

NMOS 晶体管的 4 个引出端分别为栅极(gate G)、漏极(drain D)、源极(source S)和衬底(body B)(通常也称作基底)。通常情况下，极小的负电流流过衬底引出端，将衬底与源极相连便可作为三端元件使用。栅极通过一层较薄的二氧化硅与衬底绝缘，因此流过栅极的电流极小，可以忽略。当栅极与源极之间的电压足够大时，电子被吸引到栅极的附近区域，此时，在栅极与源极之间形成 n 沟道；同时，若在漏极与源极之间施加适当的电压，就能使电流从漏极流入，穿过 n 沟道从源极流出，即漏极流过的电流由栅极上施加的电压决定。

虽然 MOS 指金属氧化物半导体，但是目前 MOSFET 的栅极是由多晶硅组成的。

沟道的长度(L)和宽度(W)如图 12.1 所示。为了在给定区域内放置更多的场效应管，人们在过去 40 年中一直致力于减小沟道的长度和宽度。1971 年 Intel 公司发明了第一个微处理器 4004，它在 10 μm 的尺寸中包含了 2300 个场效应管。而到 2009 年，微处理芯片的沟道长度仅有 32 nm，

氧化层厚度仅为 nm 数量级，却包含了超过 10 亿个场效应管。这一非凡的技术革命对计算机和其他电子产品性能的显著提高起着重要的促进作用，并且这种趋势在未来几十年中仍会继续发展。

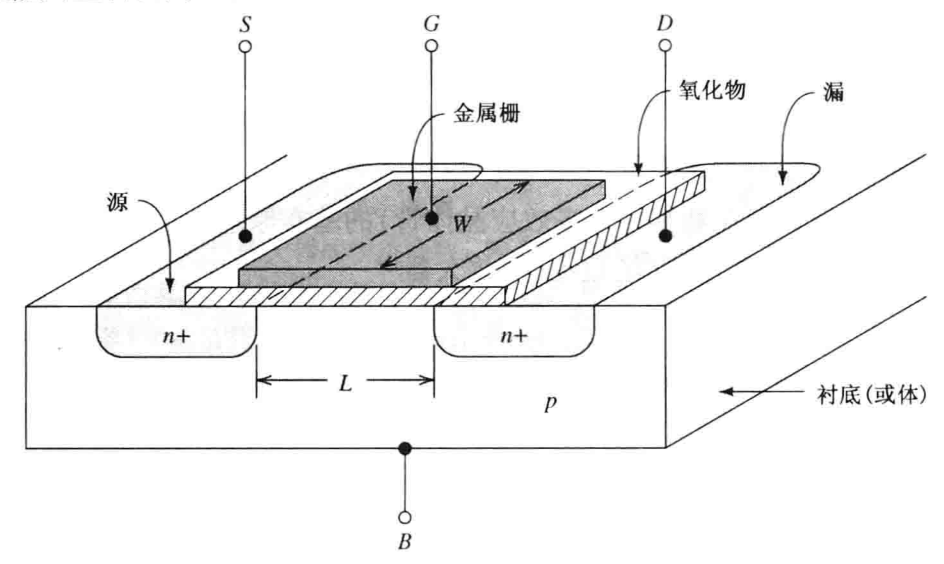


图 12.1　n 沟道增强型 MOSFET 结构图(L:沟道长度；W:宽度)

除了沟道的长度(L)和宽度(W)，元件的性能还由半导体掺杂浓度以及氧化层厚度等参数决定。通常情况下工艺参数已预先确定，但是电路设计者可以调整沟道的长度(L)和宽度(W)来获得满足特定要求的元件。

n 沟道增强型 MOSFET 的电路符号如图 12.2 所示，下面将讨论其基本原理。

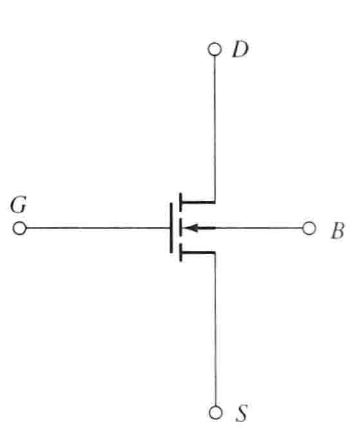


图 12.2　n 沟道增强型 MOSFET的电路符号

12.1.2　工作特性

1. 截止区的工作特性

分析如图 12.3 所示电路的工作原理。假设 v_{DS} 为漏极与源极间的电压，并且假定栅极与源极间的电压 v_{GS} 初始值为 0。实际上，漏极与衬底以及源极与衬底交界处分别形成了一个反向串联的 pn 结(例如二极管)。在正向偏置电压下(p 端为正极)，自由电子容易流过其中一个 pn 结；但是另一个 pn 结处于反偏状态，将没有电流流过 pn 结。因此，在电压 v_{DS} 作用下，漏极与衬底之间的 pn 结处于反向偏置，漏极中没有电流流动。这个区域称为截止区(cutoff region)。即使电压 v_{GS} 增大，元件仍然保持截止，直到 v_{GS} 达到阈值电压 V_{to} (threshold voltage)。通常，阈值电压 V_{to} 的取值范围在零点几伏到 1 V 之间。因此，在截止区有如下特性：

$$i_D = 0,\quad v_{GS} \leqslant V_{to} \tag{12.1}$$

2. 三角(可变电阻)区的工作特性

当 $v_{DS} < v_{GS} - V_{to}$ 且 $v_{GS} \geqslant V_{to}$ 时，则称 NMOS 工作在三角(可变电阻)区。分析如图 12.4 所示电路的工作原理如下：此时，v_{GS} 远远大于阈值电压 V_{to}。由给定的栅极电压产生的电场将吸引电子，并驱赶栅极附近区域的带正电的空穴，使电流容易通过源极(S)和衬底(B)间的 pn 结。于是，在漏极与源极间产生了 n 型沟道。随着 v_{DS} 的增大，电流从漏极流入，穿过沟道从源极流出。当 v_{DS} 较小时，漏极电流与 V_{DS} 成正比。而且对于给定的(较小值的) v_{DS}，漏极电流与栅源电压超过阈值的部分电压($v_{GS} - V_{to}$)成正比。

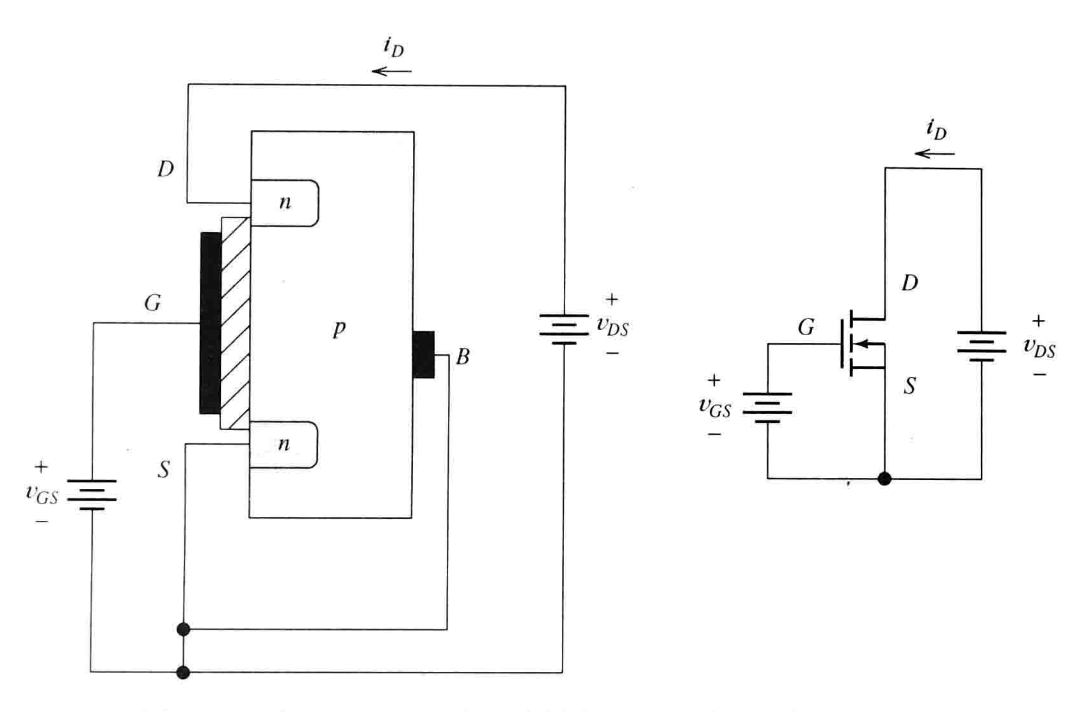


图 12.3　当 $v_{DS} \leqslant V_{to}$ 时，漏极与衬底间的 pn 结反向偏置，$i_D = 0$

对于不同的栅极电压，漏极电流 i_D 与 v_{DS} 的关系如图 12.4 所示。在三角区，NMOS 可近似为一个连接在漏极与源极间的电阻，然而电阻值随着电压 v_{GS} 的增大而减小。

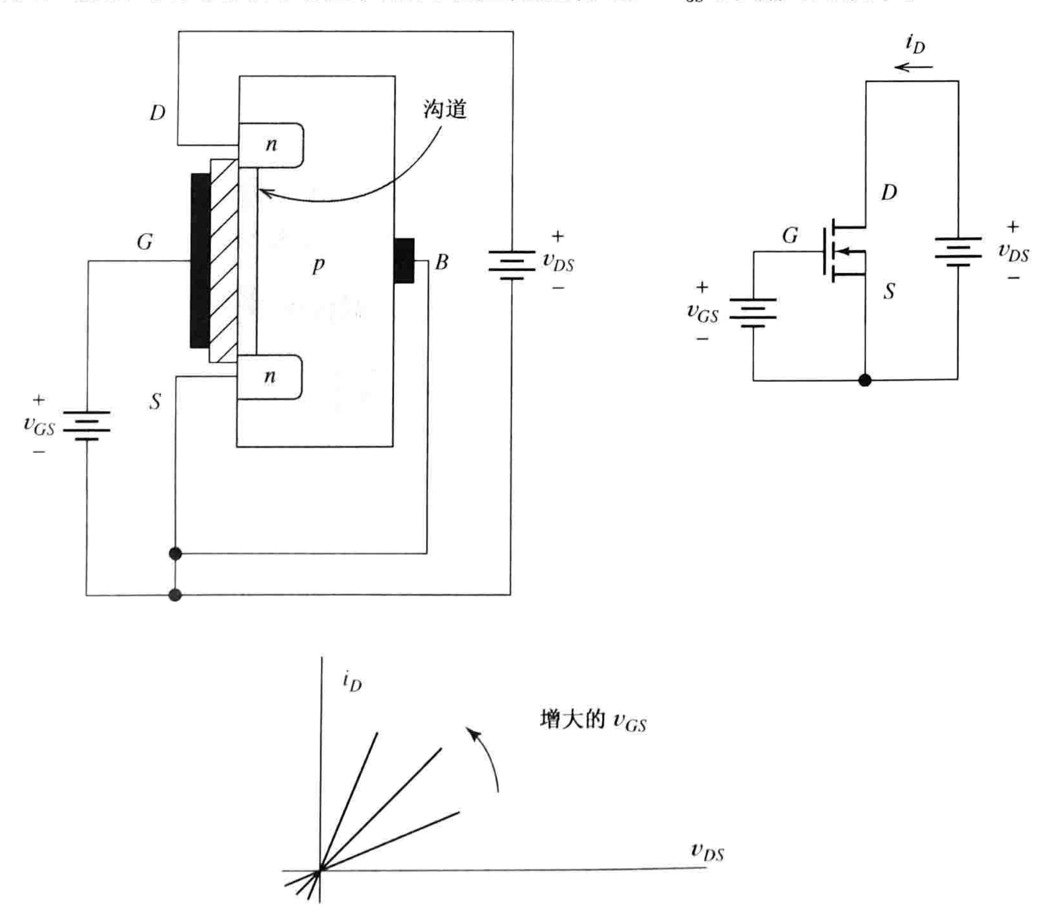


图 12.4　当 $v_{GS} \geqslant V_{to}$ 时，栅极下方出现 n 型沟道；随着 v_{GS} 的增大，沟道变厚。当v_{DS}较小时，i_D与v_{DS}成正比，元件近似为一个大小由v_{GS}控制的电阻

现在来研究继续增大 v_{DS} 的情况。沟道内有电流流过，所以沟道内沿沟道与源极一侧的电压降逐渐增大，即栅极与沟道之间沿漏极方向的任一点间的电压逐渐减小，导致沟道厚度随着 v_{DS} 的增大逐渐减小。如图 12.5 所示，沟道厚度呈楔形，v_{DS} 越大，沟道电阻越大，电流 i_D 增大的速度随 v_{DS} 的增大而减慢。

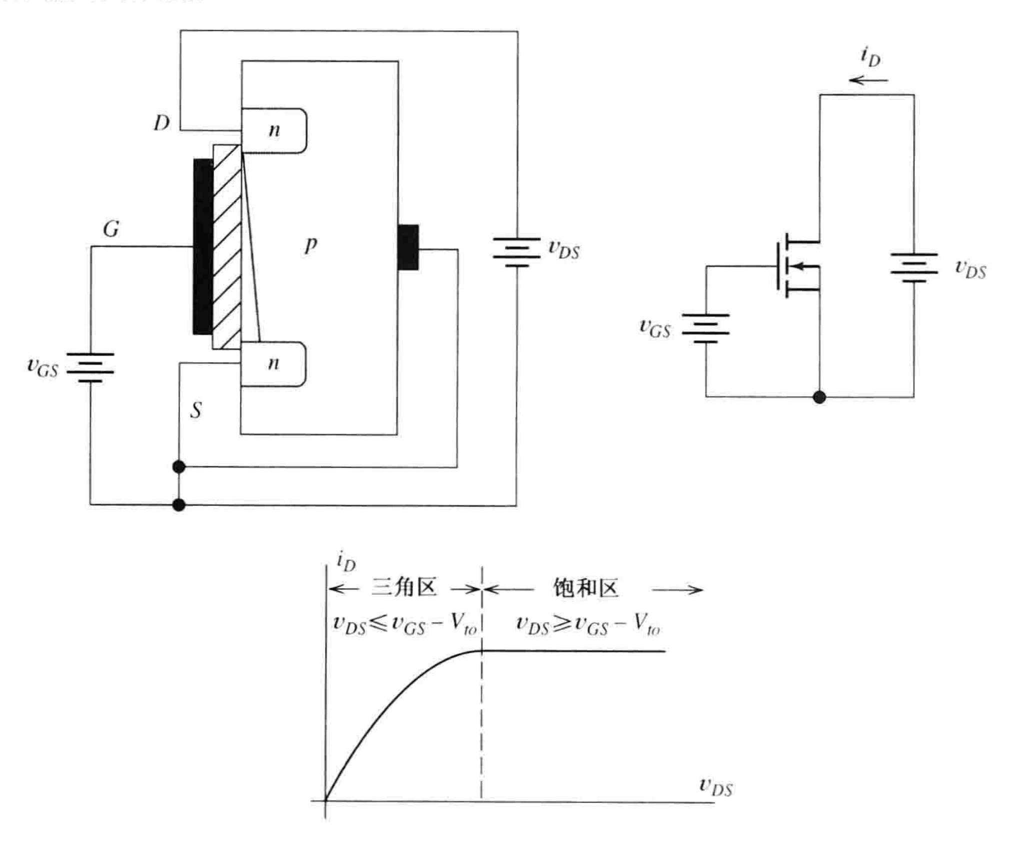


图 12.5 随着 v_{DS} 的增大，接近漏极处的沟道被"夹断"，电流 i_D 随 v_{DS} 的增大而增长缓慢。当 $v_{DS} \geqslant v_{GS} - V_{to}$ 时，i_D 最终保持恒定

当 $v_{DS} < v_{GS} - V_{to}$ 且 $v_{GS} \geqslant V_{to}$ 时，元件工作在三角区。漏极电流为

$$i_D = K\left[2(v_{GS} - V_{to})v_{DS} - v_{DS}^2\right] \tag{12.2}$$

其中 K 为

$$K = \left(\frac{W}{L}\right)\frac{KP}{2} \tag{12.3}$$

如图 12.1 所示，W 表示沟道的宽度，L 表示沟道长度，元件参数 KP 与氧化层厚度以及沟道材料的特性有关。n 沟道增强型元件的 KP 一般为 50 $\mu A/V^2$。

通常情况下，KP 的大小由制造过程决定。然而，在设计电路时，可以通过改变 W/L 来获得满足不同电路需要的元件。条件 $v_{DS} \leqslant v_{GS} - V_{to}$ 与 $V_{GD} \geqslant V_{to}$ 等价，所以当 v_{GD} 和 v_{GS} 均远远大于阈值电压 V_{to} 时，元件工作在三角区。

3. 饱和区的工作特性

随着电压 v_{DS} 的增加，栅极与接近漏极沟道的电压差降低。当栅极与漏极间的电压 v_{GD} 等于阈值电压 V_{to} 时，漏极附近的沟道厚度减小为零。如图 12.5 所示，若 v_{DS} 继续增大，i_D 的大小将不再随 v_{DS} 的增大而改变。这个区域就称为饱和区。当元件工作在饱和区时，$v_{GS} \geqslant V_{to}$ 且 $v_{DS} \geqslant$

$v_{GS} - V_{to}$。此时漏极电流为

$$i_D = K(v_{GS} - V_{to})^2 \tag{12.4}$$

记住，在饱和区内 v_{GS} 远远大于阈值电压 V_{to}，但 v_{GD} 略小于 V_{to}。图 12.6 表示了一个 NMOS 晶体管的漏极特性。

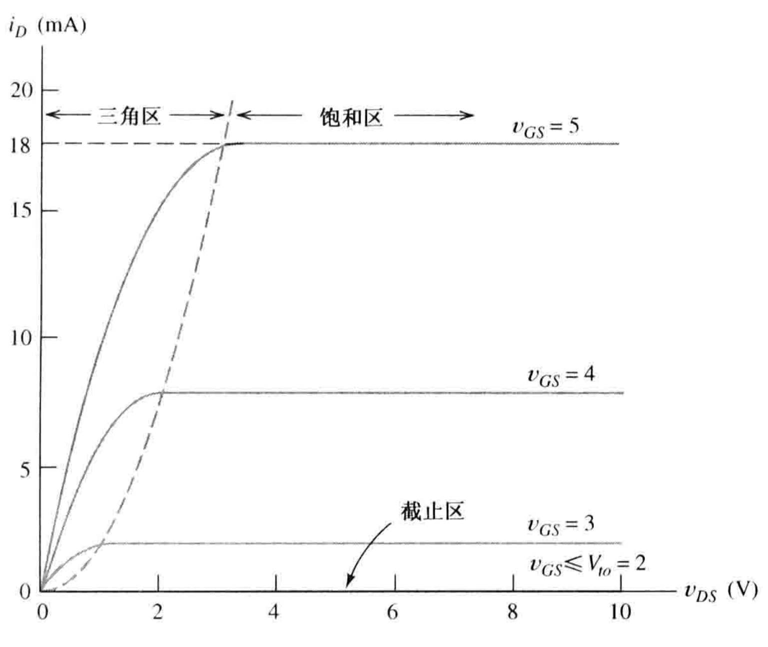


图 12.6　NMOS 晶体管的输出特性曲线

4. 线性区(可变电阻区)与饱和区的边界特性

现在推导输出特性曲线（$i_D \sim v_{DS}$）中可变电阻区与饱和区的边界条件。在线性区与饱和区的分界处 $v_{GD} = V_{to}$，此时漏极处的沟道厚度为零。当 $v_{GD} = v_{GS} - v_{DS}$ 时，边界条件为

$$v_{GS} - v_{DS} = V_{to} \tag{12.5}$$

将上式代入式(12.4)，化简得到边界等式为

$$i_D = Kv_{DS}^2 \tag{12.6}$$

可见，可变电阻区与饱和区的边界是一条抛物线。

式(12.2)和式(12.4)的 i_D 均为边界处的值，所以由式(12.5)得到 V_{GS} 表达式，再代入式(12.2)，同样可以得到式(12.6)。

若一个 NMOS 晶体管的参数 KP、L、W 和 V_{to} 的值已给定，可以得到其静态特性。

例 12.1　作出 NMOS 晶体管的特性。

已知一个增强型 NMOS 晶体管的各参数为：$W = 160\ \mu m$，$L = 2\ \mu m$，$KP = 50\ \mu A/V^2$，$V_{to} = 2\ V$。试作出当 V_{GS} 分别等于 1 V，2 V，3 V，4 V，5 V 时的漏极特性曲线。

解：由式(12.3)求该元件的常数 K：

$$K = \left(\frac{W}{L}\right)\frac{KP}{2} = 2\ \text{mA/V}^2$$

由式(12.6)获得线性区与饱和区边界的等式，有：

$$i_D = Kv_{DS}^2 = 2v_{DS}^2$$

其中，i_D 的单位为 mA，v_{DS} 的单位为 V。上式的计算结果如图 12.6 中的虚线所示。

再由式(12.4)计算在饱和区内不同的电压 V_{GS} 对应的漏极电流值。

$$i_D = K(v_{GS} - V_{to})^2 = 2(v_{GS} - 2)^2$$

电流的单位为 mA。分别代入 v_{GS} 的值，得：

$$i_D = 18\ \text{mA}, \quad v_{GS} = 5\ \text{V}$$
$$i_D = 8\ \text{mA}, \quad v_{GS} = 4\ \text{V}$$
$$i_D = 2\ \text{mA}, \quad v_{GS} = 3\ \text{V}$$
$$i_D = 0\ \text{mA}, \quad v_{GS} = 2\ \text{V}$$

可见，当 $v_{GS} = 0$ V 和 $v_{GS} = 1$ V 时，元件工作在截止区，此时 $i_D = 0$。上述计算结果如图 12.6 饱和区中的曲线所示。

最后，由式(12.2)画出三角区的特性曲线。对于不同的 v_{GS} 值，由上式作出的抛物线均通过原点($i_D = 0$, $v_{DS} = 0$)，且每一条抛物线的顶点均位于线性区和饱和区的边界线上。

练习 12.1 若一个 NMOS 晶体管的阈值电压 $V_{to} = 2$ V，试分析在以下情况下该元件分别工作在什么区域(线性区，饱和区，截止区)：(a)当 $v_{GS} = 1$ V, $v_{DS} = 5$ V 时；(b)当 $v_{GS} = 3$ V, $v_{DS} = 0.5$ V 时；(c)当 $v_{GS} = 3$ V, $v_{DS} = 6$ V 时；(d)当 $v_{GS} = 5$ V, $v_{DS} = 6$ V 时。

答案：(a)截止区；(b)线性区；(c)饱和区；(d)饱和区。

练习 12.2 假设某 NMOS 晶体管各参数为：$KP = 50\ \mu\text{A/V}^2$, $V_{to} = 1$ V, $L = 2\ \mu$m, $W = 80\ \mu$m 作出当 v_{DS} 的范围为 0 ~ 10 V, v_{GS} 分别等于 0 V, 1 V, 2 V, 3 V, 4 V 时，该元件的漏极特性。

答案：该晶体管的特性曲线如图 12.7 所示。

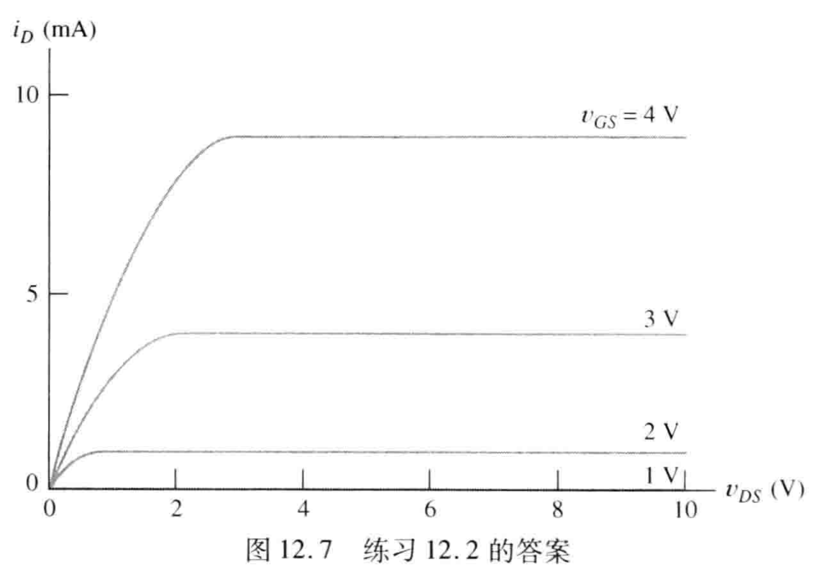


图 12.7 练习 12.2 的答案

12.1.3 PMOS 晶体管

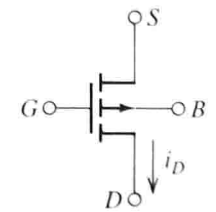


图 12.8 PMOS 晶体管的电路符号

通过交换 n 沟道 MOSFET 元件的 n 型和 p 型区域的位置便可得到 p 沟道元件。p 沟道 MOSFET 的电路符号如图 12.8 所示，源极在上方，电流从漏极流出，除了箭头的方向和位置不同外，PMOS 的电路符号和 NMOS 是一致的。

除了电压的极性相反外，PMOS 晶体管的特性与 NMOS 晶体管的特性相同。对于 n 沟道元件，我们以流入漏极的电流作为参考方向，而对于 p 沟道元件则以流出方向作为参考方向，所以两种元件的漏极电流均为正值。可见，只需将电压的极性取负，p 沟道元件的特性曲线与 n 沟道元件的特性曲线便相同了。

表 12.1 列出了 NMOS 和 PMOS 增强型晶体管的工作条件。由于硅材料中电子与空穴导电能力的差异，PMOS 晶体管的参数 KP 的典型值为 25 μA/V²，大约为 NMOS 晶体管的一半。需要注意的是，增强型 PMOS 晶体管的阈值电压 V_{to} 为负值。

表 12.1　小结

	NMOS	PMOS
电路符号	D, i_D, G, B, S	S, G, B, i_D, D
KP(典型值)	50 μA/V²	25 μA/V²
K	$(1/2)KP(W/L)$	$(1/2)KP(W/L)$
V_{to}(典型值)	+1 V	−1 V
截止区	$v_{GS} \leqslant V_{to}$, $i_D = 0$	$v_{GS} \geqslant V_{to}$, $i_D = 0$
三角(可变电阻)区	$0 \leqslant v_{DS} \leqslant v_{GS} - V_{to}$ 且 $v_{GS} \geqslant V_{to}$ $i_D = K[2(v_{GS} - V_{to})v_{DS} - v_{DS}^2]$	$0 \geqslant v_{DS} \geqslant v_{GS} - V_{to}$ 且 $v_{GS} \leqslant V_{to}$ $i_D = K[2(v_{GS} - V_{to})v_{DS} - v_{DS}^2]$
饱和区	$v_{GS} \geqslant V_{to}$ 且 $v_{DS} \geqslant v_{GS} - V_{to}$ $i_D = K(v_{GS} - V_{to})^2$	$v_{GS} \leqslant V_{to}$ 且 $v_{DS} \leqslant v_{GS} - V_{to}$ $i_D = K(v_{GS} - V_{to})^2$
v_{DS} 与 v_{GS}	通常为正值	通常为负值

练习 12.3　假设某 PMOS 晶体管的 $KP = 25$ μA/V², $V_{to} = -1$ V, $L = 2$ μm, $W = 2000$ μm。当 v_{DS} 的范围为 0 ~ 10 V，v_{GS} 分别为 0 V，1 V，2 V，3 V，4 V 时，作图表示该元件的漏极特性。

答案：其特性曲线如图 12.9 所示。

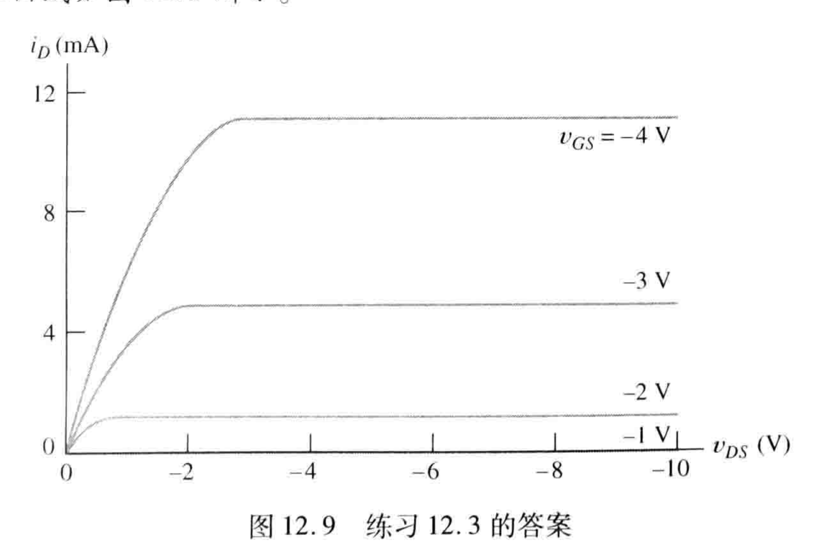


图 12.9　练习 12.3 的答案

12.2　一个简单 NMOS 放大器的负载线分析

本节将利用 10.2 节分析二极管电路的负载线法分析如图 12.10 所示的 NMOS 放大器。直流电源为 MOSFET 设置偏置电路，提供适当的静态工作点，正常放大输入信号 $v_{in}(t)$ 。当 $v_{in}(t)$ 的变化使得 v_{GS} 变化时，i_D 也会随之发生改变。因此，变化的 i_D 将在电阻 R_D 上产生压降，从而使输入信号的变化在漏极得到体现。

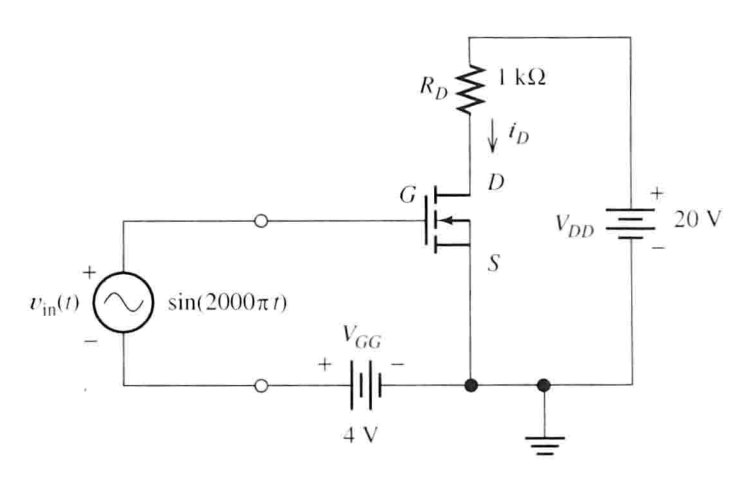


图 12.10 简单的 NMOS 放大电路

根据基尔霍夫电压定律，在输入回路有如下表达式:

$$v_{GS}(t)=v_{in}(t)+V_{GG} \tag{12.7}$$

若输入信号是峰值为 1 V、频率为 1 kHz 的正弦信号，且 $v_{GG}=4$ V 时，有:

$$v_{GS}(t)=\sin(2000\pi t)+4 \tag{12.8}$$

根据基尔霍夫电压定律，漏极回路的电压方程式为

$$V_{DD}=R_D i_D(t)+v_{DS}(t) \tag{12.9}$$

设 $R_D=1$ kΩ，$v_{DD}=20$ V，式(12.9)便可写为

$$20=i_D(t)+v_{DS}(t) \tag{12.10}$$

其中，电流 $i_D(t)$ 一般为毫安级。在晶体管的漏极特性图上画出上式的图形为一条直线，叫作负载线。

由于负载线是一条直线，只需要确定两点就能作出。首先，当 $i_D(t)=0$ 时，由式(12.10)得 $v_{DS}=20$ V，如图 12.11 中横轴上的交点；同样，当 $v_{DS}=0$ 时，$i_D(t)=20$ mA，如图中纵轴上的交点。将它们分别作为起点和终点，连接这两点便得到负载线。

在输入信号为零时，放大器的工作点称为静态工作点(quiescent operating point)或者 Q 点。当 $v_{in}(t)=0$ 时，由式(12.8)得 $v_{GS}=4$ V。所以，$v_{GS}=4$ V 的那条曲线与负载线的交点就是 Q 点，静态值为：$I_{DQ}=9$ mA，$V_{DSQ}=11$ V。

栅极与源极间电压的最大值和最小值为：$V_{GSmax}=5$ V，$V_{GSmin}=3$ V[见式(12.8)]。如图 12.11 所示，负载线与特性曲线的交点为 A、B。在 A 点，$V_{DSmin}=4$ V，$I_{Dmax}=16$ mA。在 B 点，$V_{DSmax}=16$ V，$I_{Dmin}=4$ mA。

v_{GS} 和 v_{DS} 与时间的关系如图 12.12 所示。需要注意的是，v_{DS} 的峰－峰值为 12 V，输入信号的峰－峰值为 2 V，而且，漏极的交流电压和输入信号相比符号相反(即正极性输入信号的最大值将产生负极性 v_{DS} 的最小值)。因此，图 12.10 所示为反相放大器。显然，该放大器的增益 $A_v=-12\text{ V}/2\text{ V}=-6$ V，“－”极性表示电压反相。

然而，如图 12.12(b)所示输出信号的波形和输入信号并不相同，它不是一个正弦波。当静态工作点 $V_{DSQ}=11$ V 时，输出信号降至 $V_{CEmin}=4$ V，减小了 7 V；而当 Q 点在输出信号的正半周时，输出信号从 5 V 升到 16 V。由于交流输出与交流输入不成比例，所以无法计算该电路的增益。不过，尽管信号产生失真，但是输出信号还是远远大于输入信号的。可见，这是一个非线性失真的例子，在 11.10 节已经讨论过。

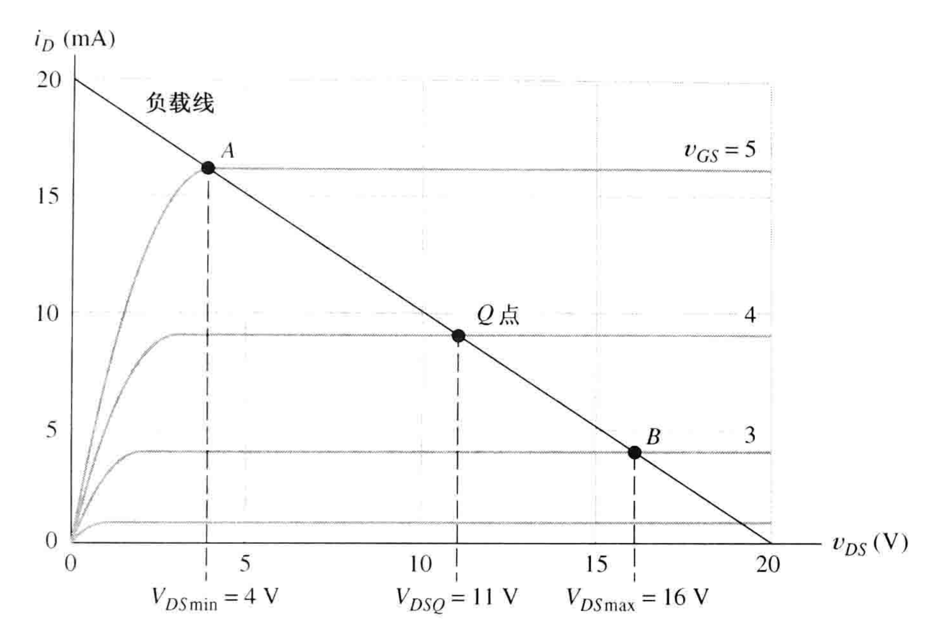
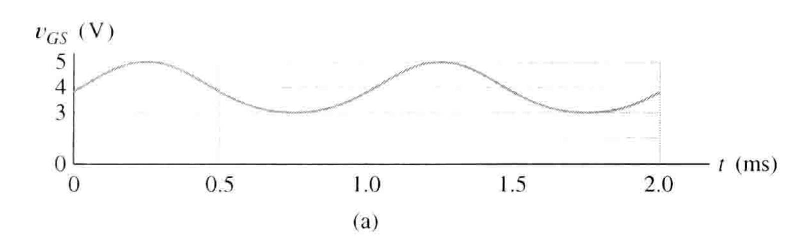
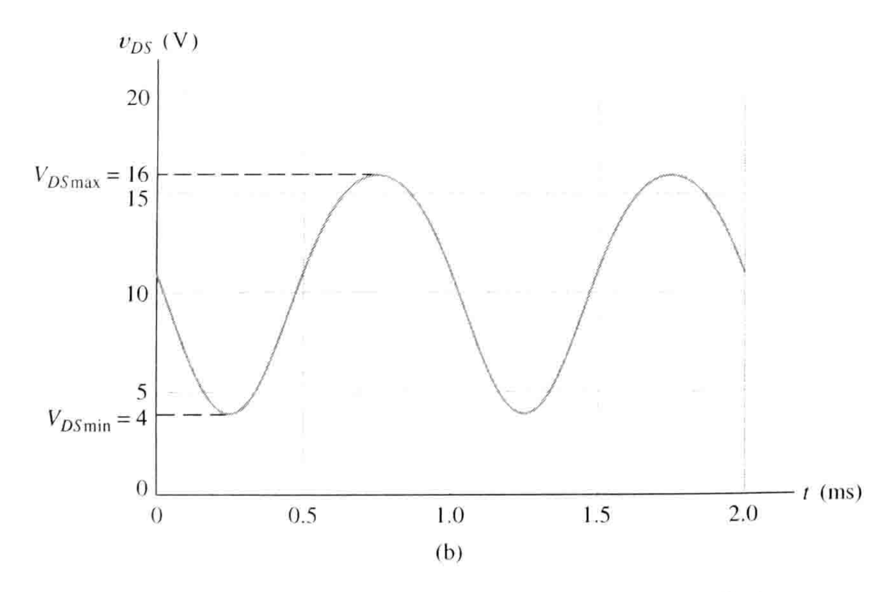


图 12.11　图 12.10 所示电路的漏极特性曲线与负载线



(a)



(b)

图 12.12　图 12.10 所示电路 v_{GS} 和 v_{DS} 与时间的关系

该电路产生失真是由于 FET 特性曲线的间隔不一致而造成的。如果施加一个幅值更小的输入信号，将得到一个没有明显失真的放大信号，这是由于在有限的饱和区内特性曲线的间距基本均匀。如果画出 v_{GS} 的增量为 0.1 V 的特性曲线就会清楚地发现这一点。

本节所分析的放大电路相对来说比较简单，可见采用图形法分析实际的放大器很困难。本章将提出 FET 的线性小信号等效电路，采用电路分析数学方法取代图形分析法。通常情况下，等效电路法更适用于分析实际放大电路，不过，简单电路的图形分析法提供了一条理解放大器工作原理的行之有效的途径。

练习 12.4 MOSFET 的特性曲线如图 12.11 所示，若将图 12.10 所示电路的参数改为：$V_{DD}=15\ \text{V}$，$V_{GG}=3\ \text{V}$，$R_D=1\ \text{k}\Omega$，$u_{\text{in}}(t)=\sin(2000\pi t)$。试求 V_{DSQ}、$V_{DS\min}$ 和 $V_{DS\max}$ 的值。

答案：$V_{DSQ}\approx 11\ \text{V}$，$V_{DS\min}\approx 6\ \text{V}$，$V_{DS\max}\approx 14\ \text{V}$。

12.3 偏置电路

分析放大电路一般分为两步。第一步是分析直流电路以决定 Q 点，分析中需要用到非线性元件的方程式或者特性曲线；第二步，利用线性小信号等效电路来求解输入电阻、电压增益等。

本章讨论的基本电路更适于设计分立元件电路，其中包含大电容(用于隔离电源、负载与放大器偏置电路和相邻放大电路)与较大偏差(±5% 或者更小)的电阻，因为这两种元件不适用于集成电路，因此集成电路的设计更复杂，因为源、各级放大器与负载之间相互制约，本书不讨论集成电路的设计。

图 12.10 所示放大器的双电源偏置电路是没有实用性的，通常情况下只需用一个直流电源。更重要的问题是，不同 FET 元件的参数是不一样的。我们通常希望 Q 点位于负载线的中间以使输出信号有足够的变化范围而不被限幅，而当每个 FET 的参数不同时，双电源电路可能会使得工作点接近两侧而不是居中。

12.3.1 固定自偏置电路

固定自偏置电路(The Fixed-plus Self-Bias Circuit)如图 12.13 所示，能较好地建立 Q 点，基本不受元件参数的影响。

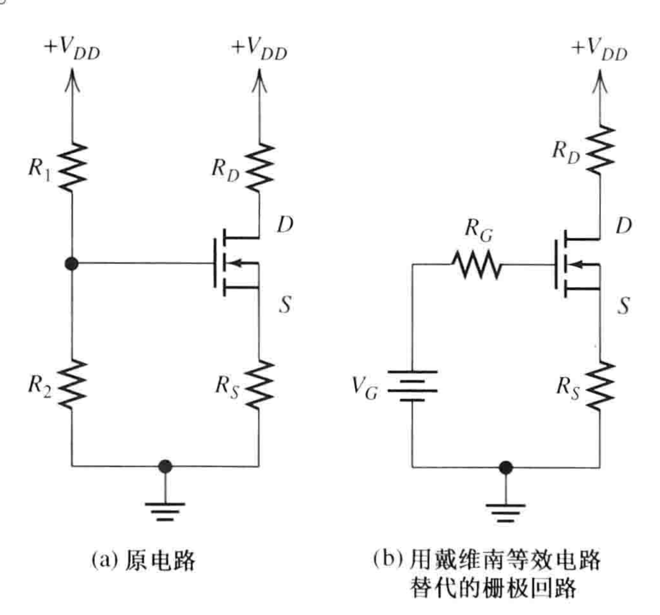


图 12.13 固定自偏置电路

为了便于分析，用戴维南等效电路替代栅极回路，如图 12.13(b)所示，其中戴维南等效电压为

$$V_G = V_{DD}\frac{R_2}{R_1+R_2} \tag{12.11}$$

戴维南等效电阻 R_G 是 R_1 和 R_2 的并联组合。由图 12.13(b)可得栅极回路的电压方程为

$$V_G = v_{GS} + R_S i_D \tag{12.12}$$

因为 NMOS 管的栅极电流非常小，所以假设 R_G 上的压降为零。

通常希望场效应管工作在饱和区，所以有：

$$i_D = K(v_{GS} - V_{to})^2 \tag{12.13}$$

联立求解式(12.12)和式(12.13)便可以得到工作点(位于饱和区)。作这两个方程的曲线如图 12.14 所示，其中式(12.12)的图形为一条直线，称为偏置线(bias line)。当 $v_{GS} < V_{to}$ 时，式(12.1)的图形是虚线，所以式(12.12)和式(12.13)的方程组有两个根，即图中有两个交点。其中，v_{GS} 较小的根没有意义，应当舍去。因此，v_{GS} 较大以及 i_D 较小的解对应的交点才是真正的工作点。

最后，图 12.13 所示电路对应的漏极回路的电压方程为

$$v_{DS} = V_{DD} - (R_D + R_S)i_D \tag{12.14}$$

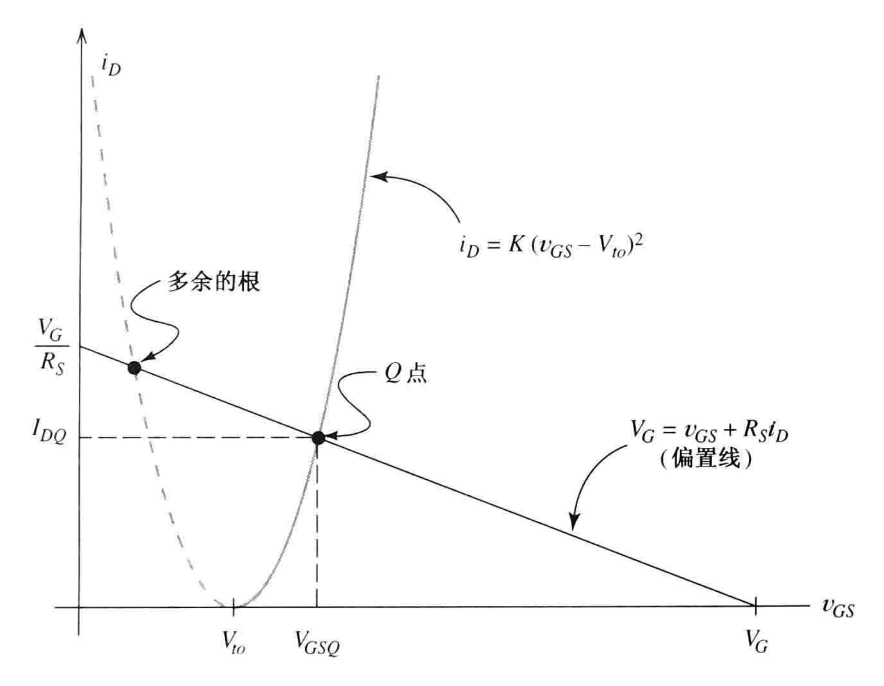


图 12.14　式(12.12)和式(12.13)的解的图形

例 12.2　确定固定增益自偏压电路的 Q 点。

分析如图 12.15 所示的固定增益自偏压电路，其中，场效应管的参数为：$KP = 50\ \mu A/V^2$，$V_{to} = 2\ V$，$L = 10\ \mu m$，$W = 400\ \mu m$。试确定其静态工作点。

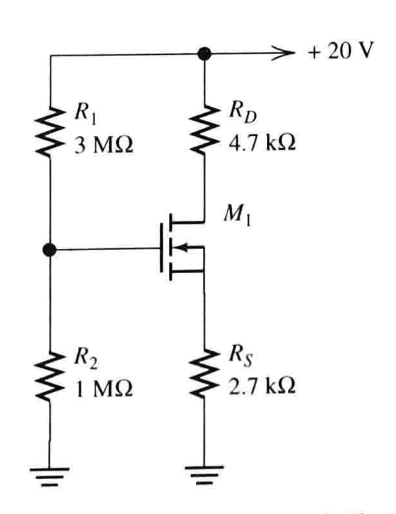


图 12.15　例 12.2 的固定增益自偏压电路

解： 由式(12.3)计算元件的常数 K：

$$K = \left(\frac{W}{L}\right)\frac{KP}{2} = 1\ mA/V^2$$

把各参数值代入式(12.11)，得：

$$V_G = V_{DD}\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 20\frac{1}{(3+1)} = 5\ V$$

因为 Q 点必须同时满足式(12.12)和式(12.13)，解以下方程组：

$$V_G = V_{GSQ} + R_S I_{DQ}$$
$$I_{DQ} = K(V_{GSQ} - V_{to})^2$$

将后一个方程代入前一个方程消去 i_{DQ}，得 V_G 的表达式：

$$V_G = V_{GSQ} + R_S K\left(V_{GSQ} - V_{to}\right)^2$$

将上式展开并化简，得：

$$V_{GSQ}^2+\left(\frac{1}{R_SK}-2V_{to}\right)V_{GSQ}+V_{to}^2-\frac{V_G}{R_SK}=0$$

代入值，得：

$$V_{GSQ}^2-3.630V_{GSQ}+2.148=0$$

解方程，得 $V_{GSQ}=2.886$ V 或 $V_{GSQ}=0.744$ V(舍去)，从而得

$$I_{DQ}=K\left(V_{GSQ}-V_{to}\right)^2=0.784\ \text{mA}$$

解得漏源电压：

$$V_{DSQ}=V_{DD}-(R_D+R_S)I_{DQ}=14.2\ \text{V}$$

这个值已经足够大，能保证元件工作在饱和区域，所以认为其为本题的解。

练习 12.5 晶体管参数为：$KP=50\ \mu\text{A/V}^2$，$V_{to}=1$ V，$L=10\ \mu\text{m}$，$W=200\ \mu\text{m}$。计算图 12.16 所示电路的 I_{DQ} 和 V_{DSQ}。

答案：$I_{DQ}=2$ mA，$V_{DSQ}=16$ V。

练习 12.6 晶体管参数为：$KP=50\ \mu\text{A/V}^2$，$V_{to}=-1$ V，$L=10\ \mu\text{m}$，$W=400\ \mu\text{m}$。计算图 12.17 所示 PMOS 电路的 I_{DQ} 和 V_{DSQ}。

答案：$I_{DQ}=4.5$mA，$V_{DSQ}=-11$ V。

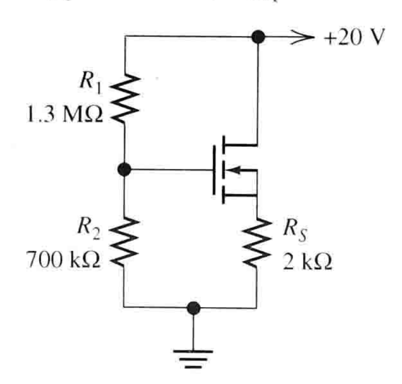


图 12.16 练习 12.5 的电路图

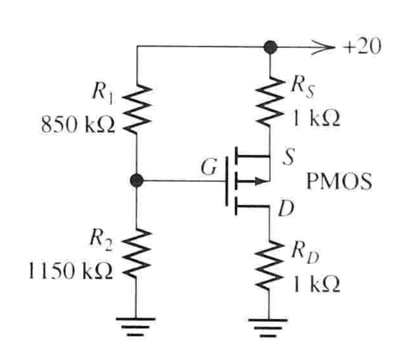


图 12.17 练习 12.6 的电路图

12.4 小信号等效电路

前面几节讨论了分立元件 FET 放大器的直流自偏压电路，这一节主要分析在静态工作点附近有一较小变动的电流与电压的关系。在 10.8 节中，我们用下标为大写字母的小写字母来表示总量，例如 $i_D(t)$ 和 $v_{GS}(t)$；静态工作点则用下标中加上 Q 的大写字母表示，例如 I_{DQ} 和 V_{GSQ}；用下标为小写字母的小写字母来表示小信号，例如 $i_d(t)$ 和 $v_{gs}(t)$。由于总电流或总电压等于静态工作点的值加上小信号的值，所以写作：

$$i_D(t)=I_{DQ}+i_d(t) \tag{12.15}$$

$$v_{GS}(t)=V_{GSQ}+v_{gs}(t) \tag{12.16}$$

图 12.18 所示为式(12.15)中各电流的关系。

首先，假设 FETS 工作在饱和区，这是放大电路必要的工作条件。为分析方便，重新列出式(12.4)：

$$i_D=K(v_{GS}-V_{to})^2$$

将式(12.15)和式(12.16)代入式(12.4)，消去 i_D 和 v_{GS}，得：

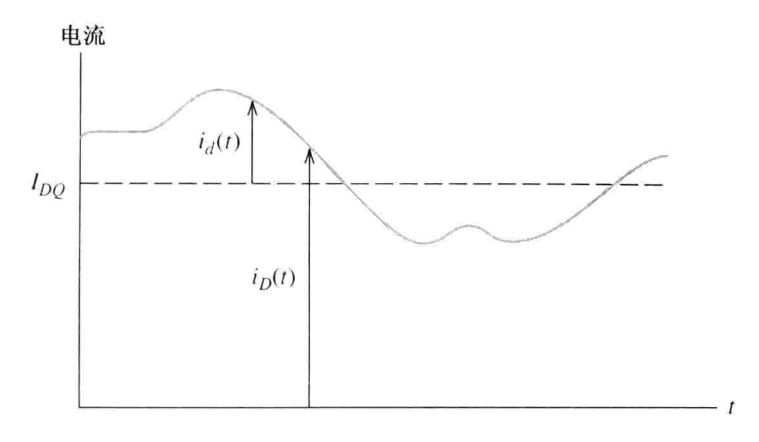


图 12.18　式(12.15)中各电流的关系

$$I_{DQ} + i_d(t) = K\left[V_{GSQ} + v_{gs}(t) - V_{to}\right]^2 \tag{12.17}$$

将式(12.17)的右边展开，得：

$$I_{DQ} + i_d(t) = K(V_{GSQ} - V_{to})^2 + 2K(V_{GSQ} - V_{to})\, v_{gs}(t) + Kv_{gs}^2(t) \tag{12.18}$$

由于 Q 点的值应该满足式(12.4)，有：

$$I_{DQ} = K\left(V_{GSQ} - V_{to}\right)^2 \tag{12.19}$$

即式(12.18)等号两边的第一项可以消去。由于我们仅分析小信号的情形，所以式(12.18)等号右边的最后一项可以舍去(假设 $|v_{gs}(t)|$ 在每个时刻的值都远远小于 $|V_{GSQ} - V_{to}|$)。

根据以上简化，式(12.18)化简为

$$i_d(t) = 2K\left(V_{GSQ} - V_{to}\right) v_{gs}(t) \tag{12.20}$$

这时，定义FET 的互导(或跨导，transconductance)为

$$g_m = 2K\left(V_{GSQ} - V_{to}\right) \tag{12.21}$$

式(12.20)写为

$$i_d(t) = g_m v_{gs}(t) \tag{12.22}$$

由于 FET 的栅极电流可忽略，因此有：

$$i_g(t) = 0 \tag{12.23}$$

这样，式(12.22)和式(12.23)表示的小信号等效电路如图 12.19 所示。因此，在小信号情况下，FET 等效为一个连接在漏极和源极间的电压控电流源，而栅极和源极之间为开路状态。

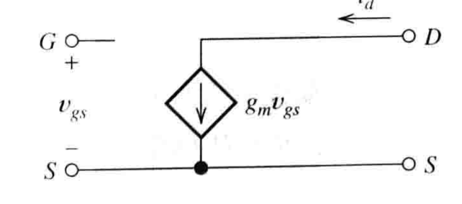


图 12.19　场效应管的小信号等效电路

12.4.1　元件参数和 Q 点对互导的影响

在分析放大电路时互导 g_m 是一个重要的参数。通常情况下，g_m 越大，放大电路的性能就越好。因此，了解 Q 点和元件参数对互导的影响尤为重要。

将式(12.19)的 $(V_{GSQ} - V_{to})$ 代入式(12.21)，得：

$$g_m = 2\sqrt{KI_{DQ}} \tag{12.24}$$

值得注意的是，g_m 与 Q 点处漏极电流的平方根成正比，可以通过选择较大的 I_{DQ} 来提高 g_m。

将式(12.3)中 K 的表达式代入式(12.24)，得：

$$g_m = \sqrt{2KP}\sqrt{W/L}\sqrt{I_{DQ}} \tag{12.25}$$

所以，当 I_{DQ} 一定时，增加沟道的宽长比（W/L）即可增大 g_m。

12.4.2 较复杂的等效电路

以上介绍的简单等效电路有时候并不能满足实际需求，需要更为复杂的等效电路来模拟FET，例如在分析 FET 放大器的高频响应时需要添加一些小电容。而以上推导的方程和等效电路通常也只能描述元件的静态特性，对于快速变化的电流、电压的更精确的模型就必须考虑电容的影响。

同时，前面用来推导 FET 等效电路的一阶方程并不能完全解释 v_{DS} 对漏极电流的影响，这是因为我们假设饱和区的漏极特性是水平的，但是事实并非如此——实际元件的漏极特性是随着 v_{DS} 的增加轻微地向上倾斜的。因此，如果希望在小信号等效电路中表明 v_{DS} 的影响，必须在漏极和源极之间增加一个电阻 r_d，这个电阻称为漏极电阻，如图 12.20 所示。这时，式(12.22)应当写为

$$i_d = g_m v_{gs} + v_{ds}/r_d \tag{12.26}$$

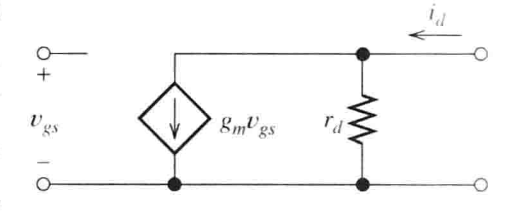


图 12.20 分析 i_D 与 v_{DS} 关系的 FET小信号等效电路

12.4.3 偏微分形式表示的互导和漏极电阻

通过分析式(12.26)可以得到 g_m 的另一种定义。当 v_{ds} =0 时，g_m 是 i_d 和 v_{gs} 之比，有：

$$g_m = \left.\frac{i_d}{v_{gs}}\right|_{v_{ds}=0} \tag{12.27}$$

然而，v_{ds}、v_{gs} 和 i_d 表示在静态工作点处较小的变化量，因此 v_{ds} =0 的情况相当于使 v_{DS} 在静态工作点处保持为常数，即 v_{DSQ}。

则式(12.27)写为

$$g_m \approx \left.\frac{\Delta i_D}{\Delta v_{GS}}\right|_{v_{DS}=V_{DSQ}} \tag{12.28}$$

其中，Δi_d 为漏极电流在 Q 点处的增量。同样，Δv_{gs} 为栅源电压在 Q 点处的增量。

因此，g_m 等于 Q 点处 i_d 对 v_{gs} 的偏微分：

$$g_m = \left.\frac{\partial i_D}{\partial v_{GS}}\right|_{Q点} \tag{12.29}$$

同样，漏极电阻的倒数可以写为

$$\frac{1}{r_d} \approx \left.\frac{\Delta i_D}{\Delta v_{DS}}\right|_{v_{GS}=V_{GSQ}} \tag{12.30}$$

即

$$\frac{1}{r_d} = \left.\frac{\partial i_D}{\partial v_{DS}}\right|_{Q点} \tag{12.31}$$

根据漏极特性可计算出 Q 点处偏导数的近似值，然后，就能通过小信号等效电路来分析放

大电路，由 g_m 和 r_d 计算放大器的增益和阻抗。后面几章将介绍这种方法的一些应用实例。以下介绍如何通过特性曲线确定 g_m 和 r_d 的值。

例 12.3　根据图 12.21 所示的 MOSFET 特性曲线确定 g_m 和 r_d 的值，其中，Q 点处 V_{GSQ} = 3.5 V，V_{DSQ} =10 V。

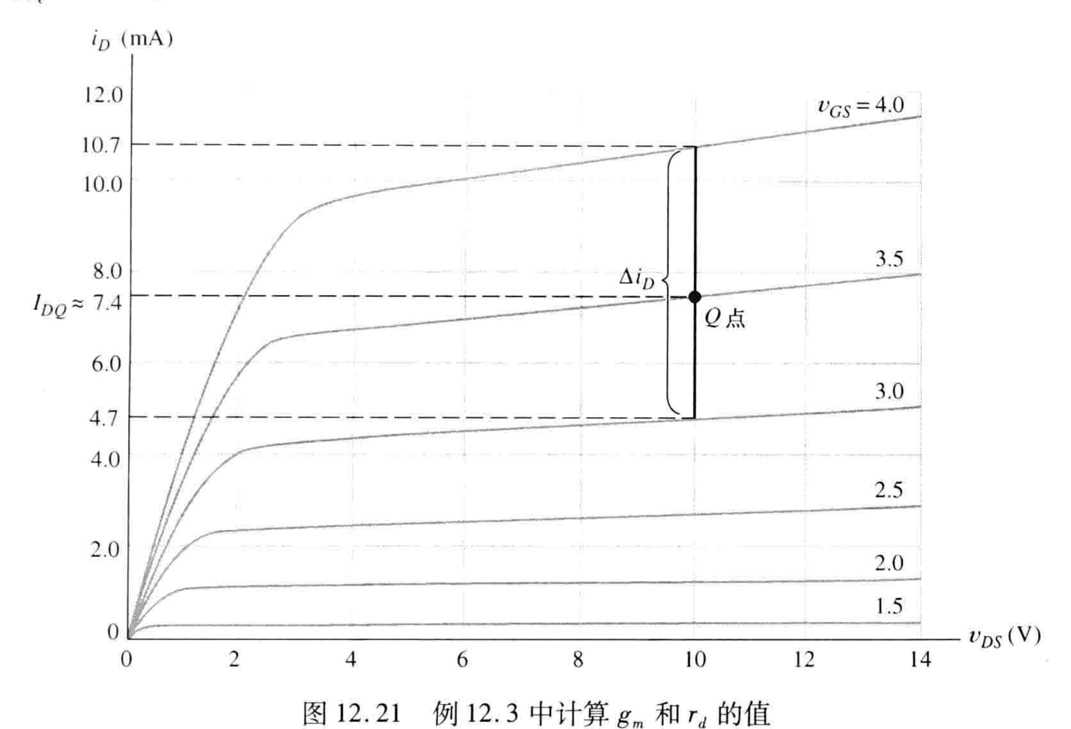


图 12.21　例 12.3 中计算 g_m 和 r_d 的值

解：根据图 12.21 确定 Q 点的位置。由式(12.28)得 g_m 为：

$$g_m \approx \left.\frac{\Delta i_D}{\Delta v_{GS}}\right|_{v_{DS}=V_{DSQ}=10\ \text{V}}$$

假设保持 v_{DS} =10 V 不变，在 Q 点附近沿垂线方向有一个较小的变化量 Δi_d。为了计算 g_m 值，设增量以 Q 点为中心(而不是从 Q 点出发)。这个变化量的起点位于曲线 Q 点的下方，而终点在其上方，因此 $\Delta i_D \approx 10.7 - 4.7 = 6$ V，Δv_{GS} =1 V，增量 Δi_D 如图所示。

$$g_m = \frac{\Delta i_D}{\Delta v_{GS}} = \frac{6\ \text{mA}}{1\ \text{V}} = 6\ \text{mS}$$

由式(12.30)得漏极电阻为

$$\frac{1}{r_d} = \left.\frac{\Delta i_D}{\Delta v_{DS}}\right|_{v_{GS}=V_{GSQ}}$$

因为增量是在保持 v_{GS} 恒定的前提下获得的，变化量必然通过特性曲线的 Q 点，$1/r_d$ 等于过 Q 点的曲线的斜率。当 $v_{GS} = V_{GSQ}$ =3.5 V 时，若 v_{DS} =4 V，$i_D \approx$6.7 mA；若 v_{DS} =14 V，$i_D \approx$8 mA。

$$\frac{1}{r_d} = \frac{\Delta i_D}{\Delta v_{DS}} \approx \frac{(8.0 - 6.7)\ \text{mA}}{(14 - 4)\ \text{V}} = 0.13 \times 10^{-3}$$

取倒数，得 r_d =7.7 kΩ。

练习 12.7　根据图 12.21 所示的特性曲线确定 g_m 和 r_d 的值，其中 Q 点为 V_{GSQ} =2.5 V，V_{DSQ} =6 V。

答案：$g_m \approx$3.3 mS，$r_d \approx$20 kΩ。

练习 12.8　解释如何通过式(12.29)和式(12.4)推导得到式(12.21)。

12.5　共源极放大器

共源极放大器的电路如图12.22所示，被放大的输入信号为$v(t)$。对于交流信号的传递，耦合电容C_1、C_2以及旁路电容C_S的等效阻抗很小。本节采用中频带分析法，即对于交流信号将电容器等效为短路。这样，电阻R_1、R_2、R_S和R_D共同组成偏置电路，并通过调整电阻值获得适当的Q点，被放大的输出信号施加于负载电阻R_L。

12.5.1　小信号等效电路

图12.22所示的小信号等效电路如图12.23所示。耦合电容C_1被短路，而MOSFET也以小信号模型来代替。由于旁路电容C_S近似为短路，所以FET的源极直接接地——这就是该电路被称为共源极放大器的原因。

当仅分析交流输入信号的传递时，直流电源视为短路(即使有交流电流流过直流源，其交流电压仍然为零。因此，对于交流电流而言，直流电压源相当于短路)。所以，在等效电路中，R_1、R_2的一端均与栅极相连，另一端则均直接接地；同样，R_D的另一端也直接接地。

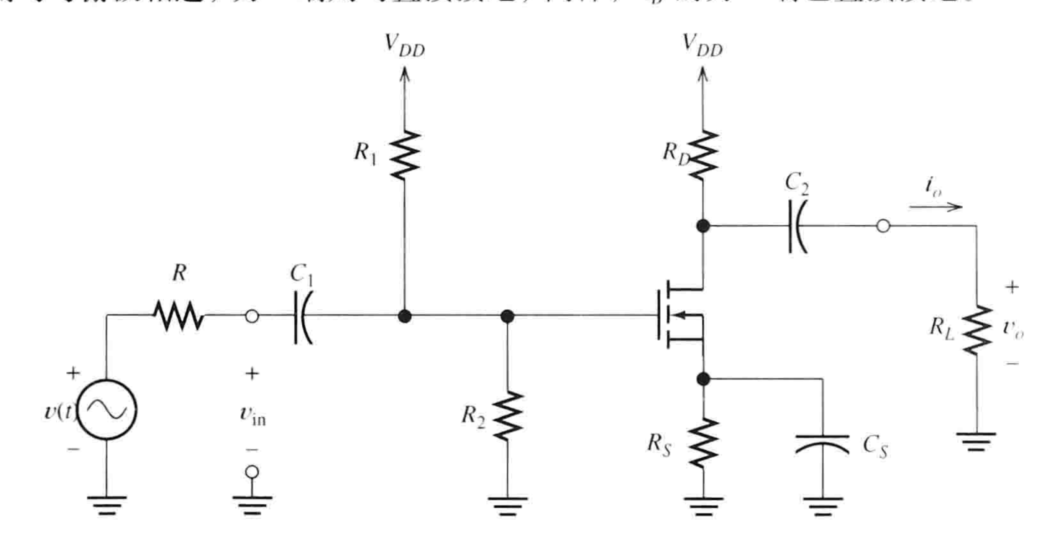


图12.22　共源极放大器

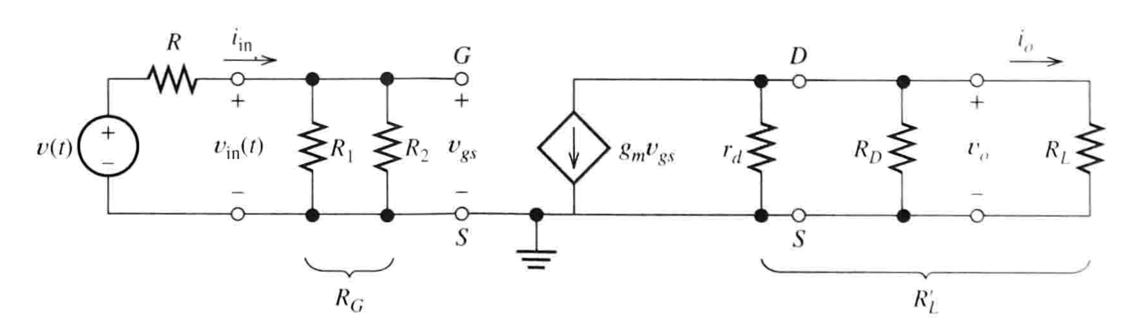


图12.23　共源极放大器的小信号等效电路

12.5.2　电压增益

接下来推导共源极放大器的电压增益。由小信号等效电路可知，电阻r_d、R_D和R_L相互并联，因此等效电阻为

$$R'_L = \frac{1}{1/r_d + 1/R_D + 1/R_L} \tag{12.32}$$

输出电压等于受控源的电流与等效电阻之乘积：

$$v_o = -(g_m v_{gs}) R'_L \tag{12.33}$$

其中，负号表示参考方向为非关联方向(电流 $g_m v_{gs}$从电压 v_o参考极性的正端流出)。而且，输入电压等于栅源电压，即

$$v_{in} = v_{gs} \tag{12.34}$$

将式(12.33)的两边和式(12.34)分别相除，得电压增益：

$$A_v = \frac{v_o}{v_{in}} = -g_m R'_L \tag{12.35}$$

表达式中的负号表示共源极放大器是反相放大器。注意，电压增益与 g_m成正比。

12.5.3 输入电阻

共源极放大器的输入电阻为

$$R_{in} = \frac{v_{in}}{i_{in}} = R_G = R_1 || R_2 \tag{12.36}$$

其中，$R_1 \| R_2$ 表示 R_1 和 R_2 并联。虽然 R_1 和 R_2 是偏置电路的一部分，但是其值的大小并不重要(详见 12.3 节对偏置电路的讨论)。在分立元件电路中，电阻的大小从 0 到 10 MΩ 不等，因此，在设计共源极放大器输入电阻时具有很大的选择空间(不过，在下一章介绍的 BJT 放大电路却并非如此方便)。

12.5.4 输出电阻

为了计算放大器的输出电阻，需要留下信号源的内电阻，去掉信号源并将负载开路，这样，从输出端看进去的电阻即为输出电阻。通过以上变化，等效电路如图 12.24 所示。

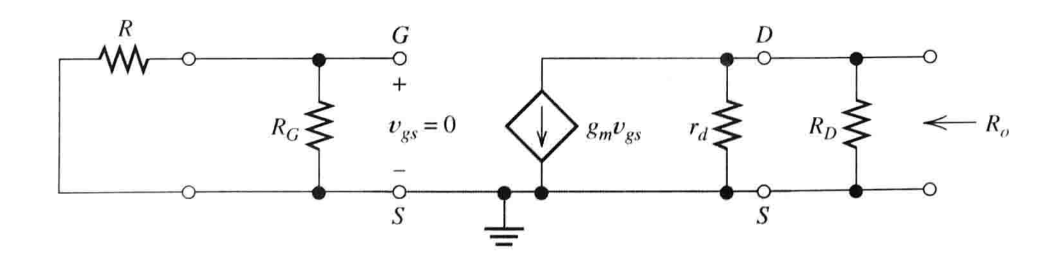


图 12.24　用于计算 R_o 的电路

由于电路没有输入信号，所以 $v_{gs} = 0$，受控源的电流 $g_m v_{gs} = 0$，相当于开路。电路的输出电阻即 R_D 和 r_d 并联的等效电阻：

$$R_o = \frac{1}{1/R_D + 1/r_d} \tag{12.37}$$

例 12.4　共源极放大器增益和阻抗的计算。

分析图 12.25 所示的共源极放大器，其中 NOMS 晶体管的参数为：$KP = 50\ \mu A/V^2$，$V_{to} = 2\ V$，

$L = 10\ \mu m$, $W = 400\ \mu m$。要求计算其中频电压增益、输入电阻和输出电阻。假设输入电压为 $v(t) = 100\sin(2000\pi t)$ mV，计算输出电压。设信号源的频率(1000 Hz)位于中频区。

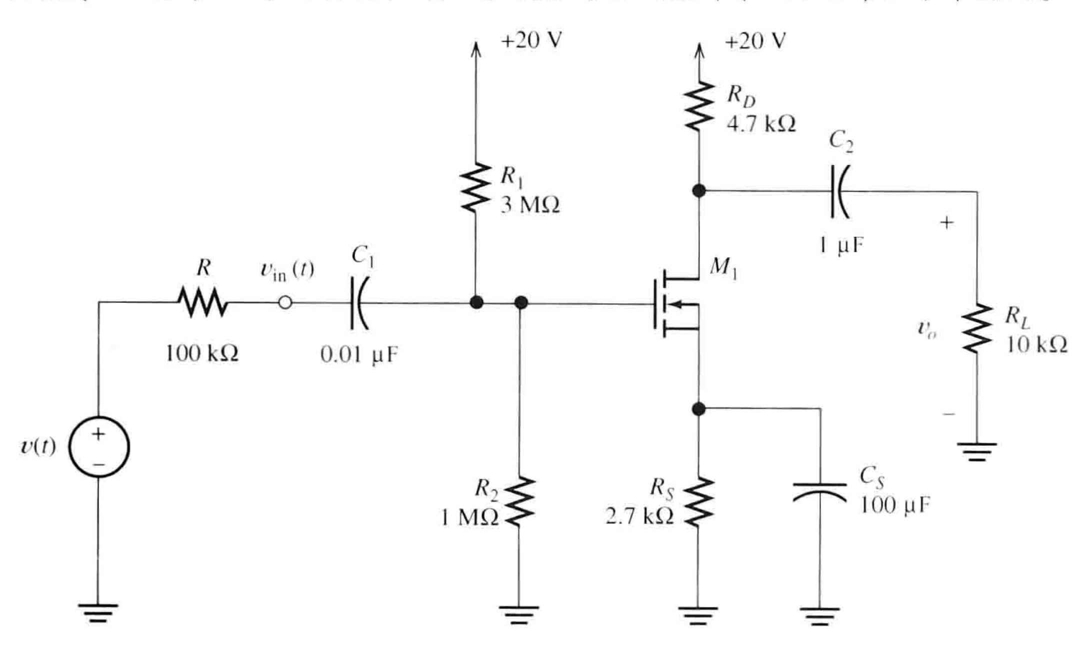


图 12.25 共源极放大器

解: 为了确定 Q 点，首先计算 MOSFET 的参数 g_m。

偏置电路由 R_1、R_2、R_S、R_D 和 MOSFET 组成。由例 12.2 可知 $I_{DQ} = 0.784$ mA。

所以，由式(12.25)得元件的互导为

$$g_m = \sqrt{2KP}\sqrt{W/L}\sqrt{I_{DQ}} = 1.77\ \text{mS}$$

因为饱和区的漏极特性是一条水平的直线，所以 $r_d = \infty$。

综合式(12.32)、式(12.35)、式(12.36)和式(12.37)，得:

$$R'_L = \frac{1}{1/r_d + 1/R_D + 1/R_L} = 3197\ \Omega$$

$$A_v = \frac{v_o}{v_{in}} = -g_m R'_L = -5.66$$

$$R_{in} = \frac{v_{in}}{i_{in}} = R_G = R_1 || R_2 = 750\ \text{k}\Omega$$

$$R_o = \frac{1}{1/R_D + 1/r_d} = 4.7\ \text{k}\Omega$$

因为输入电压是信号源内阻和输入电阻的分压部分。所以，输入电压为

$$v_{in} = v(t)\frac{R_{in}}{R + R_{in}} = 88.23\sin(2000\pi t)\ \text{mV}$$

输出电压为

$$v_o(t) = A_v v_{in}(t) = -500\sin(2000\pi t)\ \text{mV}$$

练习 12.9 若将 R_L 变为开路，计算例 12.4 的放大器的电压增益。

答案: $A_{voc} = -8.32$。

练习 12.10 若将图 12.22 所示电路的旁路电容 C_S 变为开路，试分析该电路，并画出其小信号等效电路；将 r_d 视为开路，推导由 g_m 和电阻表示的电压增益表达式。

答案: $A_v = -g_m R'_L/(1 + g_m R_S)$。

练习 12.11　利用例 12.4 的数据和练习 12.10 的表达式估计电压增益的大小，并和例题中结果进行比较。

答案：没有旁路电容时，$A_v = -0.979$；而有旁路电容时，$A_v = -5.66$。即在 FET 的源极和地之间没有旁路阻抗时，共源极放大器的电压增益大大降低。

12.6　源极跟随器

源极跟随器是另一种类型的放大器，电路如图 12.26 所示。待放大的信号电压为 $v(t)$，信号源内阻（即戴维南等效电阻）为 R。交流输入能通过耦合电容 C_1 到达 FET 的栅极。电容 C_2 分别连接 FET 的栅极和负载。注意：在放大器的中频分析中，假设耦合电容短路，而电阻 R_S、R_1 和 R_2 组成偏置电路。

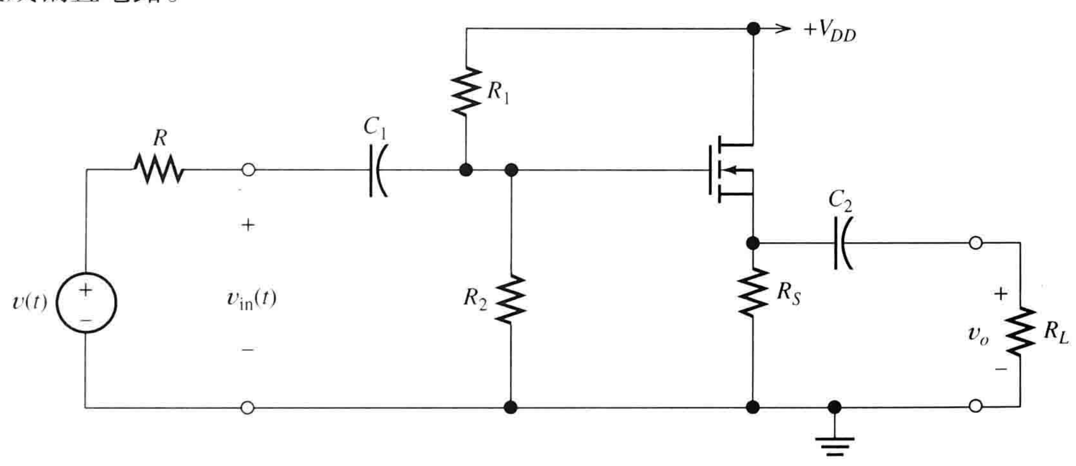


图 12.26　源极跟随器

12.6.1　小信号等效电路

小信号等效电路如图 12.27 所示。耦合电容元件被短路支路代替，FET 由其小信号等效模型代替。在小信号等效电路中，直流电压源相当于短路，所以漏极直接接地。此图对 FET 等效电路的画法（漏极在下端）与图 12.26 不同，但实质是一样的。

画出放大电路的小信号等效电路的能力是非常重要的，可自测能否由图 12.26 得到小信号电路。

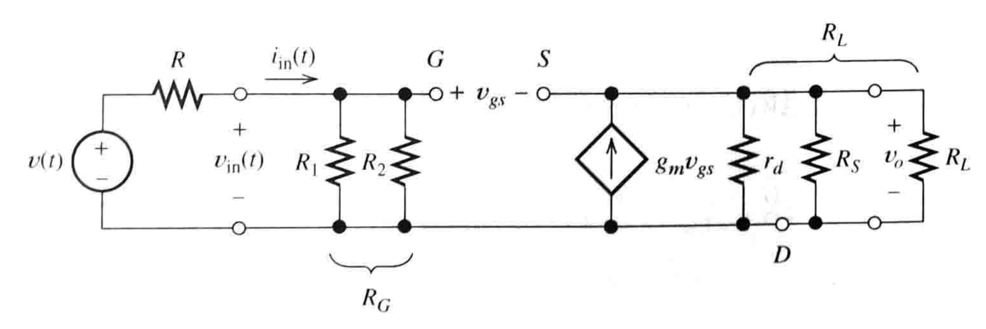


图 12.27　源极跟随器的交流小信号等效电路

12.6.2　电压增益

接下来，推导源极跟随器的电压增益表达式。由小信号等效电路可知，电阻 r_d、R_S 和 R_L 相互并联，因此定义等效电阻为

$$R'_L = \frac{1}{1/r_d + 1/R_S + 1/R_L} \tag{12.38}$$

输出电压：

$$v_o = g_m v_{gs} R'_L \tag{12.39}$$

由 KVL 得：

$$v_{\text{in}} = v_{gs} + v_o \tag{12.40}$$

将式(12.39)代入式(12.40)，得：

$$v_{\text{in}} = v_{gs} + g_m v_{gs} R'_L \tag{12.41}$$

将式(12.39)和式(12.40)的两边分别相除，即得到电压增益的表达式为

$$A_v = \frac{v_o}{v_{\text{in}}} = \frac{g_m R'_L}{1 + g_m R'_L} \tag{12.42}$$

可见，电压增益是正的并且略小于1。因此，源极跟随器是电压增益小于1的同相放大器。

12.6.3 输入电阻

输入电阻是从等效电路的输入端看进去的等效电阻。因此，输入电阻为

$$R_{\text{in}} = \frac{v_{\text{in}}}{i_{\text{in}}} = R_G = R_1 || R_2 \tag{12.43}$$

其中，$R_1 \parallel R_2$ 表示 R_1 和 R_2 并联。

12.6.4 输出电阻

为了分析输出电阻，将负载和电压源撤除，保留信号源的内阻，并在输出端添加一个附加电压源，如图 12.28 所示。从输出端看进去，输出电阻为

$$R_o = \frac{v_x}{i_x} \tag{12.44}$$

其中，i_x 为附加电压源流出的电流。所以，输出电阻为

$$R_o = \frac{1}{g_m + 1/R_S + 1/r_d} \tag{12.45}$$

可见，源极跟随器的输出电阻很小，这是源极跟随器得到广泛应用的重要原因之一。

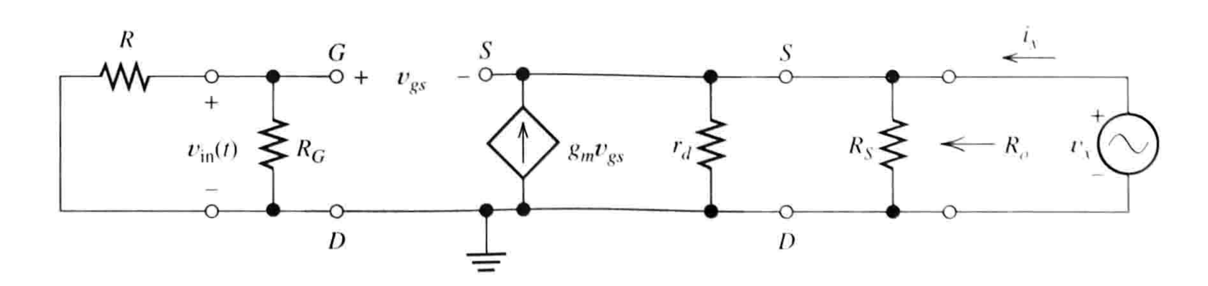


图 12.28 计算源极跟随器输出电阻的等效电路

例 12.5　源极跟随器的增益和阻抗的计算。

分析如图 12.26 所示的源极跟随器，$R_L = 1\ \text{k}\Omega$，$R_1 = R_2 = 2\ \text{M}\Omega$。NMOS 晶体管的参数：$KP = 50\ \mu\text{A/V}^2$，$V_{to} = 1\ \text{V}$，$L = 2\ \mu\text{m}$，$W = 160\ \mu\text{m}$。试计算 R_S 为何值时 $I_{DQ} = 10\ \text{mA}$，并计算其电压增益、输入电阻和输出电阻。

解：由式(12.3)和式(12.4)，得：

$$K = \left(\frac{W}{L}\right)\frac{KP}{2} = 2\ \text{mA/V}^2$$

$$I_{DQ} = K\left(V_{GSQ} - V_{to}\right)^2$$

由上式解出 V_{GSQ} 并代入值得：

$$V_{GSQ} = \sqrt{I_{DQ}/K} + V_{to} = 3.236\ \text{V}$$

栅极的直流对地电压为

$$V_G = V_{DD} \times \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 7.5\ \text{V}$$

源极的直流电压为

$$V_S = V_G - V_{GSQ} = 4.264\ \text{V}$$

所以，源极电阻为

$$R_S = \frac{V_S}{I_{DQ}} = 426.4\ \Omega$$

实际应用中，分立元件电路的电阻 R_S 应选择一个标称值，但是本例仍然使用 R_S 的精确计算值。通过式(12.25)获得元件的跨导：

$$g_m = \sqrt{2KP}\sqrt{W/L}\sqrt{I_{DQ}} = 8.944\ \text{mS}$$

由于漏极特性曲线在饱和区是水平的，即 $r_d = \infty$。

将值代入式(12.38)，得：

$$R'_L = \frac{1}{1/r_d + 1/R_S + 1/R_L} = 298.9\ \Omega$$

所以，由式(12.42)得电压增益：

$$A_v = \frac{v_o}{v_{\text{in}}} = \frac{g_m R'_L}{1 + g_m R'_L} = 0.7272$$

输入电阻：

$$R_{\text{in}} = R_1 || R_2 = 1\ \text{M}\Omega$$

由式(12.45)得输出电阻：

$$R_o = \frac{1}{g_m + 1/R_S + 1/r_d} = 88.58\ \Omega$$

相对于其他单个 FET 放大器来说，这个输出电阻是相当小的。

由式(11.3)，得电流增益：

$$A_i = A_v \frac{R_{\text{in}}}{R_L} = 727.2$$

功率增益：

$$G = A_v A_i = 528.8$$

虽然电压增益小于 1，但是由于输入电阻很高，使得输出功率远远大于输入功率。

练习 12.12 推导式(12.45)。

练习 12.13 推导如图 12.29 所示的共栅极放大器的电压增益、输入电阻和输出电阻表达式，假设 r_d 为开路。

答案：小信号等效电路如图 12.30 所示。$A_v = g_m R'_L$，$R_{in} = 1/(g_m + 1/R_S)$，$R_o = R_D$。

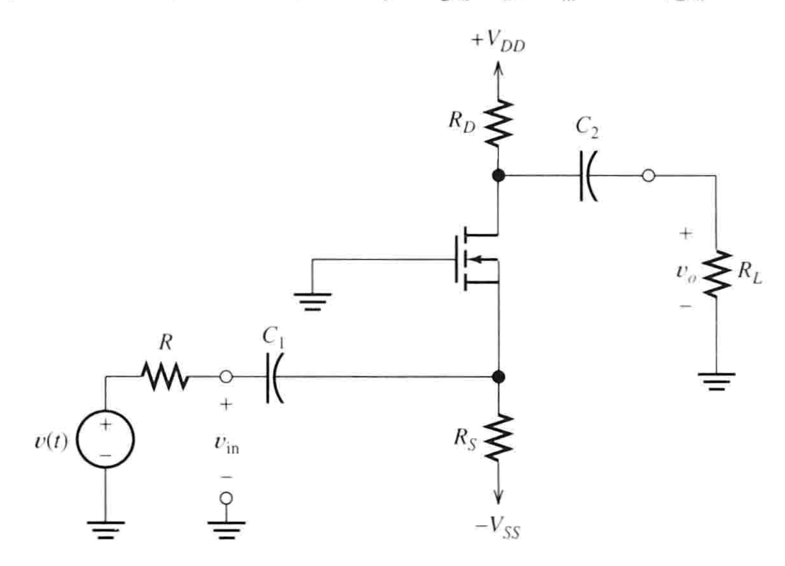


图 12.29 共栅极放大器

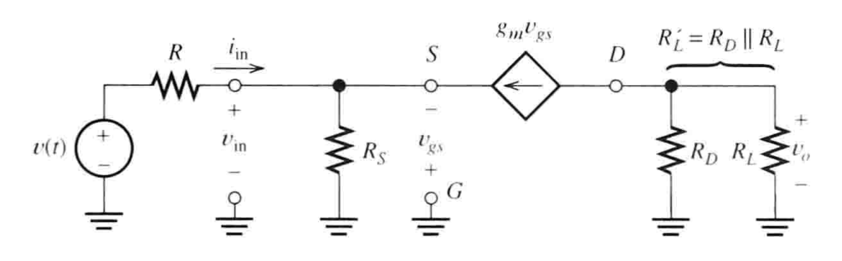


图 12.30 图 12.13 的小信号等效电路

12.7 CMOS 逻辑门

本节将介绍如何用 MOS(金属氧化物半导体)晶体管构成数字系统的基本模块——与非门或者或非门。

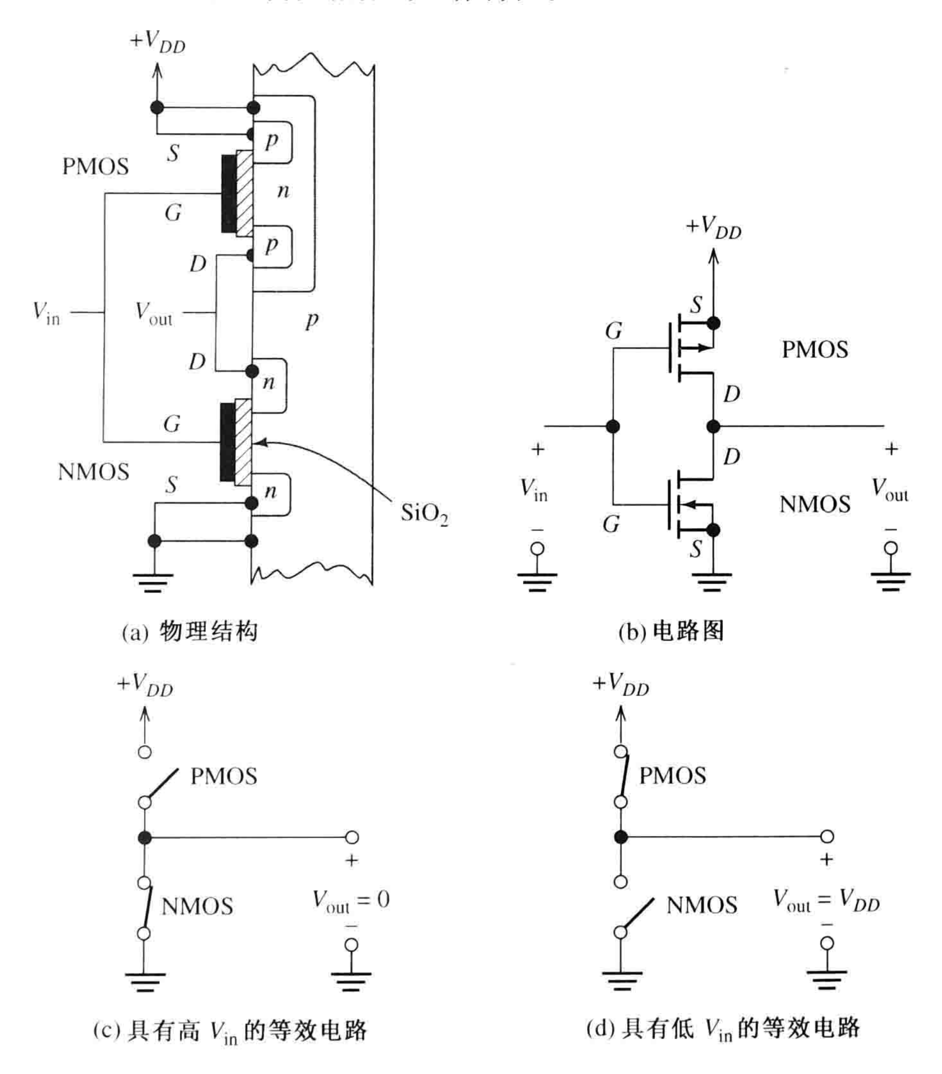
12.7.1 CMOS 反相器

如图 12.31 所示为一个 CMOS 反相器。其中，NMOSFET 和 PMOSFET 是在硅晶体中掺杂形成的，形成的 n 型和 p 型半导体如图 12.31(a)所示。栅极通过一层 SiO_2 和电路的其余部分绝缘，因此输入端等效为开路(小容量的电容除外)。

CMOS 反相器的电路如图 12.31(b)所示。直流电压 V_{DD} 位于电路上方，当输入电压为高电平时 ($V_{in} = V_{DD}$)，在 NMOS 晶体管的漏极和源极之间产生导电沟道。此时，电路如图 12.31(c)所示，NMOS 晶体管等效为一个阻值很小的电阻元件，理想情况下可以看作一个闭合的开关。同时，PMOS 晶体管“断开”，等效为开路。所以，输入电压 V_{in} 为高电平，则输出电压 V_{out} 为低电平(例如 $V_{out} = 0$)。

另一方面，当 V_{in} 为低电平时，在 PMOS 晶体管的栅极附近产生一个导电层，但是 NMOS 晶体管却没有。如图 12.31(d)所示，PMOS 晶体管“闭合”，而 NMOS 晶体管“断开”。此时的输出电压 V_{out} 为高电平（$V_{out}=V_{DD}$）。

由于这两个场效应管的轮流“开关”工作，当输入电压高时输出为低；反之，在输入电压低时输出电压为高，这就是一个逻辑反相器的工作特性。



(a) 物理结构　(b) 电路图

(c) 具有高 V_{in} 的等效电路　(d) 具有低 V_{in} 的等效电路

图 12.31　CMOS 反相器

12.7.2　CMOS 与非门

在反相器电路中添加一个晶体管就可以构成一个与非门。双输入的与非门电路如图 12.32(a)所示，其中，两个 PMOS 晶体管是并联的，两个 NMOS 晶体管是串联的。

当晶体管的栅极电压为高时，NMOS 晶体管“闭合”；而当它们的栅极电压为低时，NMOS 晶体管“断开”。反之，对于 PMOS 晶体管也成立(即当栅极电压低时，PMOS 晶体管“闭合”；而当栅极电压高时，PMOS 晶体管“断开”)。

当 A 端电压高、B 端电压低时的等效电路如图 12.32(b)所示。当 A 端和 B 端的电压均为高时的电路则如图 12.32(c)所示。由于晶体管具有开断特性，所以只有当 A、B 两端电压均为高时，输出电压才为低，这即是与非门的运行方式。若添加更多的晶体管，还可以得到三输入与非门。

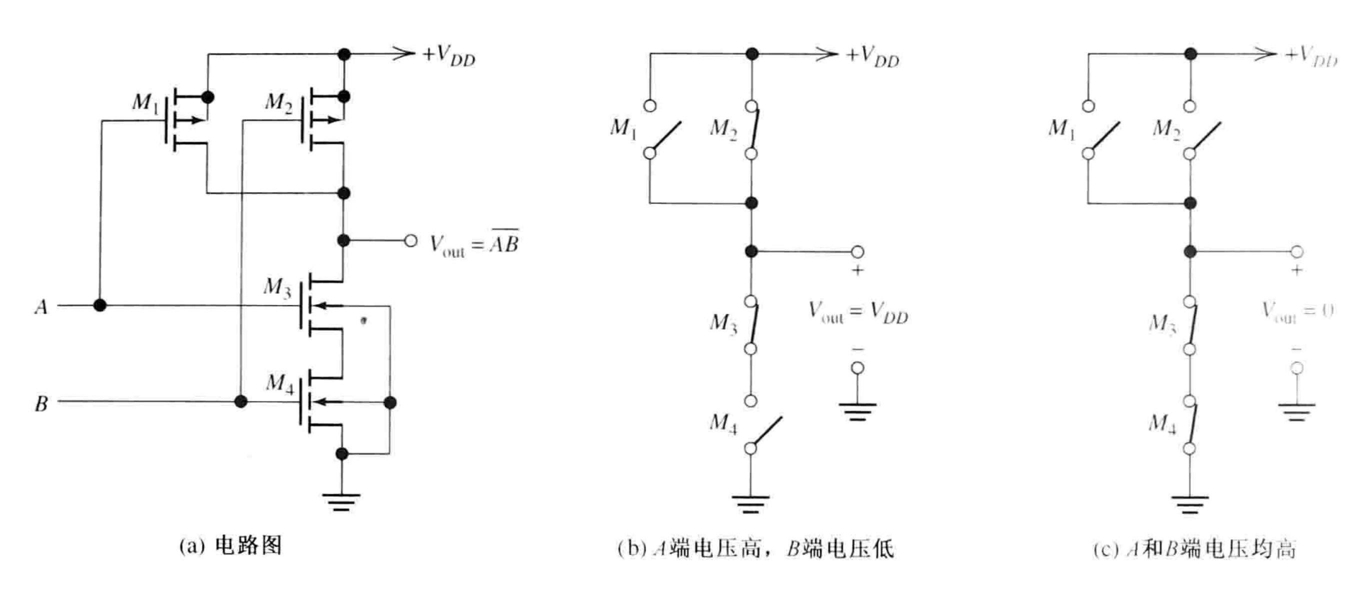


图 12.32　双输入 CMOS 与非门

12.7.3　CMOS 或非门(CMOS NOR Gate)

双输入的或非门电路如图 12.33 所示，其中，两个 PMOS 晶体管串联，两个 NMOS 晶体管并联。或非门的运行方式与前面讨论的与非门电路非常相似。例如，当栅极电压为高时，NMOS 晶体管“闭合”，当栅极电压为低时则“断开”；而 PMOS 晶体管的情况则与 NMOS 相反。

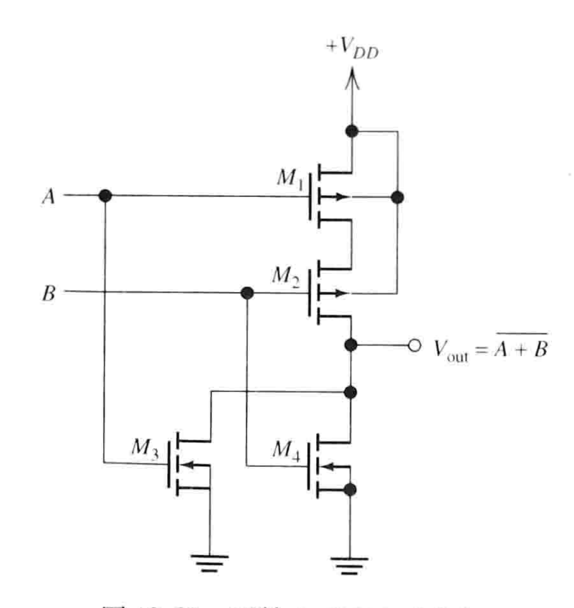


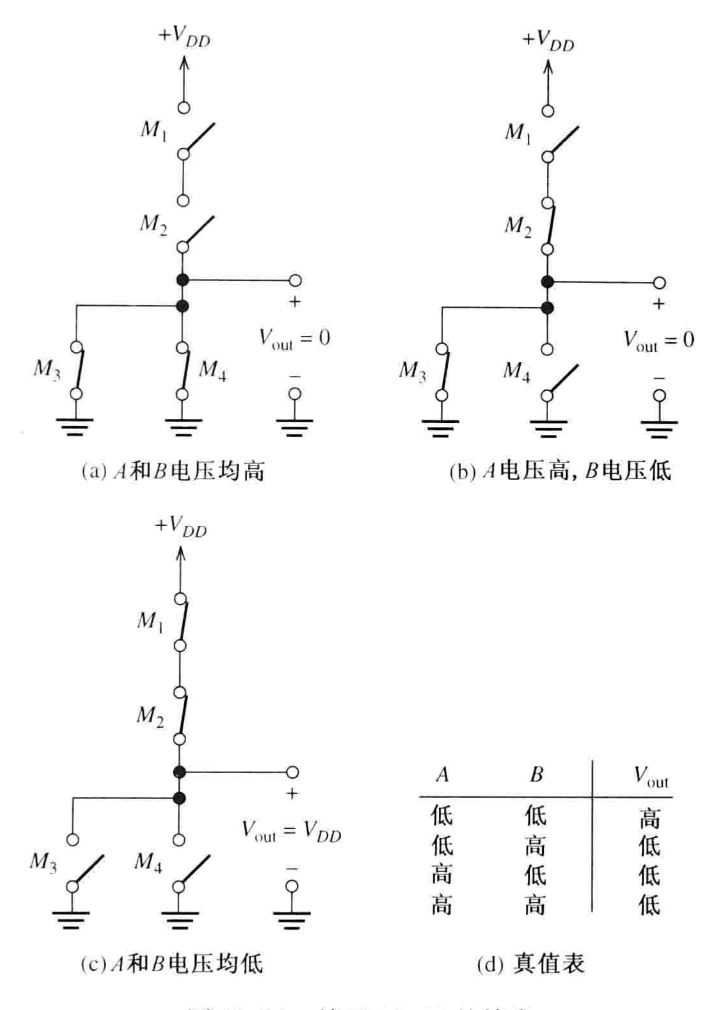
图 12.33　双输入 CMOS 或非门

练习 12.14　以下几种情况下：(a) A、B 电压均为高；(b) A 电压高、B 电压低；(c) A、B 电压均为低，要求分别画出图 12.33 所示或非门的等效电路(与图 12.32(b)和(c)相似)，并写出栅极电压的真值表。

答案：如图 12.34 所示。

练习 12.15　画出三输入或非门的电路图。

答案：如图 12.35 所示。



A	B	V_{out}
低	低	高
低	高	低
高	低	低
高	高	低

(d) 真值表

图 12.34　练习 12.14 的答案

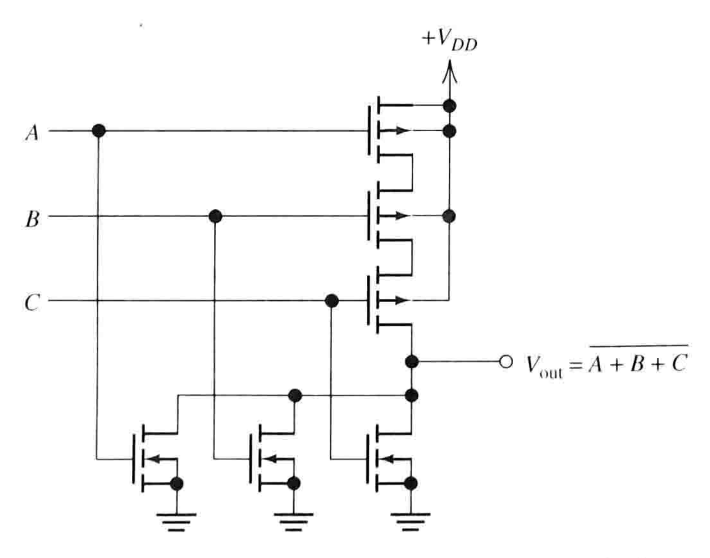


图 12.35　三输入 CMOS 或非门（练习 12.15 的答案）

12.7.4　小结

在第 7 章，我们知道复杂的组合逻辑电路可以通过连接多个与非门或者或非门来实现，而逻辑门电路还可以构成触发器，将触发器进行搭接可构成寄存器。一个复杂的数字系统（例如计算机）是由许多门电路、触发器和寄存器组成的，因此逻辑门电路是复杂数字系统的基本元件。

现代技术能够通过掺杂、氧化和金属连接等工艺实现在小块硅片上集成数百万个 CMOS 门电路，而且加工工艺已减少到20 步左右，这样，研制功能更强大的计算机所需的成本也大大减少了。

实际应用 12.1 请问鳟鱼将往哪里走?

鱼生物学家需要经常研究各种鱼类的迁移，以帮助人们根据鱼类栖息地的改变来调整捕鱼地点，其中一个例子便是在美加交界的苏必略湖的各条支流上重新建立鳟鱼的栖息地。鳟鱼会从它们出生的河流游到苏必略湖，在那里长得比那些生活在原来的河流里的鳟鱼更大。当这些鳟鱼成年以后，就会回到河流里产卵。以前在苏必略湖的每条支流里都曾发现过鳟鱼，但是过度捕捞以及栖息地的改变使得在这些河流上已经很难找到鳟鱼了。现在，人们正在实施计划使鳟鱼回到那些河流里去。

获得鱼类迁移精确信息其中的一个重要方法就是为鱼植入射频识别(RFID)标签，然后通过天线监控河里鱼类的活动。RFID 系统有着非常广泛的应用，这里介绍一种具有代表性的 REID 系统。

用于鱼类研究的射频识别标签由一个铁氧体磁芯、一个 CMOS 集成电路芯片和两个电容器组成，体积仅一粒米左右。这些标签通过皮下注射植入到鱼体内，标签不含内部电源，所以称为无源识别标签(PIT)。

典型的河边鱼类观测站如图 PA12.1 所示。由于很多观测鱼类的重要位置都远离电网，所以这些监测站通常由太阳能板提供电量，为深层循环蓄电池供电，而天线则由一条经标杆悬挂在河面上空、另一条经石头压于河底的线路回路构成。

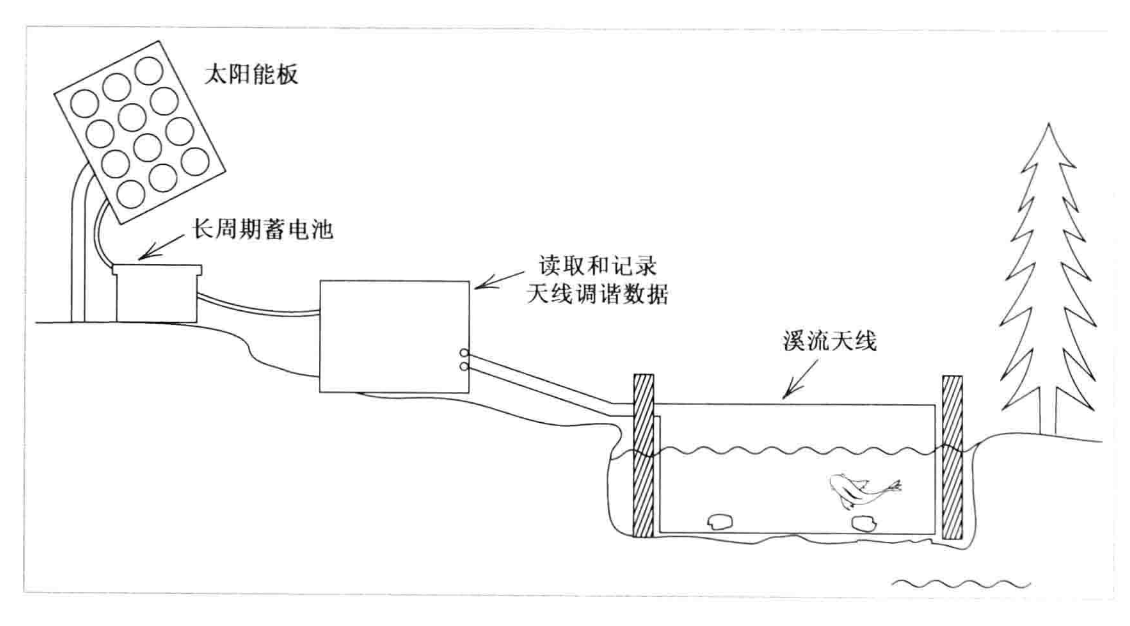


图 PA12.1 典型的观测站

一个具有代表性的 RFID 系统的原理图如图 PA12.2 所示。河里的天线用电感 L_1 表示，其值从10 μH 到 100 μH 不等。电容 C_1 称为天线调谐器，和 L_1 形成一个共振频率为 134.2 kHz 的并联共振回路。RFID 标签中的线圈同样形成一个天线，用电感 L_2 表示，与电容 C_2 一起也形成了一个并联共振回路。

运行时开关定期置于触点 A，为河里的天线提供频率为 134.2 kHz 的正弦波，这样便在天线附近产生一个交流磁场。当一条被植入了标签的鱼通过天线时，L_2 和磁场耦合，产生一个频率

为 134.2 kHz 的电压加于 CMOS 集成芯片的输入端。该电压由芯片内部的二极管整流，加至芯片充电电容 C_3。大约 50 ms 后，开关自动置于触点 B，此时提供给河里天线的电压变为零，C_3 将反向供电给 CMOS 芯片。当 CMOS 芯片接收一个完整的脉冲信号后，将产生一个 64 位的码字来分辨不同的鳟鱼及其特定标签。

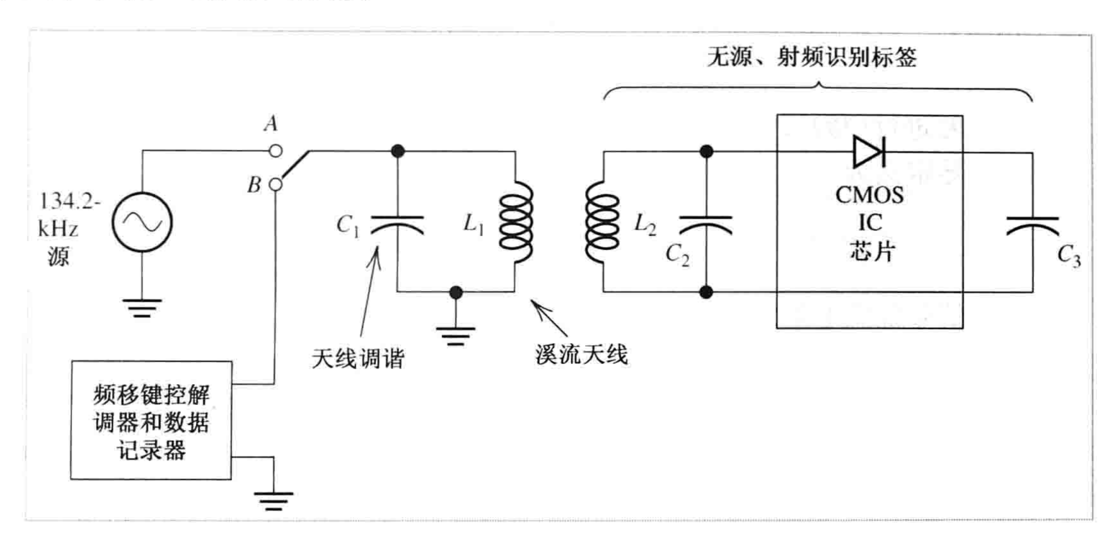


图 PA12.2　鳟鱼监测站的 RFID 系统原理图

通常用频移键控(FSK)方式来对每一个码字进行编码。频移键控是利用两个不同频率 F_1(134.2 kHz)和 F_2(123.2 kHz)的振荡源来代表信号 1 和 0，用数字信号的 1 和 0 去控制两个独立的振荡源(L_1C_1/L_2C_2)交替输出。对于 1 电平，芯片提供一组 16 个频率为 123.2 kHz 的信号给 L_2。反之，对于 0 电平，芯片则提供一组 16 个频率为 134.2 kHz 的信号给 L_2。然后通过与 L_1 的磁场耦合产生一个感应电压，提供给 FSK 解调器和数据记录器。FSK 解调器能分辨每组 16 个周期信号的频率，并确定每一位的值；数据记录器用来存储所得到的代码，以便鱼生物学家能够周期地分析这些数据。如果在河里放置另外一些传感器，数据记录器也可以用来记录另外一些数据，例如鱼游过观测站的时间、河流水温和水流速度等。

这个计划以及其他一些鱼类监控系统的更多信息详见以下网站：

http://www.biomak.com/

http://www.oregonrfid.com/

http://faculty.num.edu/jileonar/Research.htm

http://www.bio.mtu.edu/news/Huckins_may_05.htm

http://www.ti.com/rfid/

本章小结

1. n 沟道增强型场效应管的结构如图 12.1 所示。
2. MOSFET 是过去几十年数字电子技术快速发展的基本元件。
3. 在 NMOS 场效应管中，当栅极和源极间的电压为大(且为正极性)时，电子将被吸引到栅极附近区域，并在漏极和源极间产生一条 n 型沟道。这时，如果在漏极和源极间施加一个电压，电流将从漏极流入，然后穿过沟道从源极流出。漏极电流由栅极上所施加的电压控制。
4. MOSFET 的工作特性可以分为截止区、线性(三角)区和饱和区。

5. *KP* 值通常由制作过程的工艺所决定，但是在设计电路中，可以通过改变 *W/L* 的大小来得到满足不同电路要求的场效应管。
6. 可以利用图形(负载线)法来分析简单放大电路。
7. 由于漏极特性曲线的非等间距排列，使得 FET 放大器会产生非线性失真。不过，对于输入小信号，失真问题可忽略。
8. 偏置电路使 FET 通常工作在饱和区，才能完成放大的功能。
9. 在对小信号进行中频带分析时，FET 可以等效为图 12.20 所示的等效电路。
10. FET 的互导定义为

$$g_m = \left.\frac{\partial i_D}{\partial v_{GS}}\right|_{Q点}$$

11. FET 的小信号漏极电阻定义为：

$$\frac{1}{r_d} = \left.\frac{\partial i_D}{\partial v_{DS}}\right|_{Q点}$$

12. 在 FET 放大器的中频带分析中，耦合电容、旁路电容和直流源均视为短路，FET 则替代为小信号模型，由此得到电路方程，以及增益、输入阻抗和输出阻抗的表达式。
13. 为了计算放大器的输出电阻，需要让电路空载，以及用信号源的内阻代替信号源，然后计算从等效电路输出端看进去的电阻，即输出电阻。
14. 共源极放大器是反相放大器，其电压增益大于 1。
15. FET 源极和地之间的非旁路阻抗大大降低了共源极放大器的增益。
16. 源极跟随器具有接近于 1 的电压增益、较大的电流增益以及相对较低的输出阻抗，并且源极跟随器是同相输出的。
17. 复杂的数字系统能通过数以百万计的 PMOS 和 NMOS 管的相互连接来构成，而这些场效应管只需要较少的步骤便能在同一个芯片上生产出来。

习题

12.1 节 NMOS 和 PMOS 晶体管

P12.1 画出一个 n 沟道增强型 MOSFET 的物理结构图，标注沟道长度 L、宽度 W、各极和沟道区域，并画出相应的电路符号。

P12.2 针对 n 沟道 MOSFET，写出漏极电流 i_D 的表达式，以及分别在截止区、饱和区和可变电阻区时 v_{GS}、v_{DS}、v_{GD} 的取值范围，设阈值电压为 V_{to}。

*P12.3 某 NMOS 管的参数为：$KP = 50\ \mu A/V^2$，$V_{to} = 1$ V，$L = 5\ \mu m$，$W = 50\ \mu m$。试计算以下各种情况下漏极电流的大小，并判断晶体管工作在哪个区：(a) $v_{GS} = 4$ V，$v_{DS} = 10$ V；(b) $v_{GS} = 4$ V，$v_{DS} = 2$ V；(c) $v_{GS} = 0$ V，$v_{DS} = 10$ V。

*P12.4 假设某 NMOS 晶体管的参数为：$KP = 50\ \mu A/V^2$，$V_{to} = 1$ V，$L = 10\ \mu m$，$W = 200\ \mu m$。画出当 v_{DS} 从 0 V 到 10 V，v_{GS} 分别等于 0 V、1 V、2 V、3 V 和 4 V 时，该晶体管的漏极特性曲线。

P12.5 一个 n 沟道增强型 MOSFET 的 $V_{to} = 1$ V，$K = 0.1\ mA/V^2$，已知 $v_{GS} = 4$ V，问 v_{DS} 的取值范围多大可保证器件工作在饱和区？画出 $i_D \sim v_{GS}$ 的曲线。

P12.6 假设某 NMOS 晶体管的阈值电压 $V_{to} = 1$ V。请问以下各种情况下该元件分别工作在哪个区：(a) $v_{GS} = 5$ V，$v_{DS} = 10$ V；(b) $v_{GS} = 3$ V，$v_{DS} = 1$ V；(c) $v_{GS} = 3$ V，$v_{DS} = 6$ V；(d) $v_{GS} = 0$ V，$v_{DS} = 5$ V？

P12.7 如果将一个增强型 NMOSFET 的栅极与漏极短接，在漏极施加一个大于阈值电压的电源，该器件将工作于什么特性区？如果施加的电压低于阈值电压呢？

P12.8 确定图 P12.8 所示各增强型场效应管的工作区，其中，场效应管的参数：$|V_{to}| = 1$ V，$K = 0.1$ mA/V^2。

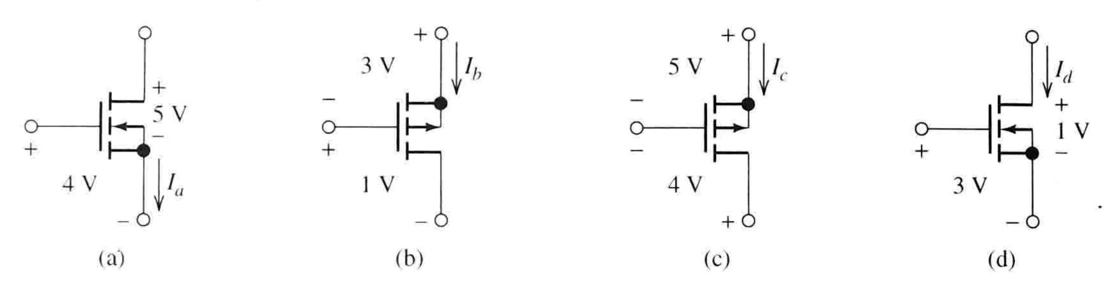


图 P12.8

P12.9 已知某 NMOS 管的参数：$KP = 50$ μA/V^2，$V_{to} = 1$ V。试确定该晶体管沟道宽度与长度（W/L）的比值，以满足当 $v_{GS} = v_{DS} = 5$ V 时 $i_D = 2$ mA 的要求。若 $L = 2$ μm，W 等于多少？

P12.10 由于加工工艺的限制，沟道长度 L 与宽度 W 不能小于 0.25 μm。另一方面，为了节约芯片的面积，L 和 W 不能超过 2 μm。对于一个已知晶体管，如何选择 L 和 W 的长度而达到最小的漏极电流呢？又如何达到最大的漏极电流呢？对不同尺寸的晶体管采用同样的外加电压，电流之比为多少？

*P12.11 已知某 NMOS 晶体管在饱和区内的两个工作点分别为：$v_{GS} = 2$ V，$i_D = 0.2$ mA 和 $v_{GS} = 3$ V，$i_D = 1.8$ mA。试计算该晶体管 V_{to} 和 K 的大小。

P12.12 假设一个 NMOSFET 工作在可变（压控）电阻区，如图 12.4 所示，$v_{DS} \ll v_{GS} - V_{to}$。试根据器件参数和电压来推导沟道电阻的近似表达式，已知：$V_{to} = 0.5$ V，$K = 0.1$ mA/V^2。试计算当 $v_{GS} = 0.5$ V、1 V、1.5 V 和 2 V 时的电阻值。

P12.13 如图 P12.13 所示的两个增强型场效应管，当 V_{in} 分别为 0 V、5 V 时，分别分析器件的工作区，并计算漏极电流值。已知：$|V_{to}| = 1$ V，$K = 0.2$ mA/V^2。

P12.14 如图 P12.14 所示的增强型场效应管，已知 $V_{to} = 1$ V，$K = 0.5$ mA/V^2，要求计算 R 值。

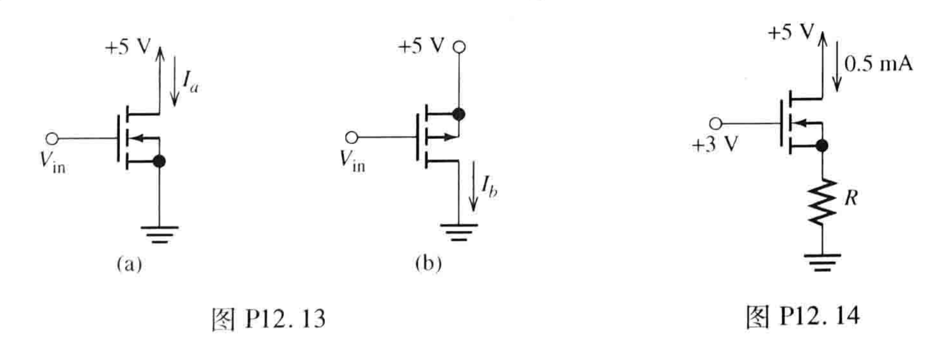


图 P12.13　　图 P12.14

*P12.15 已知某 p 沟道增强型 MOSFET 的参数 $V_{to} = 1$ V，$K = 0.5$ mA/V^2。假设其工作在饱和区，试计算当 $i_D = 0.8$ mA 时 v_{GS} 的大小。

12.2 节 一个简单 NMOS 放大器的负载线分析

P12.16 FET 放大器发生失真的主要原因是什么？

*P12.17 电路如图 12.10 所示，分别有如下参数：

(a) $R_D = 1$ kΩ 和 $V_{DD} = 20$ V；

(b) $R_D = 2$ kΩ 和 $V_{DD} = 20$ V；

(c) $R_D = 3$ kΩ 和 $V_{DD} = 20$ V。

要求在 $i_D \sim v_{DS}$ 的坐标系下绘制负载线。当 R_D 增加时，负载线有何变化规律？

P12.18 如图 12.10 所示电路，试在 $i_D \sim v_{DS}$ 坐标图上画出以下各种情况下的负载线，并说明当 V_{DD} 增加时，负载线的位置将如何变化？

(a) $R_D = 1\ \text{k}\Omega$, $V_{DD} = 5\ \text{V}$

(b) $R_D = 1\ \text{k}\Omega$, $V_{DD} = 10\ \text{V}$

(c) $R_D = 1\ \text{k}\Omega$, $V_{DD} = 15\ \text{V}$

*P12.19 分析电路如图 12.10 所示，场效应管特性曲线如图 12.11 所示。假设 V_{GG} 变为 0，试计算 V_{DSQ}、$V_{DS\min}$ 和 $V_{DS\max}$ 的大小以及放大器的增益。

P12.20 分析图 P12.20 所示放大器：

(a) 计算 $v_{GS}(t)$。当输入交流信号时，耦合电容等效为短路；当输入为直流信号时，耦合电容等效为开路。（提示：对交流源和直流源应用叠加原理。）

(b) 若 FET 的 $V_{to} = 1\ \text{V}$，$K = 0.5\ \text{mA/V}^2$，画出当 v_{GS} 分别等于 1 V、2 V、3 V 和 4 V 时的漏极特性曲线。

(c) 在特性曲线上画出放大器的负载线。

(d) 计算 V_{DSQ}、$V_{DS\min}$ 和 $V_{DS\max}$。

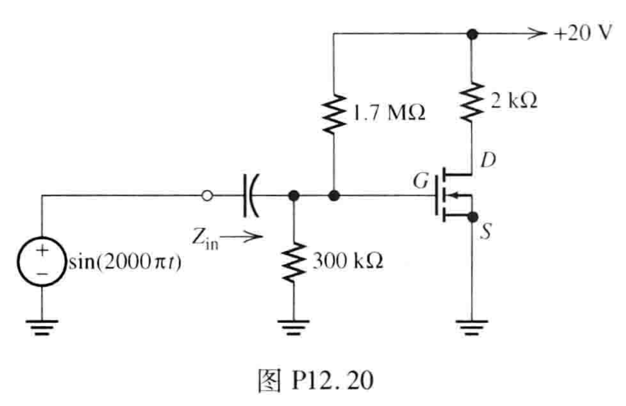


图 P12.20

*P12.21 如图 P12.20 所示，如果要求器件的工作点始终在饱和区，问 R_D 的最大值为多少？

P12.22 利用负载线法分析图 P12.22 所示电路，确定 V_{DSQ}、$V_{DS\min}$ 和 $V_{DS\max}$ 的大小。其中，FET 的特性曲线如图 12.21 所示。（提示：首先用戴维南等效电路代替电阻和 15 V 电源。）

P12.23 如图 12.10 所示，将电阻 R_D 替换为一个特别的二端非线性器件（$v = 0.1 i_D^2$），电流单位为 mA，电压单位是 V（参考极性为正）。要求在图 12.11 上绘制负载线，并回答负载线的形状如何？

P12.24 用负载线分析法分析如图 P12.24 所示的 PMOS 放大器，已知晶体管的特性曲线如图 12.9 所示，计算 $v_o(t)$ 的最大值、最小值和 Q 值。

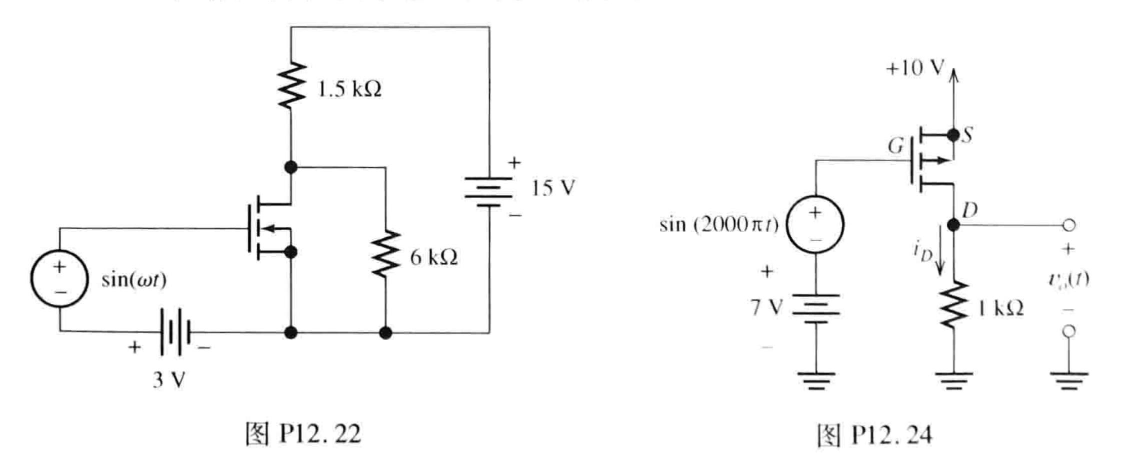


图 P12.22　　　　图 P12.24

P12.25 如图 12.12(b) 所示的失真信号 $v_{DS}(t) = V_{DC} + V_{1m}\sin(2000\pi t) + V_{2m}\cos(4000\pi t)$，其中，$V_{1m}\sin(2000\pi t)$ 是需要的信号，$V_{2m}\cos(4000\pi t)$ 是失真信号，其频率两倍于输入信号频率，称

为二次谐波失真。要求：计算 V_{1m}、V_{2m} 的值以及二次谐波的失真率（定义为 $|V_{2m}/V_{1m}|\times 100\%$，注意：一个高质量的音频放大器的失真率应该低于 0.1%）。

12.3 节　偏置电路

P12.26　为什么在放大电路中需要让 MOSFET 偏置于工作点？当信号的最大振幅小于 1 V，场效应管的 $V_{to}=1$ V，且偏置电路使场效应管的 $V_{GSQ}=0$ 时将会发生什么？

*P12.27　如图 P12.27 所示的电路，MODFET 的 $K=0.25$ mA/V²，$V_{to}=1$ V。要求计算 I_D 和 V_{DSQ}。

*P12.28　某 NMOS 源极跟随器的 $V_{DD}=12$ V，$R_D=0$，$R_1=1$ MΩ。场效应管的参数为：$KP=50$ μA/V²，$V_{to}=1$ V，$L=10$ μm，$W=800$ μm。试确定固定增益自偏置电路的 R_2 和 R_S 的大小，以满足源极跟随器的 $V_{DSQ}=6$ V，$I_{DQ}\approx 2$ mA。

*P12.29　图 P12.29 所示电路的晶体管参数为：$KP=50$ μA/V²，$W=600$ μm，$L=20$ μm，$V_{to}=1$ V，试确定电阻 R_1 和 R_S 的大小。

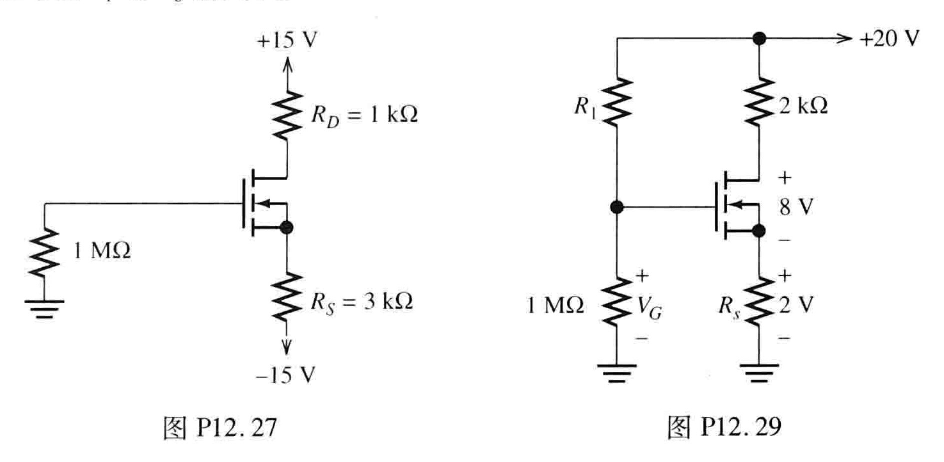


图 P12.27　　图 P12.29

P12.30　固定增益自偏置电路如图 12.13 所示，其中 $V_{DD}=15$ V，$R_1=2$ MΩ，$R_2=1$ MΩ，$R_S=4.7$ kΩ，$R_D=4.7$ kΩ；MOSFET 的参数 $V_{to}=1$ V，$K=0.25$ mA/V²。试确定其 Q 点。

P12.31　如图 P12.31 所示电路，分别确定以下两种情况下 I_{DQ} 的大小。(a) $V_{to}=4$ V，$K=1$ mA/V²；(b) $V_{to}=2$ V，$K=2$ mA/V²。

P12.32　分析图 12.13(a)所示固定增益自偏置电路，其中 $V_{DD}=12$ V，$R_D=3$ kΩ，$R_1=1$ MΩ；场效应管的参数 $KP=50$ μA/V²，$V_{to}=1$ V，$L=10$ μm，$W=80$ μm。试确定当 $V_{DSQ}=6$ V，$I_{DQ}\approx 1$ mA 时，R_2 和 R_S 的大小。

P12.33　如图 P12.33 所示 MOSFET 电路，已知 $K=0.25$ mA/V²，$V_{to}=1$ V，试计算 I_{DQ} 和 V_{DSQ}。

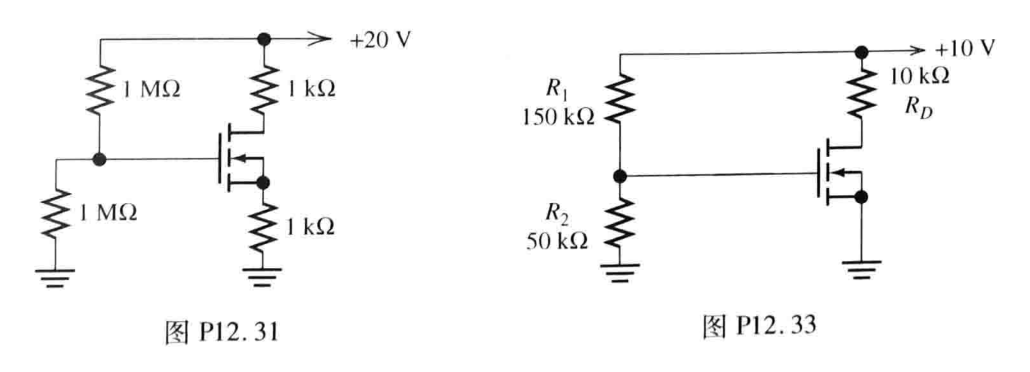


图 P12.31　　图 P12.33

*P12.34　如图 P12.34 所示电路，场效应管的参数 $V_{to}=1$ V，$K=0.25$。要求计算 I_{DQ} 和 V_{DSQ}。

P12.35　如图 P12.35 所示，两个晶体管的参数均为 $KP=100$ μA/V²，$V_{to}=0.5$ V。已知 $i_{D1}=0.2$ mA，要求计算 R 的值。如果第二个晶体管需工作在饱和区，则 V_x 的取值范围如何？i_{D1} 为多大？如果 V_x 足够大，第二个晶体管已工作在饱和区，则此晶体管等效为何种理想元件？

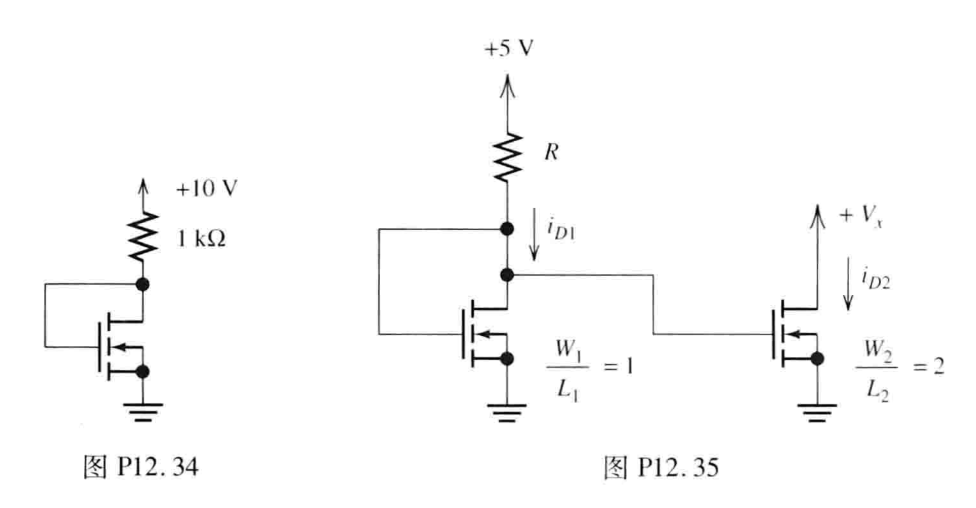


图 P12.34　　图 P12.35

12.4 节　小信号等效电路

P12.36　画出 FET(包含 r_d)的小信号等效电路。

P12.37　给出 g_m 和 r_d 的偏微分表达式。

P12.38　某个 NMOS 管的特性曲线表示在饱和区时 i_D 为常数，假设工作在饱和区，问 r_d 值是多少？

P12.39　当 $V_{DSQ}=0$ 时，g_m 为多少？画出在该静态工作点的小信号等效电路。这时的器件能够应用于什么场合呢？

*P12.40　对于一个工作在线性(三角)区的 NMOS 晶体管，已知 K、V_{to} 、I_{DQ} 和 V_{GSQ}，要求推导 g_m 的表达式。

*P12.41　对于一个工作在线性(三角)区的 NMOS 晶体管，已知 K、V_{to} 、I_{DQ} 和 V_{GSQ}，要求推导 r_d 的表达式。

P12.42　某 NMOS 晶体管的特性曲线如图 P12.42 所示，其中工作点为 $V_{DSQ}=6$ V，$V_{GSQ}=2.5$ V。试利用图形法确定 g_m 和 r_d 在工作点的值。

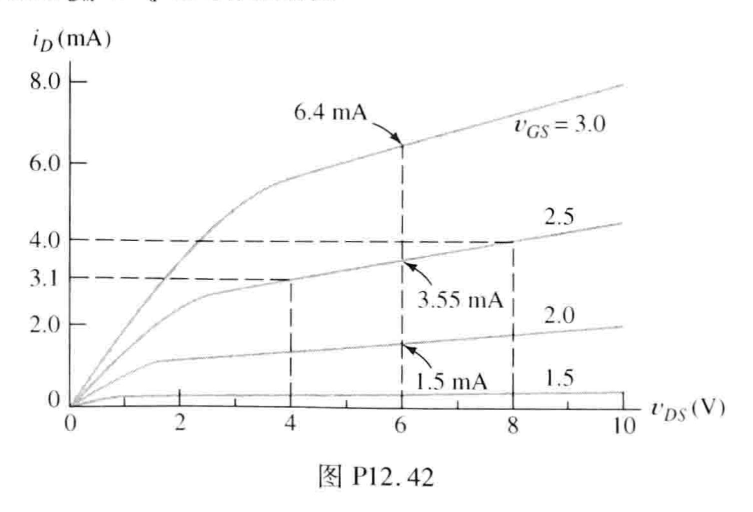


图 P12.42

P12.43　假设一个特殊的场效应管的特性为 $i_D=3v_{GS}^3+0.1v_{DS}$ ，其中，i_D 单位是 mA，v_{DS} 单位是 V。已知静态工作点 $V_{GSQ}=1$ V，$V_{DSQ}=10$ V，要求计算 g_m 和 r_d 值。

P12.44　假设一个特殊的场效应管的特性为 $i_D=3\exp(v_{GS})+0.01v_{DS}^2$ ，其中，i_D 单位是 mA，v_{GS}、v_{DS} 单位是 V。已知静态工作点 $V_{GSQ}=1$ V，$V_{DSQ}=10$ V，要求计算 g_m 和 r_d 值。

P12.45　假设在 Q 点 $I_{DQ}=4$ mA，$V_{GSQ}=2$ V，$V_{DSQ}=10$ V 处，某 NMOS 晶体管的 $g_m=2$ ms，$r_d=5$ kΩ。试画出当 v_{GS} 分别等于 1.8 V、2.0 V 和 2.2 V，$v_{DS}<11.0$ V 时，Q 点附近的漏极特性曲线。

P12.46　某 NMOS 晶体管具有以下关系：

$$v_{GS}(t)=1+0.2\sin(\omega t)\ \text{V}$$

$$v_{DS}(t)=4\ \text{V}$$

$$i_D(t)=2+0.1\sin(\omega t)\ \text{mA}$$

请问：由以上关系可以确定哪个小信号参数（g_m 还是 r_d）？它的值为多少？确定此时的静态工作点 Q（V_{GSQ}、V_{DSQ} 和 I_{DQ}）。

P12.47　某 NMOS 晶体管具有以下关系：

$$v_{GS}(t) = 2\ \text{V}$$
$$v_{DS}(t) = 5 + 2\sin(\omega t)\ \text{V}$$
$$i_D(t) = 3 + 0.01\sin(\omega t)\ \text{mA}$$

请问：由以上关系可以确定哪个小信号参数（g_m 还是 r_d）？它的值为多少？确定此时的静态工作点 Q（V_{GSQ}、V_{DSQ} 和 I_{DQ}）。

12.5 节　共源极放大器

P12.48　耦合电容的功能是什么？在交流电路中可等效为什么？在计算一个放大器的增益时，耦合电容与频率响应的关系是什么？

P12.49　画出一个阻容耦合共源极放大器的电路图。

*P12.50　分析图 P12.50 所示的共源极放大器。其中 NMOS 管的参数 $KP = 50\ \mu\text{A/V}^2$，$V_{to} = 1$ V，$L = 5\ \mu\text{m}$，$W = 500\ \mu\text{m}$，$r_d = \infty$。

(a) 确定 V_{GSQ}、V_{DSQ} 和 I_{DQ} 的大小。

(b) 计算电压增益、输入电阻和输出电阻。假设在交流信号作用下耦合电容等效为短路。

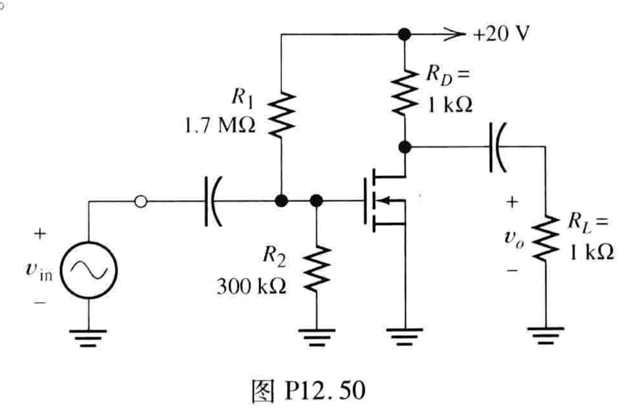


图 P12.50

P12.51　当 NMOS 场效应管的参数 $KP = 50\ \mu\text{A/V}^2$，$V_{to} = 2$ V，$L = 20\ \mu\text{m}$，$W = 600\ \mu\text{m}$，$r_d = \infty$ 时，重做习题 P12.50，并同习题 P12.50 比较增益值的不同。

P12.52　分析图 P12.52 所示放大器。

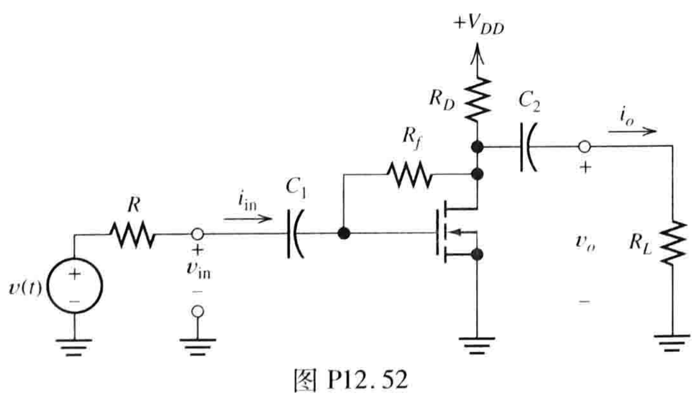


图 P12.52

(a) 画出小信号等效电路，假设电容对于输入信号等效为短路。

(b) 假设 $r_d = \infty$，试推导电压增益、输入电阻和输出电阻的表达式。

(c) 若 $R = 100\ \text{k}\Omega$，$R_f = 100\ \text{k}\Omega$，$R_D = 3\ \text{k}\Omega$，$R_L = 10\ \text{k}\Omega$，$V_{DD} = 20$ V，$V_{to} = 5$ V 以及 $K = 1\ \text{mA/V}^2$，计算在 Q 点处 I_{DQ} 和 g_m 的值。

(d) 将要求(c)中的参数值代入要求(b)推导的表达式，计算参数值。

(e) 如果 $v(t) = 0.2\sin(2000\pi t)$，试计算 $v_o(t)$ 的值。

(f) 判断这是一个反相放大器还是一个同相放大器。

*P12.53　已知 FET 如图 12.53 所示，已知 $V_{to} = 3$ V，$K = 0.5\ \text{mA/V}^2$，计算 V_{DSQ} 和 I_{DQ}，以及静态工作点的 g_m 值。假设 $r_d = \infty$，画出小信号等效电路。根据 R_D 和 g_m 推导电阻 R_o 的表达式，代入数据进行计算。

12.6 节 源极跟随器

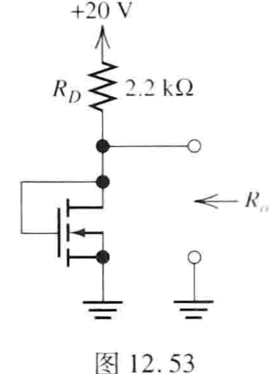


图 12.53

P12.54 画出一个阻容耦合源极跟随器的电路图。

P12.55 分析共源极放大器和源极跟随器的基本原理。当需要电压增益大于 1 或者需要较小的输出电阻时，应该分别选择哪一种放大器？

*P12.56 分析图 12.26 所示的源极跟随器，其中 V_{DD} = 15 V，R_L = 2 kΩ，R_1 = 1 MΩ，R_2 = 2 MΩ；场效应管的参数 $KP = 50\ \mu A/V^2$，V_{to} = 1 V，L = 10 μm，W = 160 μm，$r_d = \infty$。计算 R_S 为何值时，I_{DQ} = 2 mA？并计算电压增益、输入电阻和输出电阻。

P12.57 图 12.29 所示的共栅极放大器的分析见练习 12.13。已知 V_{DD} = 15 V，V_{SS} = 15 V；R_S = 3 kΩ，R_L = 10 kΩ，R_D = 3 kΩ；场效应管的参数 $KP = 50\ \mu A/V^2$，V_{to} = 1 V，L = 10 μm，W = 600 μm，$r_d = \infty$。要求：

(a) 确定 Q 点以及 g_m 的值。

(b) 计算输入电阻和电压增益。

12.7 节 CMOS 逻辑门

P12.58 画出 CMOS 反相器的电路图。画出输入为高电压时的等效电路（开关闭合或者断开）；画出输入为低电压时的等效电路。

P12.59 画出具有双输入端 CMOS 与门的电路图。（提示：利用两个与非门串接一个反相器。）

P12.60 (a) 画出具有 3 个输入端的 CMOS 与非门的电路图。

(b) 画出当三端输入均为高电平时的等效电路（开关闭合或者断开）。

(c) 画出当三端输入均为低电平时的等效电路（开关闭合或者断开）。

测试题

以下是一套测试题，以此检测自己是否掌握了本章的重要概念。测试题的答案在附录 E 中，详解则在在线学生资源的文档中。附录 F 说明了学生资源的详细信息。

T12.1 一个 NMOS 管的参数 $KP = 80\ \mu A/V^2$，V_{to} = 1 V，L = 4 μm，W = 100 μm，当 v_{DS} 在 0 ~ 10 V，v_{GS} 在 0.5 ~ 4 V 之间变化时，要求绘出漏极特性曲线。

T12.2 一个放大器类似于图 12.10，仅 R_D 改变为 2 kΩ，直流电压源改变为 V_{DD} = 10 V，V_{GG} = 3 V。晶体管的漏极特性曲线如图 12.7 所示，请采用负载线分析法计算 v_{DS} 的最小、最大和 Q 点的值。

T12.3 如图 T12.3 所示的偏置电路，晶体管的参数 $KP = 80\ \mu A/V^2$，V_{to} = 1 V，L = 4 μm，W = 100 μm。问：R_S 为何值时工作点的 I_{DQ} = 0.5 mA？

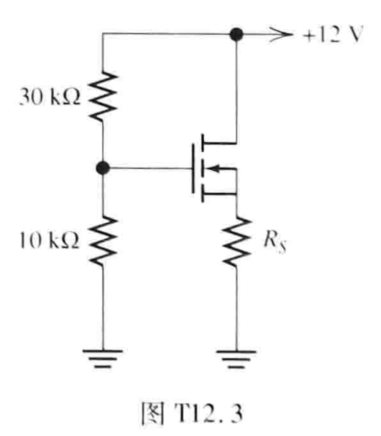


图 T12.3

T12.4 某个 NMOS 管的工作参数如下：$v_{GS}(t) = 2 + 0.02\sin(\omega t)$ V，$v_{DS}(t) = 5$ V，$i_D(t) = 0.5 + 0.05\sin(\omega t)$ mA。问：根据这些信息，能计算 g_m 还是 r_d 参数？结果是什么？此参数对应的 Q 点值（V_{GSQ}，I_{DQ}，V_{DSQ}）分别为多少？

T12.5 当绘制一个放大器的中频小信号等效电路时，如何替换以下电路元件：(a) 一个直流电压源；(b) 一个耦合电容；(c) 一个直流电流源。

T12.6 绘制一个 CMOS 反相器的电路图。问：当输入为高电平时，哪个晶体管处于闭合状态？哪个处于断开状态？

第13章　双极结型晶体管

本章学习目标

- 理解双极结型晶体管在放大电路中的工作原理
- 采用负载线法分析简单的放大器，并理解非线性失真的原因
- 采用大信号等效电路分析 BJT 电路
- 分析偏置电路
- 利用小信号等效电路分析 BJT 电路
- 计算放大器的几个重要配置参数
- 根据实际应用选择合适的放大器参数

本章简介

第12章分析了场效应管，它是现代电子技术中一种重要的电子元件。本章将分析另一种重要元件——双极结型晶体管(Bipolar Junction Transistor, BJT)，该晶体管不仅常用于放大器，在数字逻辑电路中同样非常重要，它与场效应管一起构成了现代电子技术的基础。

首先，将讨论元件参数，并以 *npn* 型 BJT 为例推导其电压与电流的关系式。然后分析共发射极 BJT 的特性曲线，用图形法展示元件的工作原理。最后，利用负载线法来分析简单的放大电路。在下面几节中，将讨论 BJT 分别在3个工作区(截止区、饱和区和线性放大区)时的大信号模型，并采用这些模型分析偏置电路。然后，推导 BJT 的小信号等效电路，并采用此等效电路分析两类主要的放大器(共发射极放大器和射极跟随器)。

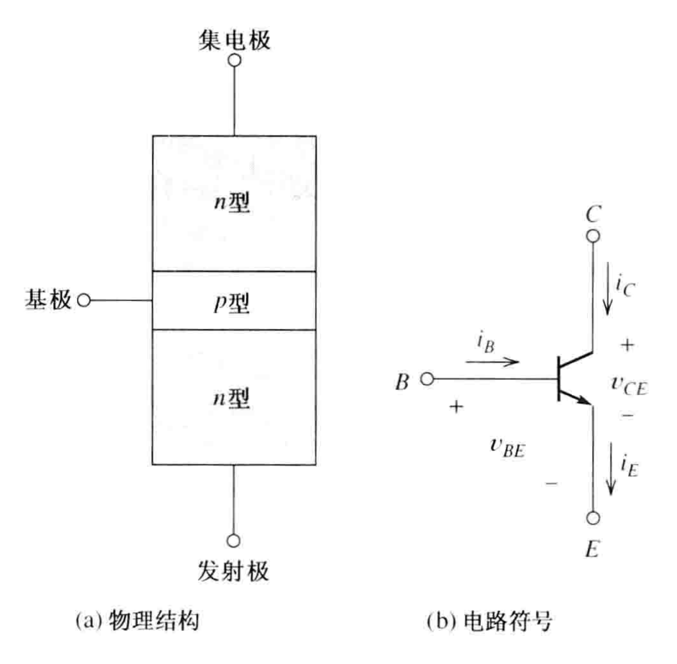
13.1　电流和电压的关系

BJT 是由掺入适当杂质的半导体材料(通常是硅)构成的。由于掺入杂质的不同产生 *n* 型或者 *p* 型半导体。*n* 型材料主要由电子导电，而 *p* 型材料则主要依靠带正电的空穴导电。*npn* 晶体管是由一层 *p* 型材料夹在两层 *n* 型材料之间构成的，结构如图13.1(a)所示，每个 *pn* 结形成一个二极管，但是如果同处于一个半导体晶体管中的两个 *pn* 结离得太近，其电流就会相互影响，使得 BJT 成为一种特别的电子元件。

如图13.1(a)所示，BJT 有3层，分别称为集电区、基区和反射区，对应的3个引出端分别称为集电极、基极和发射极。BJT 的电路符号如图13.1(b)所示，箭头表示电流参考方向。

13.1.1　流体模型

从某种程度上讲，BJT 就像是流体流动系统中的阀门。在一个适当的电路中，如果有一个小电流流入基极，那么一个大电流就会从集电极流入、从发射极流出，就像是基极电流打开了集电极与发射极之间的阀门，基极电流越大，阀门打开得越大。当一个待放大信号加于基极时，该信号就按照电流变化规律打开或者关闭集电极和发射极间的阀门，使得集电极和发射极间的放大电流不断流动。

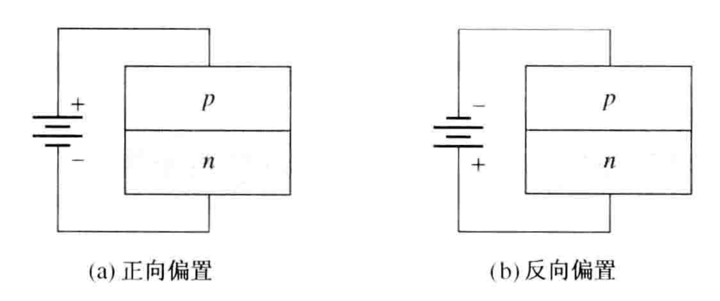


(a) 物理结构　　(b) 电路符号

图 13.1　*npn* 的 BJT

13.1.2 运行特性方程

如图 13.2 所示，当外加电压的正极和 *pn* 结的 *p* 区相连时，*pn* 结正向偏置，而当外加电压的正极和 *pn* 结的 *n* 区相连时，*pn* 结反向偏置。



(a) 正向偏置　　(b) 反向偏置

图 13.2　*pn* 结的偏置情况

在 BJT 作为一个放大器工作时，基极和集电极间的 *pn* 结反偏，而基极和发射极间的 *pn* 结正偏。如果无特别说明，本书中的偏置情况均如此定义。

肖克莱(Shockley)提出的用基极-发射极(发射结)电压 v_{BE} 表示的发射极电流 i_E 的方程如下，这个方程称为肖克莱方程。

$$i_E = I_{ES}\left[\exp\left(\frac{v_{BE}}{V_T}\right) - 1\right] \tag{13.1}$$

除了意义不同以外，这个方程与式(10.1)二极管的电流方程是一致的。发射极电流 i_E 的饱和电流 I_{ES} 与元件的尺寸及其他一些因素有关，其典型值从10^{-12}到10^{-16}不等。前面已知，当温度为 300 K 时，V_T 约等于 26 mV。

根据基尔霍夫电流定律，流出 BJT 的电流应等于流入的电流，因此参考图 13.1(b)有：

$$i_E = i_C + i_B \tag{13.2}$$

注意：无论 *pn* 结如何偏置，上式均成立。

定义集电极电流与发射极电流的比值为 α：

$$\alpha = \frac{i_C}{i_E} \tag{13.3}$$

α 的取值为 0.9 ~ 0.999，其中 0.99 为 α 的典型值。

式(13.2)表示发射极电流由流过基极和集电极的电流共同组成，但是 α 接近于 1，表示发射极电流主要由集电极电流构成。

将式(13.1)代入式(13.3)并整理，得：

$$i_C = \alpha I_{ES}\left[\exp\left(\frac{v_{BE}}{V_T}\right) - 1\right] \tag{13.4}$$

其中，当 v_{BE} 大于零点几伏时，括号内的指数远远大于 1，因此括号内的 1 可以忽略。定义反向饱和电流为

$$I_s = \alpha I_{ES} \tag{13.5}$$

因此，式(13.4)改写为

$$i_C \approx I_s \exp\left(\frac{v_{BE}}{V_T}\right) \tag{13.6}$$

从式(13.3)中解出 i_C 代入式(13.2)，并解出基极电流得：

$$i_B = (1-\alpha)i_E \tag{13.7}$$

既然 α 略小于 1，因此仅有很小部分的发射极电流由基极电流提供。由式(13.1)消去 i_E，得：

$$i_B = (1-\alpha)\, I_{ES}\left[\exp\left(\frac{v_{BE}}{V_T}\right) - 1\right] \tag{13.8}$$

定义 β 为集电极电流与基极电流之比。由式(13.4)和式(13.8)，得：

$$\beta = \frac{i_C}{i_B} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \tag{13.9}$$

β 的值从 10 到 1000 不等，典型值为 $\beta = 100$。上式改写为

$$i_C = \beta i_B \tag{13.10}$$

当 β 远远大于 1 时，集电极电流即是放大了的基极电流。电流流过 npn 型 BJT 的示意图如图 13.3 所示。

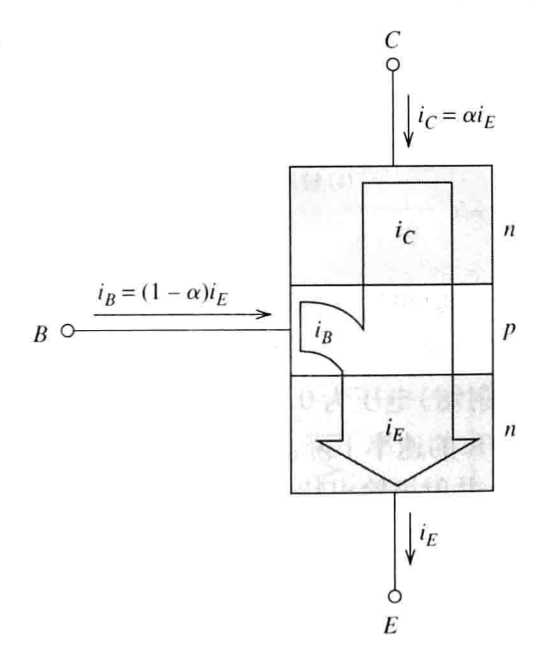
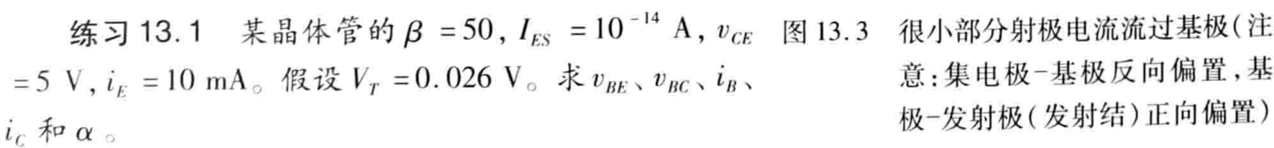


图 13.3　很小部分射极电流流过基极(注意：集电极-基极反向偏置，基极-发射极(发射结)正向偏置)



练习 13.1　某晶体管的 $\beta = 50$，$I_{ES} = 10^{-14}$ A，$v_{CE} = 5$ V，$i_E = 10$ mA。假设 $V_T = 0.026$ V。求 v_{BE}、v_{BC}、i_B、i_C 和 α。

答案： $v_{BE} = 0.718$ V，$v_{BC} = -4.28$ V，$i_B = 0.196$ mA，$i_C = 9.8$ mA，$\alpha = 0.980$。

练习 13.2　计算当 α 分别等于 0.9、0.99 和 0.999 时相应的 β 值。

答案： $\beta = 9$，$\beta = 99$，$\beta = 999$。

练习 13.3　某晶体管的基极-发射极(发射结)正向偏置，基极-集电极(集电结)反向偏置。假设其 $i_C = 9.5$ mA，$i_E = 10$ mA，求 i_B、α 和 β。

答案： $i_B = 0.5$ mA，$\alpha = 0.95$，$\beta = 19$。

13.2 共射极接法的特性曲线

npn 型 BJT 的共射极连接如图 13.4 所示。连接在基极和发射极的正电压 v_{BE} 使基极-发射极正偏，在集电极和发射极间也接有一个正电压 v_{CE}，所以基极与集电极间的电压为

$$v_{BC}=v_{BE}-v_{CE} \tag{13.11}$$

当 v_{CE} 大于 v_{BE} 时，基极-集电极(集电结)电压 v_{BC} 为负。此时，基极-集电极(集电结)反向偏置。

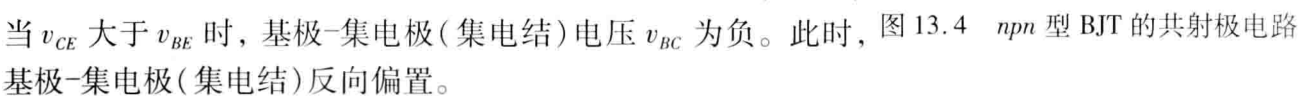


图 13.4 *npn* 型 BJT 的共射极电路

晶体管的共射极特性曲线是电流 i_B、i_C 与电压 v_{BE}、v_{CE} 的关系曲线。某个硅 *npn* 晶体管元件的特性曲线如图 13.5 所示，该曲线具有代表性。

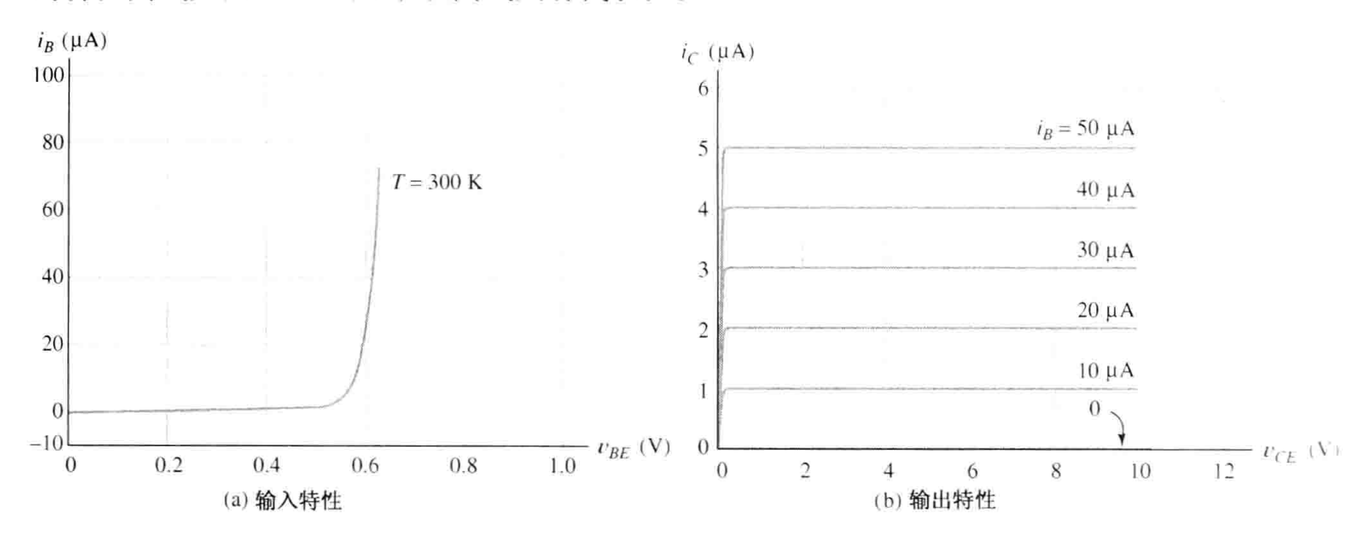


图 13.5 典型 *npn* 型 BJT 的共射极特性曲线

共射极输入特性曲线如图 13.5(a)所示，是由式(13.8)画出的 i_B 与 v_{BE} 的关系曲线。它与正向偏置二极管的特性曲线具有相同的形状，因此，在室温下流过适当的电流时，基极-发射极(发射结)电压为 0.6 ~0.7 V。注意：一定电流产生的基极-发射极(发射结)电压随着温度按 2 mV/K 的速率下降。

共射极输出特性曲线如图 13.5(b)所示，是 i_B 一定时 i_C 与 v_{CE} 的关系曲线。若图中晶体管的 $\beta=100$，且集电极-基极反向偏置($v_{BC}\leqslant 0$, $v_{CE}>v_{BE}$) 时，则有：

$$i_C=\beta i_B=100 i_B$$

当 v_{CE} 小于 v_{BE} 时，若基极-集电极(集电结)正向偏置，集电极电流就会急剧下降，如输出特性曲线的左侧边沿。

13.2.1 BJT 的应用

由图 13.5(b)可见，基极-发射极(发射结)电压 v_{BE} 的微小变化会引起基极电流 i_B 的较大变化，特别是如果基极-发射极(发射结)正偏时，在 v_{BE} 没有变化前就有电流流过(例如，i_B = 40 μA的那一条曲线)。当 v_{CE} 远远大于零点几伏时，基极电流的变化将使集电极电流 i_C 产生更大的变化(因为 $i_C=\beta i_B$)。在一定的电路中，这种集电极电流的变化还可以转变为比输入电压 v_{BE} 变化更大的电压变化。因此，BJT 可以用来放大加在基极-发射极(发射结)间的信号。

例 13.1　由特性曲线计算 β 值。

根据图 13.5 所示的特性曲线证明 $\beta = 100$。

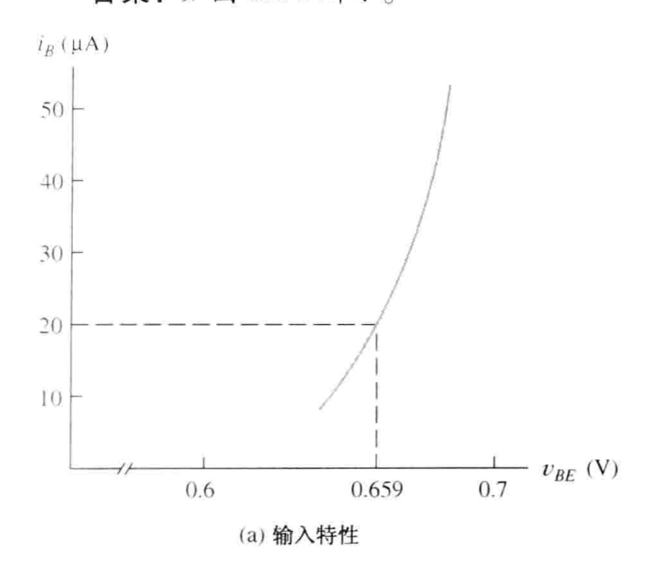
解：当 v_{CE} 较高，使得集电极-基极之间处于反向偏置时，β 为集电极电流和基极电流之比。例如，当 $v_{CE} = 4$ V，$i_B = 30$ μA 时，$i_C = 3$ mA。所以，β 为

$$\beta = \frac{i_C}{i_B} = \frac{3\ \text{mA}}{30\ \mu\text{A}} = 100$$

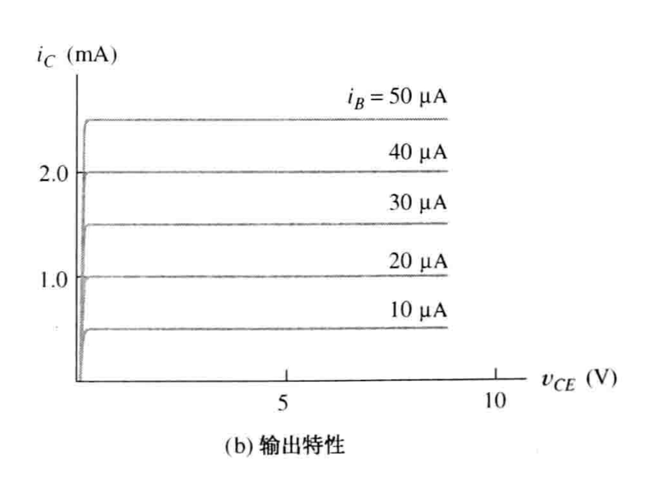
注意：对于大多数晶体管，输出特性曲线上工作点位置的稍许不同将导致 β 值的不同。

练习 13.4　假设 $I_{ES} = 10^{-14}$，$\beta = 50$，试画出 *npn* 型硅晶体管在温度为 300 K 时的共射极特性曲线。要求 i_B 以 10 μA 为步长(或间隔)从 0 变化到 50 μA。(提示：利用输入特性曲线，由式(13.8)计算当 i_B 分别等于 10 μA、20 μA 等时的 v_{BE} 值。除了 i_C 的刻度不同以外，输出特性曲线与图 13.5(b)所示相似。)

答案：如图 13.6 所示。



(a) 输入特性



(b) 输出特性

图 13.6　练习 13.4

13.3　共射极放大器的负载线分析法

图 13.7 所示为一个简单的 BJT 放大电路，直流电压源 V_{BB} 和 V_{CC} 使放大器偏置于某工作点，以使得交流输入电压 $v_{in}(t)$ 能够输入放大器。我们将证明集电极与地之间的电压是被放大了的输入电压。

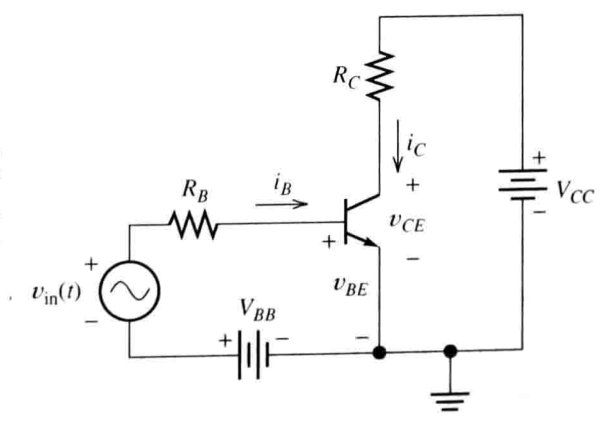


图 13.7　负载线法分析简单共射极放大器

13.3.1　输入电路的分析

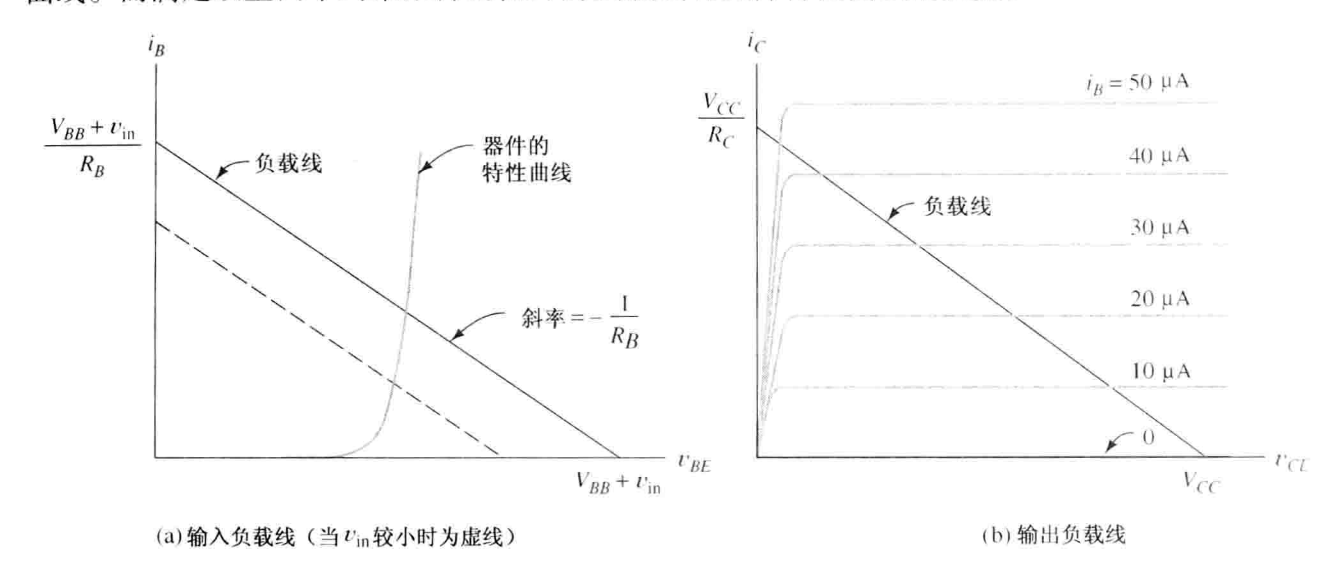
本节将利用与第 10 章分析二极管电路相似的负载线法来分析这个电路。根据基尔霍夫电压定律，得：

$$V_{BB} + v_{in}(t) = R_B i_B(t) + v_{BE}(t) \tag{13.12}$$

上式在图 13.8(a)所示输入特性曲线上的图形即为负载线。要画出负载线，必须首先确定两个点。首先假设 $i_B = 0$，由式(13.12)得 $v_{BE} = v_{BB} + v_{in}$，这一点是负载线与电压轴的交点。同

样，假设 $v_{BE}=0$，得 $i_B(t)=(v_{BB}+v_{in}(t))/R_B$，而这一点是负载线与电流轴的交点。连接这两点，得到的负载线如图 13.8(a)所示。

式(13.12)表示外部电路对 i_B 和 v_{BE} 值的约束。除此之外，i_B 和 v_{BE} 还需要满足元件的特性曲线。而满足以上两个约束条件的值即为负载线和元件特性曲线的交点。



(a) 输入负载线（当 v_{in} 较小时为虚线）　　(b) 输出负载线

图 13.8　图 13.7 放大器的负载线分析

因为负载线的斜率等于 $-1/R_B$，所以即使由于 v_{in} 的变化使得负载线位置发生变化，其斜率仍保持恒定。例如图 13.8(a)中虚线所示，其 v_{in} 值小于实线的 v_{in}。

$v_{in}(t)$ 等于零所对应的点称为静态工作点(Quiescent Operating Point)，也称为 Q 点。因此，当交流输入电压 $v_{in}(t)$ 随时间变化时，工作点将围绕着 Q 点上下变动。对于不同的 $v_{in}(t)$，可由负载线和输入特性曲线的交点来得到 i_B 的值。

13.3.2　输出电路的分析

在分析了输入电路得出 i_B 之后，就能够利用负载线法分析输出电路了。参考式(13.7)，得回路电压方程为

$$V_{CC}=R_C i_C+v_{CE} \tag{13.13}$$

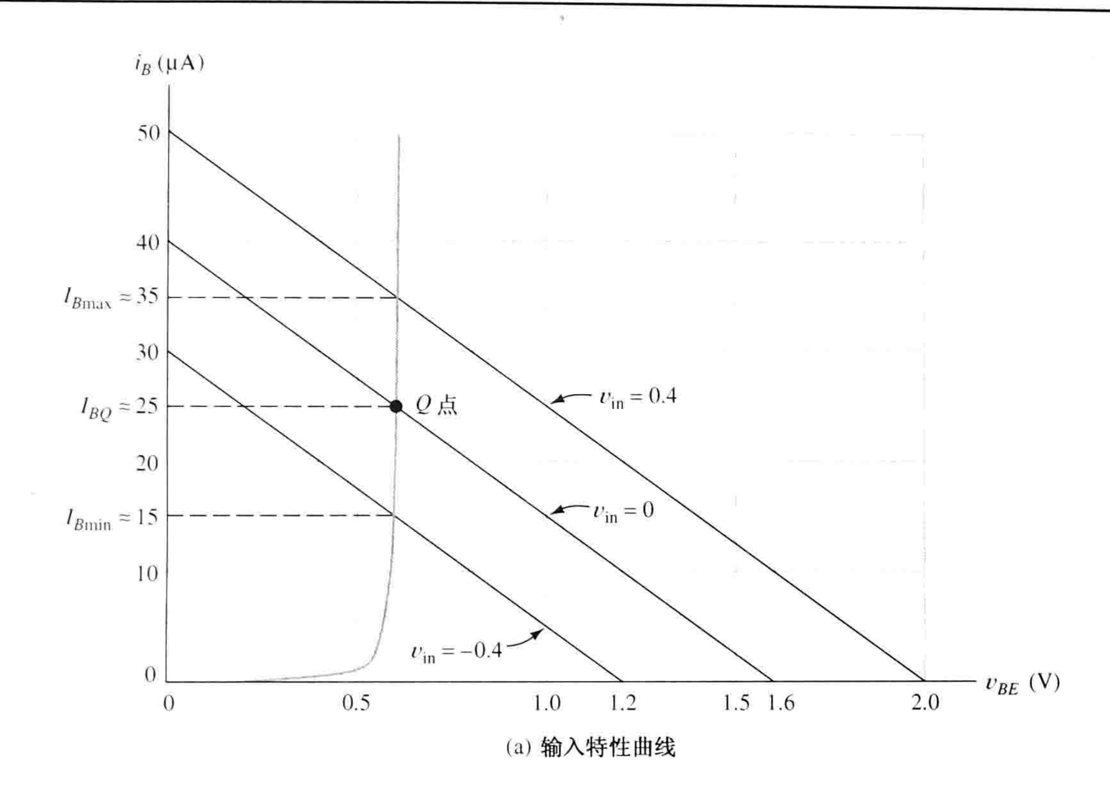
在晶体管的输出特性曲线上画出上式的图形，如图 13.8(b)所示。

由输入电路分析所得到的 i_B 确定相应的输出曲线和负载线的交点，就能得到 i_C 和 v_{CE} 的值。因此，当 v_{in} 变化时，i_B 随之发生变化，使得工作点在输出特性曲线上沿负载线上下变化。通常情况下，v_{CE} 的交流部分远远大于输入电压，从而实现放大功能。

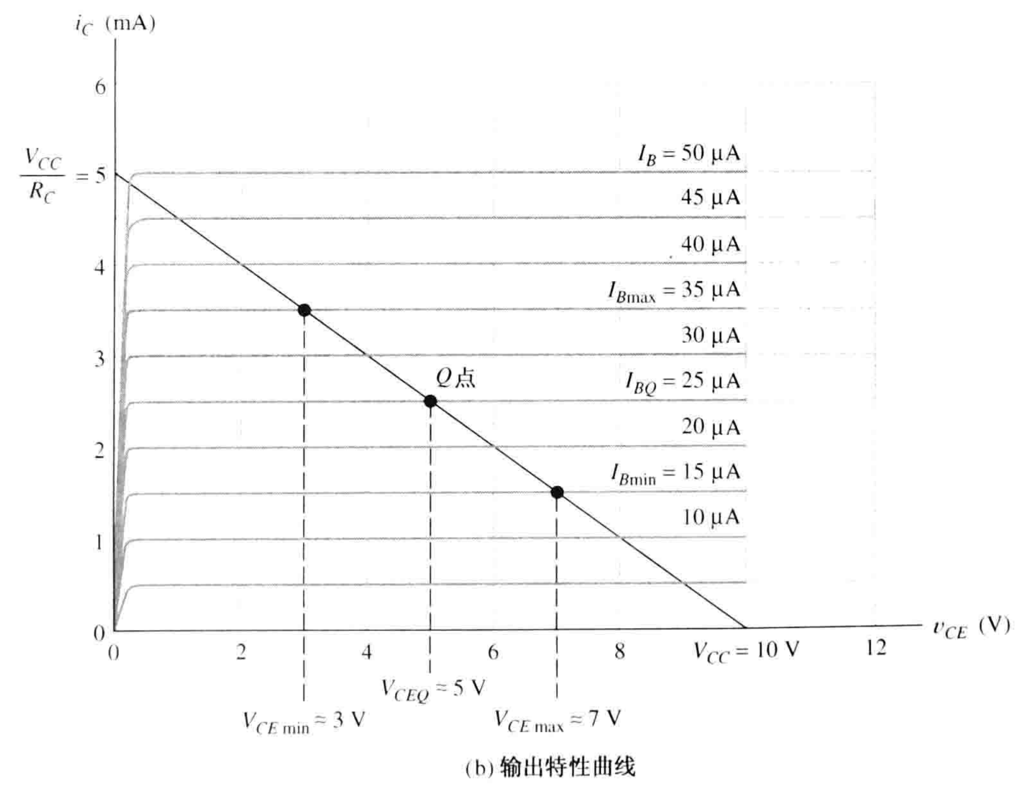
如图 13.8(a)所示，当 $v_{in}(t)$ 向正方向变化时，输入负载线向右上方移动，i_B 增大(负载线和输入特性曲线的交点上移)，使得输出负载线的工作点向左上方移动，v_{CE} 减小。因此，v_{in} 向正方向的变化引起了 v_{CE} 向负方向更大的变化，可见，信号放大是反向的，即共射极电路是一个反相放大器。

例 13.2　BJT 放大器的负载线分析法。

假设图 13.7 所示电路的 $V_{CC}=10\ \text{V}$，$V_{BB}=1.6\ \text{V}$，$R_B=40\ \text{k}\Omega$，$R_C=2\ \text{k}\Omega$。输入信号为正弦电压 $v_{in}(t)=0.4\sin(2000\pi t)$，幅值 0.4 V，频率 1 kHz。晶体管的共射极特性曲线如图 13.9 所示。试计算 v_{CE} 的最大值、最小值和 Q 点处的值。



(a) 输入特性曲线



(b) 输出特性曲线

图 13.9　例 13.2 的负载线分析

解： 首先求 i_B。v_{in} 分别为 0(用来求 Q 点)、0.4 V(用于求正最大值)和 −0.4 V(用于求负最大值)时的负载线如图 13.9(a)所示。由负载线和输入特性曲线的交点可以得到基极电流的值为：$I_{Bmax} \approx 35\mu A$，$I_{BQ} \approx 25\ \mu A$ 和 $I_{Bmin} \approx 15\ \mu A$。

输出特性曲线上的负载线如图 13.9(b)所示。输出负载线和 $I_{BQ} = 25\ \mu A$ 的特性曲线的交点为 Q 点，其值为 $I_{CQ} = 2.5$ mA 和 $V_{CEQ} = 5$ V；与 $I_{Bmax} = 35\ \mu A$ 的特性曲线的交点即为 $V_{CEmin} \approx 3$ V 点；而与反方向最小值 $I_{Bmin} \approx 15\ \mu A$ 对应的特性曲线的交点则为 $V_{CEmax} \approx 7$ V 的点。

如果能找到更多的 v_{in} 随时间变化的点，就能画出 v_{CE} 随时间变化的波形图了。$v_{in}(t)$ 和 $v_{CE}(t)$ 的波形图如图 13.10 所示。需要注意的是：$v_{CE}(t)$ 的交流部分与输入电压相比是反向的，即 $v_{CE}(t)$ 为最小时 $v_{in}(t)$ 为最大，反之亦然。

输入电压的峰—峰值为 0.8 V，而 v_{CE} 交流部分的峰—峰值为 4 V，即电压增益等于 5(因为 v_{CE} 交流部分的幅值是 v_{in} 的 5 倍)。通常情况下，将增益写为 −5 以强调该放大器是反相放大器。

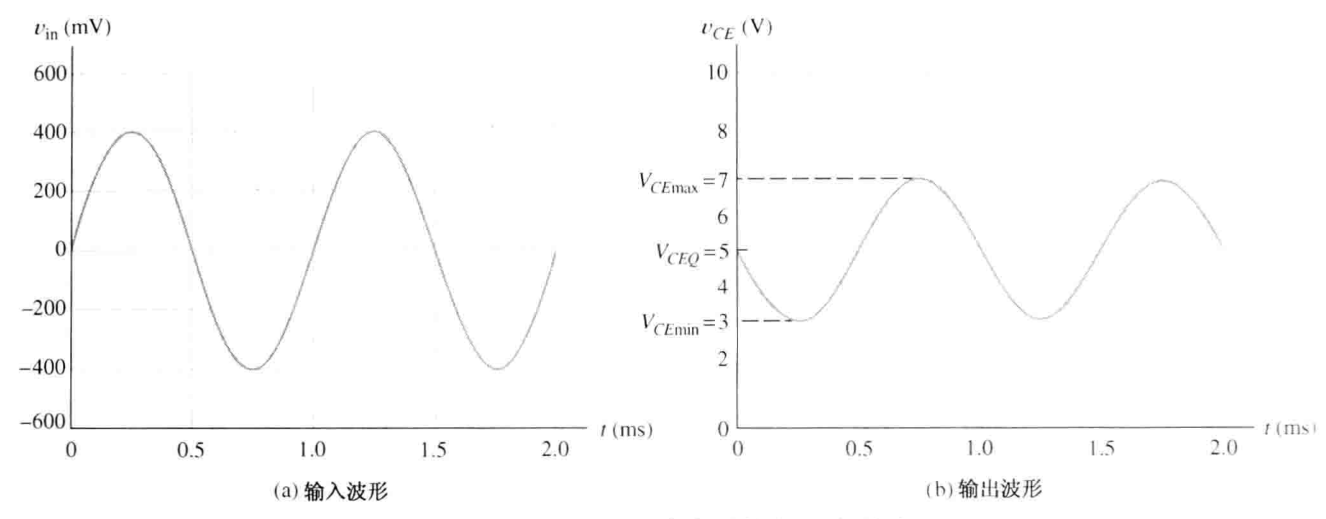


图 13.10 图 13.7 放大器的电压波形图

13.3.3 非线性失真

虽然图 13.10 所示的输入与输出波形差异对比并不明显，但事实上输出电压并不像输入电压一样是一个标准的正弦波。由于晶体管特性曲线的非线性，使得放大器并非完全是线性的。因此，输入信号不仅被放大和反相，而且出现了非线性失真。图 13.11 所示为例 13.2 中当输入电压的幅值增加到 1.2 V 时的输出波形，显然它出现了失真。

由于输入电压的负峰值使 i_B 和 i_C 减小为零，并使工作点移动到了电压轴上与输出负载线的交点，这就使得 v_{CE} 在正峰值处被“限幅”为 $V_{CC}=10$ V。当发生这种情况时，称晶体管被“关断”，工作在截止区。

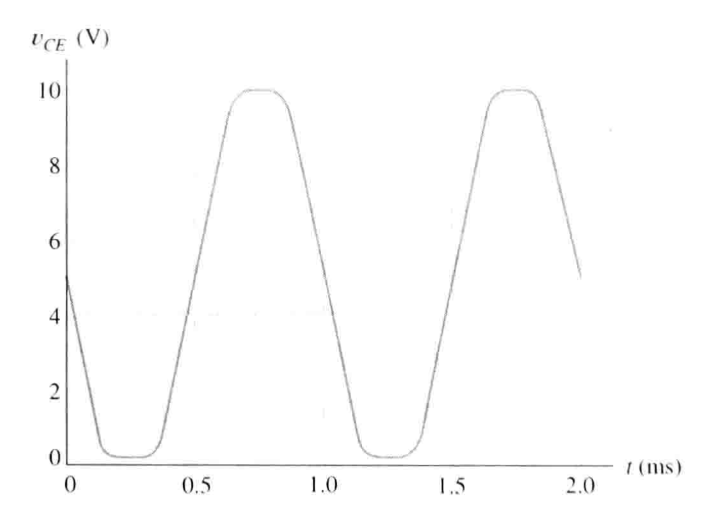


图 13.11 当 $v_{in}(t) = 1.2\sin(2000\pi t)$ 时，例 13.2 中放大器输出的大信号非线性失真

如图 13.11 所示，输出波形的负峰值被“限幅”为 $v_{CE}\approx 0.2$ V。这是因为 i_B 增大到一定程度后，使得工作点移动到输出负载线的上端终点处，而这里的特性曲线是拥挤在一起的。我们把这个区域称为饱和区。

只有当工作点沿负载线的变动始终保持在饱和区和截止区之间的线性(有源)放大区时，放大才是线性的。输出负载线如图 13.12 所示，图中分别标出了截止区、饱和区和放大区。

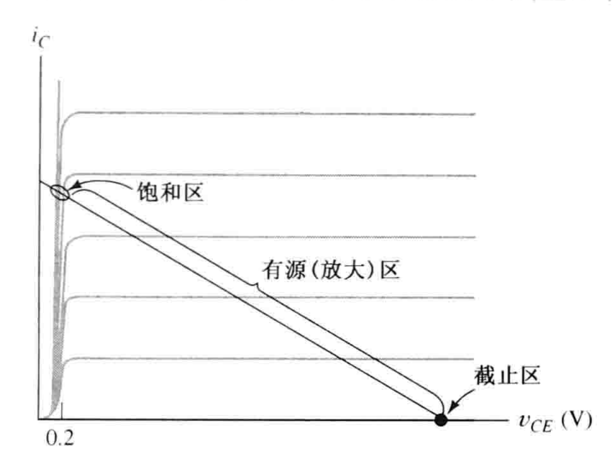


图 13.12 实现放大功能的工作点应位于有源(放大)区。而当工作点进入饱和区或截止区时，就会发生“限幅”现象。在饱和区，$v_{CE} \approx 0.2$ V

练习 13.5 若 $v_{in}(t) = 0.8\sin(2000\pi t)$，重做例 13.2，并计算 $V_{CE\max}$、V_{CEQ} 和 $V_{CE\min}$。

答案： $V_{CE\max} \approx 9.0$ V，$V_{CEQ} \approx 5.0$ V，$V_{CE\min} \approx 1.0$ V。

练习 13.6 如果 $v_{in}(t) = 0.8\sin(2000\pi t)$ 和 $V_{BB} = 1.2$ V，重做例 13.2，并计算 $V_{CE\max}$、V_{CEQ} 和 $V_{CE\min}$。

答案： $V_{CE\max} \approx 9.0$ V，$V_{CEQ} \approx 7.0$ V，$V_{CE\min} \approx 3.0$ V。

实际应用 13.1 能通过改变汽车软件来提高马力吗？

早期的汽车仅包含少量电路，但没有电子元件。而电子技术在汽车上最早的、最重要的应用是电子点火，本书介绍了电子点火的早期版本电路。点火系统现代化的第一步是触头替换，即用双极结型晶体管代替机械操作开关。该晶体管周期性工作在饱和区(等效为开关闭合)和截止区(等效为开关断开)，通过快速切断流经线圈的电流产生火花。

与机械开关相比，电子开关的重要优点之一是不会磨损。但是，要想使电子开关取代机械操作开关得到应用，需要点火控制技术取得极大的进步。最佳点火时间不仅与引擎随速度变化的转动情况有关，还与油门配置、空气温度、引擎温度、燃料质量、引擎负荷和设计目标等因素有关。早期的点火系统利用机械和气动系统来调整点火时刻，但是这种系统不能在所有情况下均保持最佳。现代引擎控制系统利用电子传感器来确定运行条件，用不同的电路来处理传感器信号，并用特定功能的计算机(包含特定软件)来计算每个汽缸的最佳点火时刻，并控制 BJT 工作于饱和区或截止区，从而在适当的时刻产生火花点火。

在 20 世纪 50 年代，要想增大引擎力量，需要钻孔和铣刀头等多项工作，但是如今却可以通过修改引擎控制软件来实现。Hot-rod 引擎的广告宣称其引擎中有一块 ROM(只读存储器，详见第 8 章)，它能载入控制优化软件来使引擎具有更好的性能(不同于省油和延长引擎寿命)。

这个里程碑事件让人们更加认识到电子元件在这个过去只是纯机械系统中的重要性。为了纪念第一辆汽车问世 100 周年，*Automotive Engineering*(《汽车工程》)杂志对汽车历史上最重要的 10 个事件进行了评选。知道谁排在第一位吗？答案是：“包括引擎控制、刹车、驾驶和稳定性控制在内的汽车电子技术”(*Automotive Engineering*, 1996.02, p.4)。可见，现代机械工程师不仅要熟悉机械设计和材料问题，还需要熟悉电子技术应用的优势与不足。

13.4 *pnp* 型晶体管

到目前为止我们只讨论了 *npn* 型 BJT。当位于 *p* 型发射区和集电区之间的基区是一层 *n* 型材料时，便产生了另一种重要的 BJT。当直流电压源与 *pnp* 型 BJT 相连的极性与 *npn* 型的 BJT 正好相反时，*pnp* 型 BJT 同样可以作为放大器使用，而且电流方向与 *npn* 型 BJT 相反。除了电压极性和电流方向不同外，这两种类型的元件几乎是完全相同的。

pnp 型 BJT 的结构示意图和电路符号如图 13.13 所示。需要注意的是 *pnp* 型晶体管射极上的箭头是指向元件的，表示射极电流的反向。为了与在线性放大区流过 *pnp* 的电流实际方向相吻合，我们将参考方向反向了。

对于 *pnp* 型 BJT 有以下方程，与 *npn* 型 BJT 是完全相同的。

$$i_C = \alpha i_E \tag{13.14}$$

$$i_B = (1-\alpha) i_E \tag{13.15}$$

$$i_C = \beta i_B \tag{13.16}$$

$$i_E = i_C + i_B \tag{13.17}$$

当基极-发射极(发射结)之间正偏(对于 *pnp*，v_{BE} 为负)，而集电极-基极之间反偏(对于 *pnp*，v_{BC} 为正)时，式(13.14)~式(13.16)均成立。对于 *npn* 型晶体管，α 和 β 的典型值为 $\alpha \approx 0.99$、$\beta \approx 100$。

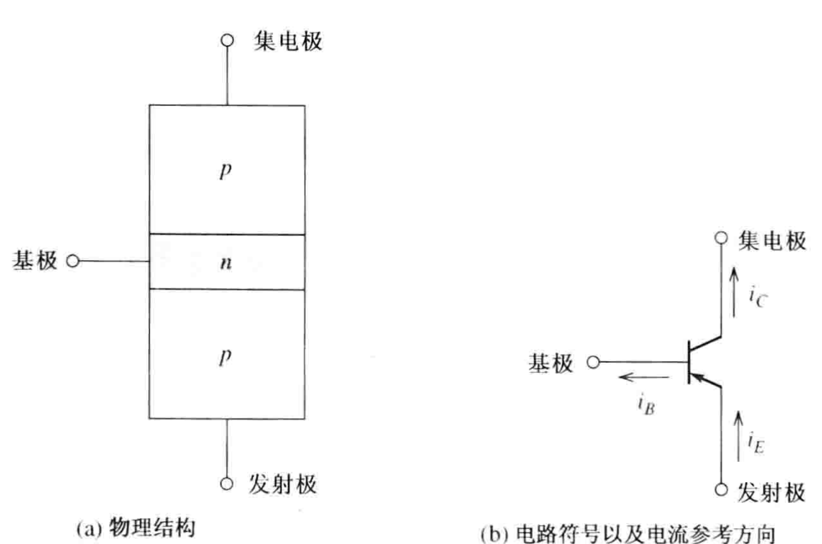


图 13.13 *pnp* 型 BJT

当 *pnp* 型晶体管工作在线性放大区时，有：

$$i_E = I_{ES}\left[\exp\left(\frac{-v_{BE}}{V_T}\right) - 1\right] \tag{13.18}$$

$$i_B = (1-\alpha)\, I_{ES}\left[\exp\left(\frac{-v_{BE}}{V_T}\right) - 1\right] \tag{13.19}$$

除了用 $-v_{BE}$ 代替了 v_{BE} 以外，上式与 *npn* 型晶体管的式(13.1)和式(13.8)完全相同(因为对于 *pnp* 型 BJT，v_{BE} 取负值)。对于 *npn* 型元件，I_{ES} 的典型值从10^{-12}到10^{-16}不等；在温度为 300 K 时，$V_T \approx 0.026$ V。

除了电压轴的值为负以外，*pnp* 型晶体管的共射极特性曲线与 *npn* 型晶体管也完全相同。典型的特性曲线如图 13.14 所示。

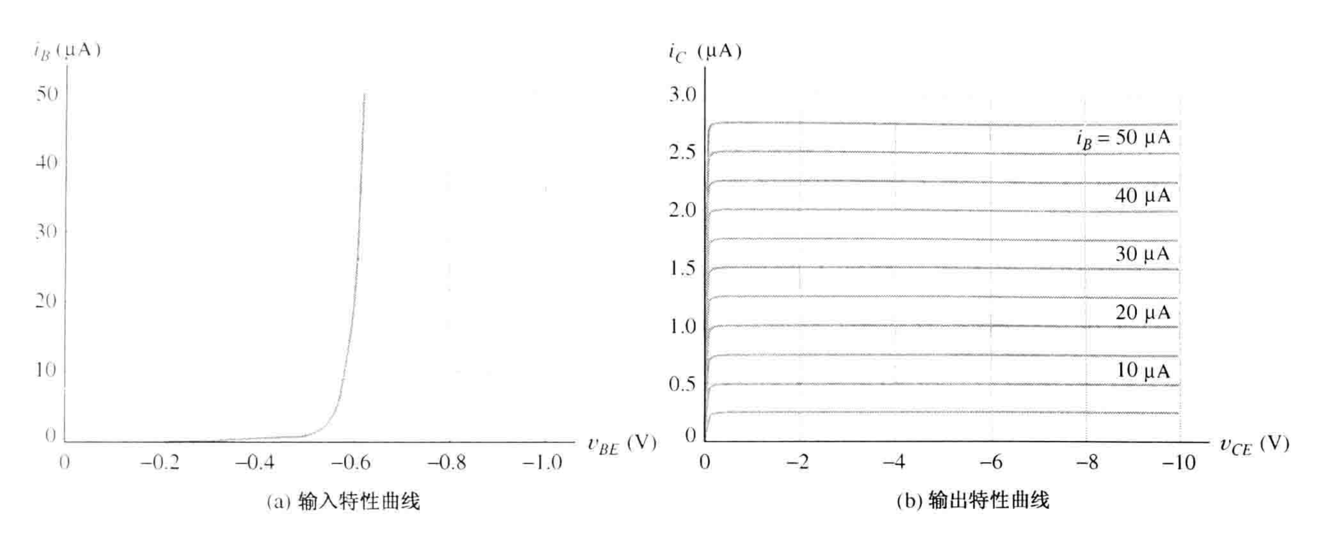


图 13.14　*pnp* 型 BJT 的共射极特性曲线

练习 13.7　由图 13.14 所示的特性曲线确定晶体管的 α 和 β。

答案：$\alpha=0.980$，$\beta=50$。

练习 13.8　如图 13.15 所示放大电路。(a)根据图 13.14 的特性曲线，利用负载线法求 i_B 和 v_{CE} 的最大值、最小值以及在 Q 点处的值。(b)该 *pnp* 型共射极放大器是不是反相放大器？

答案：(a) $I_{B\max}\approx 48\ \mu A$，$I_{BQ}\approx 24\ \mu A$，$I_{B\min}\approx 5\ \mu A$，$V_{CE\max}\approx -1.8\ V$，$V_{CEQ}\approx -5.3\ V$，$V_{CE\min}\approx -8.3\ V$。(b)是反相放大器。(可以画出 $v_{in}(t)$、$i_B(t)$ 和 $v_{CE}(t)$ 随时间变化的波形来比较。)

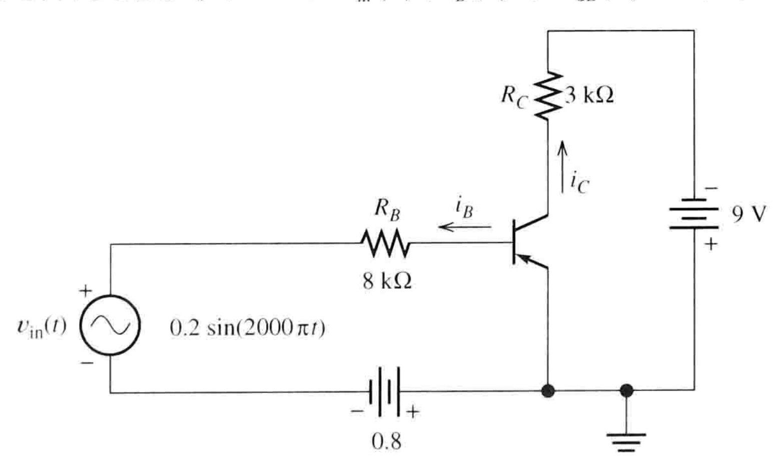


图 13.15　共射极放大器

13.5　大信号直流电路模型

在分析或者设计 BJT 放大电路时，我们常常需要分析静态工作点(Q 点)(已经在 10.8 节的压控衰减器中介绍)。在本节中，我们将提出对 BJT 电路进行大信号直流分析的电路模型。而下一节将介绍如何利用这些模型来分析 BJT 放大器的偏置电路。最后，讨论用于分析放大电路的小信号模型。

在晶体管电路中，常用带大写字母下标的大写字母来表示直流电压和电流，例如 I_C 和 V_{CE} 分别表示直流集电极电流和集电极-发射极电压。对于其他电流和电压也按这种方法表示。

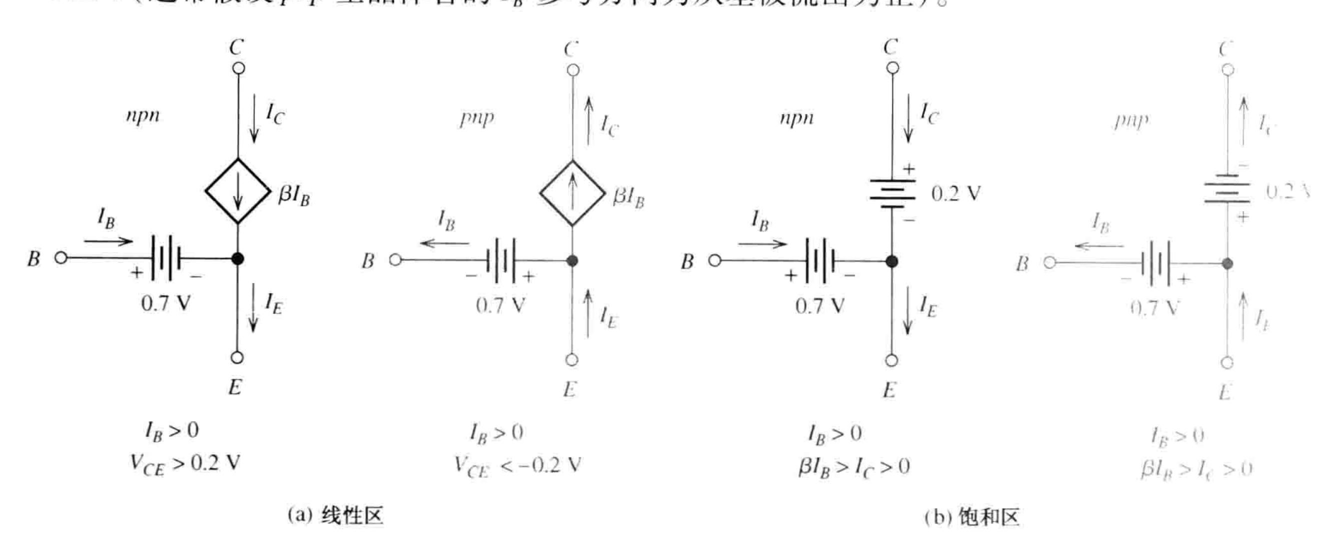
已知 BJT 可以工作在线性放大区、饱和区或截止区。在线性放大区，基极-发射极(发射结)正向偏置，基极-集电极(集电结)反向偏置。

13.5.1 线性区的等效模型

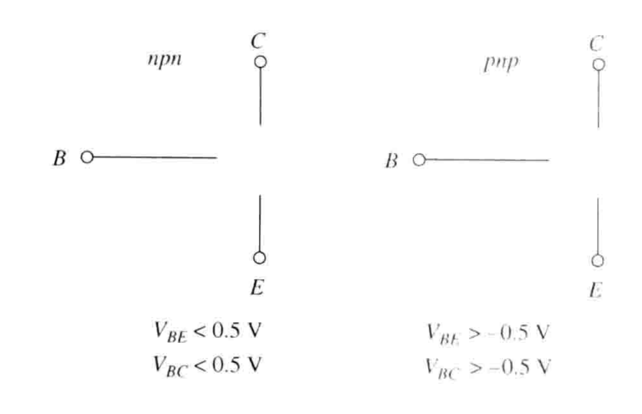
BJT 工作在线性放大区时的等效电路模型如图 13.16(a)所示。电流控电流源用来等效集电极电流与基极电流的关系。为了确保线性区等效模型的成立，必须始终满足 I_B 和 V_{CE} 之间的约束关系。

接下来分析线性放大区的等效电路模型。图 13.17 所示为某 *npn* 型晶体管的特性曲线。如图 13.17(b)所示，当基极-发射极(发射结)正向偏置时，$V_{BE}\approx 0.7\ \text{V}$ 且基极电流 I_B 为正。由图 13.17(a)发现，为了确保元件运行在线性放大区，V_{CE} 必须大于 0.2 V(在特性曲线的拐点以上)。

同样，对于 *pnp* 型晶体管，为了保证线性放大区模型的合理性，必须保证 $I_B>0$ 且 $V_{CE}<-0.2\ \text{V}$(通常假设 *pnp* 型晶体管的 I_B 参考方向为从基极流出为正)。



(a) 线性区　　　　(b) 饱和区



(c) 截止区

图 13.16　BJT 大信号模型

13.5.2 饱和区的等效模型

BJT 工作在饱和区时的等效电路模型如图 13.16(b)所示。在饱和区，两个 *pn* 结均正向偏置，由图 13.17(a)所示集电极特性曲线得 $V_{CE}\approx 0.2\ \text{V}$。所以，饱和区等效模型的集电极和发射极之间有一个 0.2 V 的电压源。当元件工作在线性放大区时，I_B 为正。同样，由图 13.17(a)可见，工作点位于集电极特性曲线的拐点以下，且约束条件为 $\beta I_B>I_C>0$。

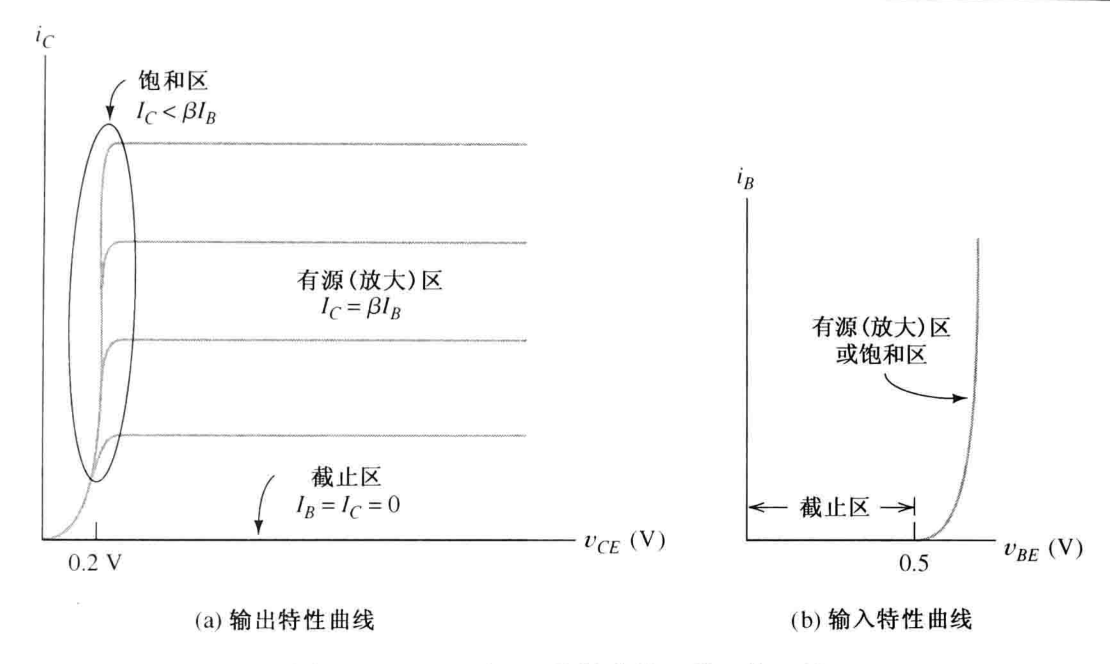


图 13.17　*npn* 型 BJT 特性曲线上的工作区域

13.5.3　截止区的等效模型

当元件工作在截止区时，两个 *pn* 结均反向偏置，没有电流流过元件。所以，此时的等效模型为三极之间均相互开路，如图 13.16(c)所示。事实上，如果提供的正向偏置电压小于0.5 V，电流太小可忽略。BJT 工作在截止区的约束关系如图 13.16(c)所示。

例 13.3　确定 BJT 的工作区。

已知某 *npn* 晶体管的$\beta = 100$。在以下各种情况下，判断元件的工作区：(a) $I_B = 50\ \mu A$, $I_C = 3\ mA$；(b) $I_B = 50\ \mu A$, $V_{CE} = 5\ V$；(c) $V_{BE} = -2\ V$, $V_{CE} = -1\ V$。

解：(a) 当 I_B 和 I_C 为正时，晶体管可能工作在线性放大区或者饱和区。由于工作在饱和区的约束关系为：

$$\beta I_B > I_C$$

上式成立，所以元件工作在饱和区。

(b) $I_B > 0$ 且 $V_{CE} > 0.2$，元件工作在线性放大区。

(c) $V_{BE} < 0$ 且 $V_{BC} = V_{BE} - V_{CE} = -1 < 0$，两个 *pn* 结均反向偏置，元件工作在截止区。

练习 13.9　已知某 *npn* 晶体管的$\beta = 100$。在以下各种情况下，判断元件的工作区：(a) $V_{BE} = -0.2\ V$, $V_{CE} = 5\ V$；(b) $I_B = 50\ \mu A$, $I_C = 2\ mA$；(c) $I_B = 50\ \mu A$, $V_{CE} = 5\ V$。

答案：(a)截止区；(b)饱和区；(c)线性放大区。

13.6　BJT 电路的大信号直流分析

本书在13.5节中提出了 BJT 的大信号直流等效模型，本节将利用这些模型来分析电路。在 BJT 电路的直流分析中，首先需要假定晶体管工作在某个特定区域(线性放大区、截止区或饱和区)，然后再利用合适的晶体管电路模型来求解电路。接着，需要检验所得的解是否满足所假定的工作区的约束条件。如果满足，则分析结束。否则，就需要假设元件工作在另一个区域，并重复以上步骤，直到得到满足要求的解为止。与采用理想二极管模型以及折线模型分析二极管电路十分相似，具体步骤如下：

1. 选择一个 BJT 的工作区：饱和区、截止区或者放大区。

2. 根据该工作区的晶体管等效模型计算 I_C、I_B、V_{BE} 和 V_{CE}。

3. 检验所选择工作区的约束条件是否满足。如果满足，则分析结束。否则，返回步骤 1，选择另一个工作区。

在分析和设计 BJT 放大器的偏置电路时，上述方法非常有用。偏置电路的目的是使工作点位于线性放大区，保证信号被放大。因为晶体管的某些参数(例如 β)是有一定的幅度变化的，所以让工作点不受这些变化的影响同样非常重要。

以下举例详述此方法，并说明在偏置电路设计中的实用性。

例 13.4 固定基极偏置电路的分析。

已知某直流偏置电路如图 13.18(a)所示。其中 $R_B = 200\ \text{k}\Omega$，$R_C = 1\ \text{k}\Omega$，$V_{CC} = 15\ \text{V}$，晶体管 $\beta = 100$。求 I_C 和 V_{CE}。

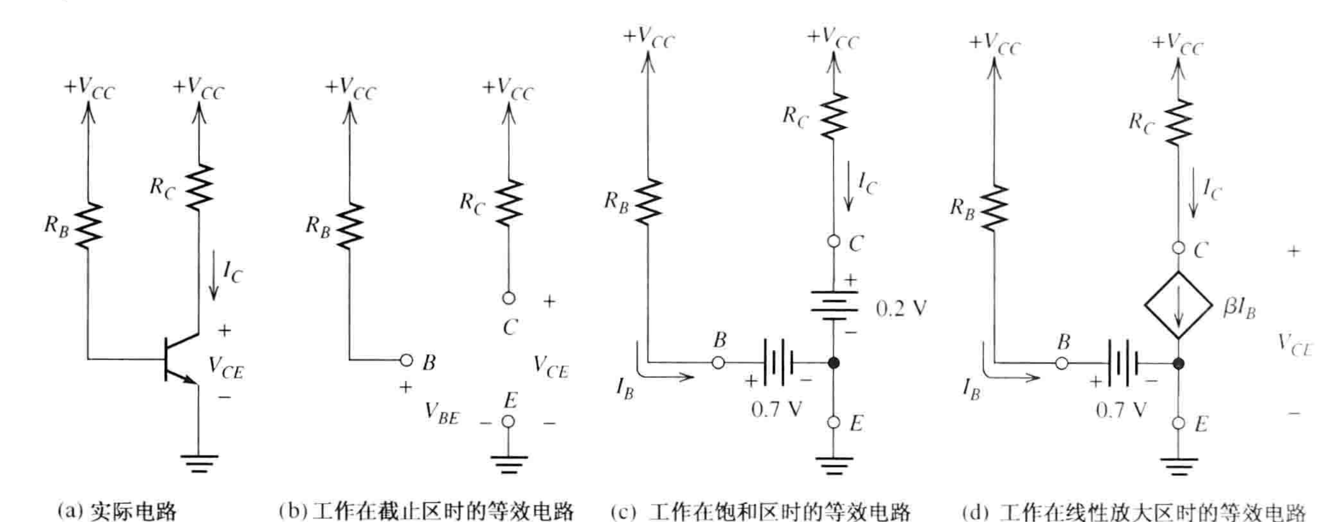


图 13.18 例 13.4 和例 13.5 的图

解： 虽然本例最后确定晶体管工作在线性放大区，但是首先假设其工作在截止区(以此说明如何检验假设的准确与否)。

假设晶体管工作在截止区，其电路模型如图 13.16(c)所示，等效电路如图 13.18(b)所示。可知 $I_B = 0$ 且 R_B 上没有电压降，所以 $V_{BE} = 15\ \text{V}$。但是，若晶体管工作在截止区，应该满足 $V_{BE} < 0.5\ \text{V}$，可见，元件工作在截止区的假设不成立。

接下来，假设晶体管工作在饱和区。此时的电路模型如图 13.16(b)所示，等效电路如图 13.18(c)所示。解之得：

$$I_C = \frac{V_{CC} - 0.2}{R_C} = 14.8\ \text{mA}$$

$$I_B = \frac{V_{CC} - 0.7}{R_B} = 71.5\ \mu\text{A}$$

校验饱和区的约束条件，$I_B > 0$ 满足，但是 $\beta I_B > I_C$ 不满足约束条件。所以，元件也没有工作在饱和区。

最后，假设晶体管工作在线性放大区，利用图 13.16(b)中的等效模型和图 13.18(d)所示的等效电路。解之得：

$$I_B = \frac{V_{CC} - 0.7}{R_B} = 71.5\ \mu\text{A}$$

(注意：某些教材设基极-发射极(发射结)之间的正向偏置电压为 0.6 V，也有教材设为 0.7 V，本书设定为 0.7 V。事实上，这个值与元件型号和电流大小有关，但是通常情况下这样的假设对结果的影响并不大)。

$$I_C = \beta I_B = 7.15\ \text{mA}$$

最后得：

$$V_{CE} = V_{CC} - R_C I_C = 7.85\ \text{V}$$

工作在线性放大区的条件为：$I_B > 0$ 且 $V_{CE} > 0.2$ V，该条件满足，所以元件工作在线性放大区。

例 13.5　固定基极偏置电路的分析。

若 $\beta = 300$，重做例 13.4。

解： 首先，假设元件工作在线性放大区，有：

$$I_B = \frac{V_{CC} - 0.7}{R_B} = 71.5\ \mu\text{A}$$

$$I_C = \beta I_B = 21.45\ \text{mA}$$

$$V_{CE} = V_{CC} - R_C I_C = -6.45\ \text{V}$$

工作在线性放大区的条件为：$I_B > 0$ 且 $V_{CE} > 0.2$ V，所以条件不满足，元件不工作在线性放大区。

然后，假设元件工作在饱和区，有：

$$I_C = \frac{V_{CC} - 0.2}{R_C} = 14.8\ \text{mA}$$

$$I_B = \frac{V_{CC} - 0.7}{R_B} = 71.5\ \mu\text{A}$$

校验饱和区的约束条件，得 $I_B > 0$ 和 $\beta I_B > I_C$ 均满足，所以元件工作在饱和区，且 $V_{CE} = 0.2$ V。

13.6.1　偏置电路设计的应用

分析图 13.19 所示负载线的结构是非常有益的。当 $\beta = 300$ 时，Q 点近似位于负载线的中间，且此时的工作点进入饱和区。

如果将这个电路作为放大器使用，则希望 Q 点位于线性放大区，这样瞬时工作点就能随着基极电流的变化沿着负载线向上或向下变化。而在饱和区，工作点不能随着基极电流的微小变化而显著移动，因此不能实现放大功能。可见，在 $\beta = 100$ 时能取得恰当的 Q 点，而并非 $\beta = 300$。由于需要分析 β 的每一种变化情况，所以这个电路并不适合作为放大器偏置电路(本来可以通过调整 R_B 来补偿 β 的变化，但此法不实用)。

图 13.18(a)所示电路被称为固定基极偏置电路，是因为基极电流由 V_{CC} 和 R_B 确定，不随 β 的变化而变化。注意：如果希望电路在输出负载线上处于特定的工作点，基极电流必须随着 β 的变化而变化。

练习 13.10　根据以下两种情况重做例 13.4：(a) $\beta = 50$；(b) $\beta = 250$。

答案： (a) $I_C = 3.575$ mA，$V_{CE} = 11.43$ V；(b) $I_C = 14.8$ mA，$V_{CE} = 0.2$ V。

练习 13.11　假设图 13.18(a)所示电路的 $R_C = 5\ \text{k}\Omega$、$V_{BE} = 0.7$ V 和 $V_{CC} = 20$ V。在以下两种情况下：(a) $\beta = 100$；(b) $\beta = 300$。求使得工作点位于输出负载线中间的 R_B 值(Q 点应为 $V_{CE} = V_{EE}/2 = 10$ V)。

答案： (a) $R_B = 965\ \text{k}\Omega$；(b) $R_B = 2.9\ \text{M}\Omega$。

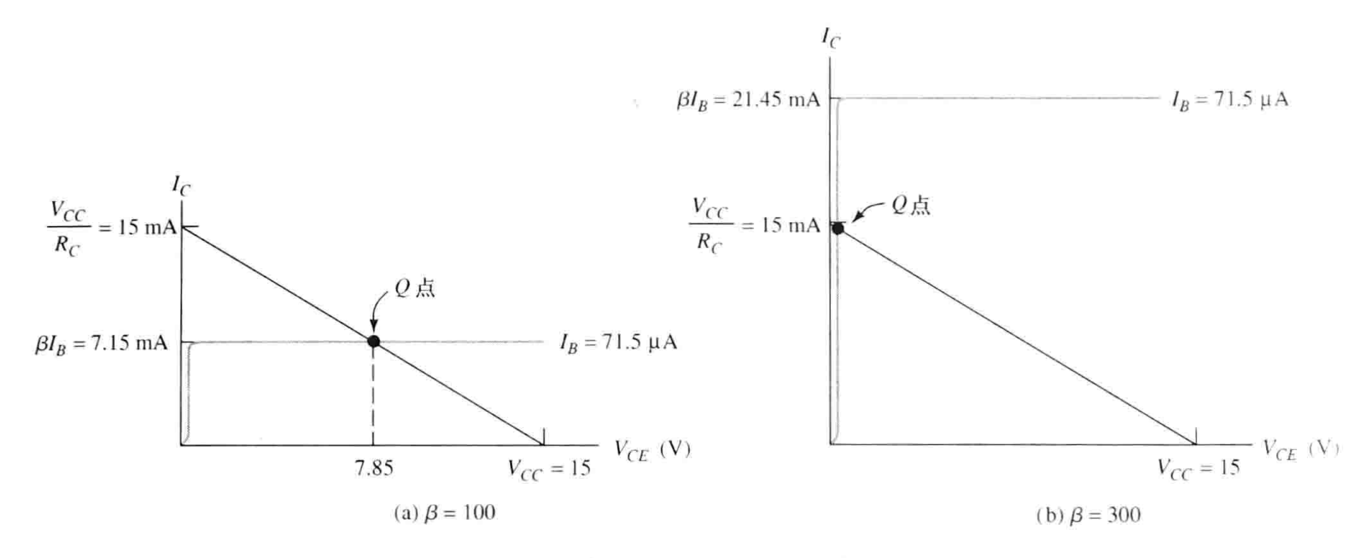


图 13.19　例 13.4 和例 13.5 的负载线

练习 13.12　求解以下两种情况下图 13.20 所示电路的 I_C 和 V_{CE}：(a) $\beta = 50$；(b) $\beta = 150$。

答案：(a) $I_C = 0.965$ mA，$V_{CE} = -10.35$ V；(b) $I_C = 1.98$ mA，$V_{CE} = -0.2$ V。(晶体管工作在饱和区。)

图 13.20　练习 13.12 的图

在下面这个例子中，将分析一个发射极电流与 β 无关的电路。

例 13.16　BJT 偏置电路的分析。

电路如图 13.21(a)所示，其中 $R_E = 2$ kΩ，$R_C = 2$ kΩ，$V_{CC} = 15$ V，$V_{BB} = 5$ V。求 β 分别等于 100 和 300 时 I_C 和 V_{CE} 的值。

解：假设晶体管工作在线性放大区。由图 13.21(b)所示的等效电路写出电压方程，得：

$$V_{BB} = 0.7 + I_E R_E$$

可解发射极电流为

$$I_E = \frac{V_{BB} - 0.7}{R_E} = 2.15 \text{ mA}$$

注意：发射极电流与 β 无关。

由式(13.2)和式(13.10)可求得基极电流和集电极电流：

$$I_C = \beta I_B$$
$$I_E = I_B + I_C$$

将第一个等式代入第二个等式，得：

$$I_E = I_B + \beta I_B = (\beta + 1) I_B$$

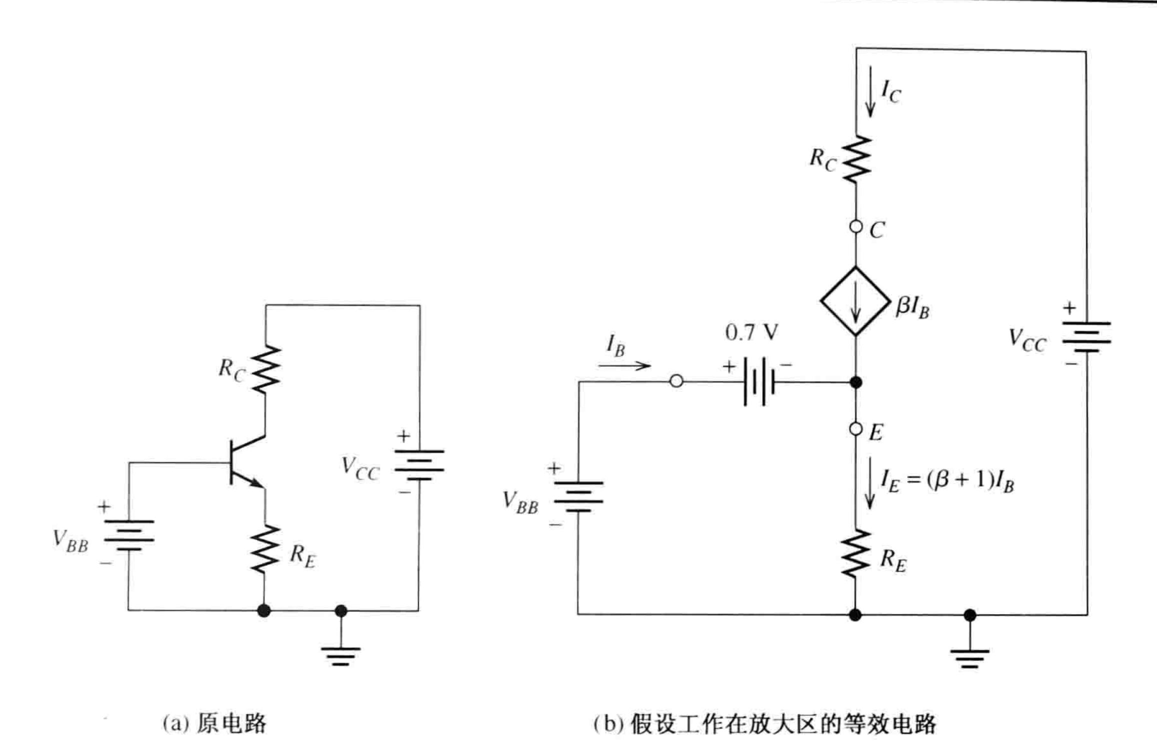
$$I_B = \frac{I_E}{\beta + 1}$$

代入值求得结果见表 13.1。注意：β 越大，I_B 越小，但 I_C 几乎保持恒定。

写出集电极回路的电压方程，求 V_{CE}：

$$V_{CC} = R_C I_C + V_{CE} + R_E I_E$$

代入值求得：$\beta = 100$ 时，$V_{CE} = 6.44$ V；$\beta = 300$ 时，$V_{CE} = 6.42$ V。



(a) 原电路　　(b) 假设工作在放大区的等效电路

图 13.21　例 13.6 的图

表 13.1　例 13.6 电路的结果

0 β	I_B (μA)	I_C (mA)	V_{CE} (V)
100	21.3	2.13	6.44
300	7.14	2.14	6.42

显然，图 13.21(a)所示电路的 Q 点与 β 无关。但是，这个电路在绝大多数放大电路中并没有实用性，这是因为：首先，需要两个电压源 V_{CC} 和 V_{BB}，但是在实际应用中只有一个；其次，我们希望把信号(通过耦合电容)加在基极上，但此电路的基极电压已经被电压源 V_{BB} 确定，由于 V_{BB} 恒为常数，对于交流信号等效为短路，使得交流电流与电压不能加到基极上。

13.6.2　四电阻偏置电路的分析

能避免以上情况影响的电路如图 13.22(a)所示，称为四电阻 BJT 偏置电路。由 R_1 和 R_2 组成的分压器为基极提供恒定的电压(与 β 无关)。如例 13.6 分析的那样，恒定的基极电压产生基本恒定的 I_C 和 V_{CE}。在四电阻偏置电路中，基极并非直接和电源或大地相连，所以能够使输入信号通过耦合电容加到基极上。

此电路的分析如下：首先，将电路等效变化为如图 13.22(b)所示。除了将电源拆为两个独立的电源以便于分析外，图 13.22(a)和(b)是完全相同的。

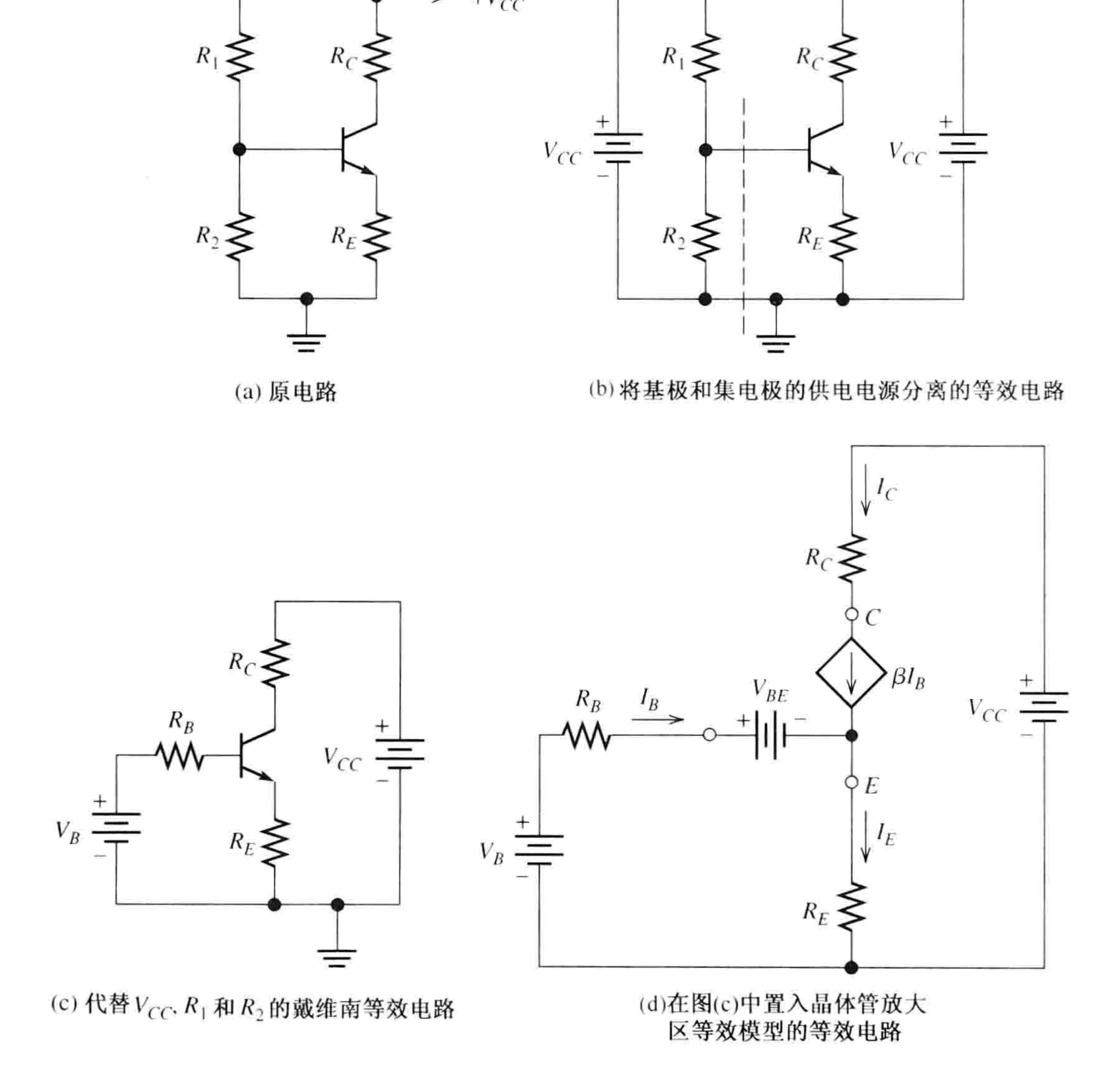
然后，对虚线左边的电路进行戴维南等效。其中，戴维南等效电阻 R_B 是 R_1 和 R_2 的并联组合：

$$R_B = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} = R_1 \| R_2 \tag{13.20}$$

戴维南等效电压为

$$V_B = V_{CC}\frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{13.21}$$

戴维南等效电路如图 13.22(c)所示。再用晶体管在线性放大区的等效模型代替晶体管，得到如图 13.22(d)所示电路。



(a) 原电路

(b) 将基极和集电极的供电电源分离的等效电路

(c) 代替 V_{CC}、R_1 和 R_2 的戴维南等效电路

(d)在图(c)中置入晶体管放大区等效模型的等效电路

图 13.22　四电阻偏置电路

写出图 13.22(d)所示电路的基极回路电压方程为：

$$V_B = R_B I_B + V_{BE} + R_E I_E \tag{13.22}$$

对于室温下的硅晶体管，有 $V_{BE} \approx 0.7$ V，另外有：

$$I_E = (\beta + 1)\, I_B$$

求得：

$$I_B = \frac{V_B - V_{BE}}{R_B + (\beta + 1)\, R_E} \tag{13.23}$$

得到 I_B 以后，I_C 和 I_E 就很容易求得了。最后，写出图 13.22(d)所示的集电极回路的电压方程，并求出 V_{CE}：

$$V_{CE} = V_{CC} - R_C I_C - R_E I_E \tag{13.24}$$

例 13.7 四电阻偏置电路的分析。

假设 $V_{BE}=0.7$ V，当 β 分别等于 100 和 300 时，求图 13.23 所示电路的 I_C 和 V_{CE} 值。

解：由式(13.20)和式(13.21)，得：

$$R_B = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} = 3.33\ \text{k}\Omega$$

$$V_B = V_{CC}\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 5\ \text{V}$$

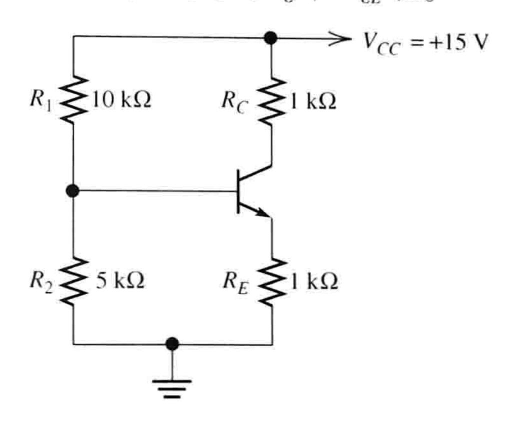


图 13.23 例 13.7 的图

将两式和 $\beta=100$ 代入式(13.23)，得：

$$I_B = \frac{V_B - V_{BE}}{R_B + (\beta+1)R_E} = 41.2\ \mu\text{A}$$

同样，当 $\beta=300$ 时求得 $I_B=14.1$ μA。注意：β 越高，I_B 越小。

现在，由 $I_C=\beta I_B$ 计算集电极电流。当 $\beta=100$ 时，求得 $I_C=4.12$ mA；当 $\beta=300$ 时，则求得 $I_C=4.24$ mA。可见，当 β 增大 3 倍时，集电极电流的变化不到 3%。由 $I_E=I_C+I_B$ 计算发射极电流：当 $\beta=100$ 时，$I_E=4.16$ mA；当 $\beta=300$ 时，$I_E=4.25$ mA。

最后，由式(13.24)求 V_{CE}，得：当 $\beta=100$ 时，$V_{CE}=6.72$ V；当 $\beta=300$ 时，$V_{CE}=6.51$ V。

由此可见，如果电阻值选择恰当，四电阻偏置电路能够确定与 β 无关的 Q 点，这使得四电阻偏置电路在 BJT 放大器中有着广泛的应用(除集成电路以外，因为在集成电路中选择电阻是不合适的)。

练习 13.13 若 $R_1=100$ kΩ，$R_2=50$ kΩ，重做例 13.7。计算 β 分别等于 300 和 100 时的 I_C 之比，并同例 13.7 的结果进行比较。

答案：当 $\beta=100$ 时，$I_C=3.20$ mA，$V_{CE}=8.57$ V；当 $\beta=300$ 时，$I_C=3.86$ mA，$V_{CE}=7.27$ V。集电极电流之比等于 1.21。而在例 13.7 中，集电极电流之比仅为 1.03。这说明 R_1 和 R_2 越大，I_C 随 β 变化的就越大。

13.7 小信号等效电路

现在来分析 BJT 中的小电流和小电压。首先，需要建立放大电路常用的几个规则：用下标为大写字母的小写字母表示总电流和总电压，例如 i_B 表示总的基极电流；用下标为大写字母的大写字母表示 Q 点处的电流或电压，例如 I_{BQ} 表示交流输入为零时的基极直流电流；用带小写字母下标的小写字母表示 Q 点附近电流或电压的变化量(由被放大的输入信号产生)，例如 $i_b(t)$ 表示基极电流的交流部分。

因此，总电流等于 Q 点处的直流值加上交流部分，写为

$$i_B(t) = I_{BQ} + i_b(t) \tag{13.25}$$

这三个量之间的关系如图 13.24 所示。同样，写出：

$$v_{BE}(t) = V_{BEQ} + v_{be}(t) \tag{13.26}$$

由偏置电路建立 Q 点已经在 13.6 节介绍过了，现在分析 BJT 中的小信号模型是如何构成的。由式(13.8)可以根据总的基极-发射极(发射结)之间的电压计算总的基极电流：

$$i_B = (1-\alpha)I_{ES}\left[\exp\left(\frac{v_{BE}}{V_T}\right)-1\right]$$

因为工作点在线性放大区，所以括号中的 1 可以忽略。

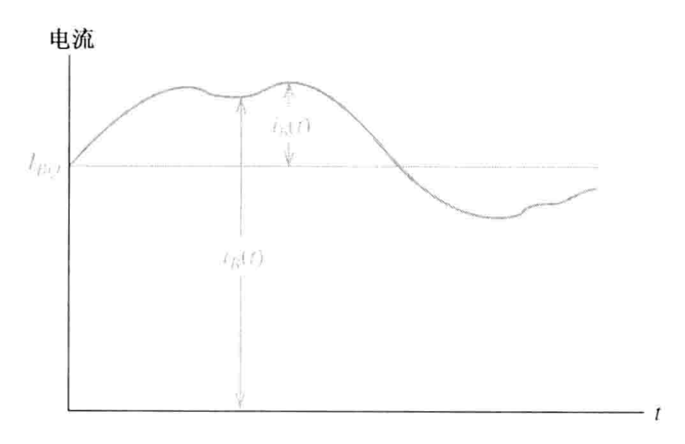


图 13.24 图释 $i_B(t)$、I_{BQ} 和 $i_b(t)$ 的关系

将式(13.25)和式(13.26)代入式(13.8)，得：

$$I_{BQ}+i_b(t) = (1-\alpha)I_{ES}\exp\left[\frac{V_{BEQ}+v_{be}(t)}{V_T}\right] \tag{13.27}$$

上式写为

$$I_{BQ}+i_b(t) = (1-\alpha)I_{ES}\exp\left(\frac{V_{BEQ}}{V_T}\right)\exp\left[\frac{v_{be}(t)}{V_T}\right] \tag{13.28}$$

式(13.8)仍与 Q 点的值有关，所以写为

$$I_{BQ} = (1-\alpha)I_{ES}\exp\left(\frac{V_{BEQ}}{V_T}\right) \tag{13.29}$$

代入式(13.28)，得：

$$I_{BQ}+i_b(t) = I_{BQ}\exp\left(\frac{v_{be}(t)}{V_T}\right) \tag{13.30}$$

这里研究的小信号满足 $v_{be}(t)$ 值在任意时刻均远小于 V_T，通常，$v_{be}(t)$ 只有几毫伏甚至更低。

又因为当 $|x| \ll 1$ 时，下式成立(如图 13.25 所示)：

$$\exp(x) \approx 1+x \tag{13.31}$$

所以，式(13.30)写为

$$I_{BQ}+i_b(t) \approx I_{BQ}\left[1+\frac{v_{be}(t)}{V_T}\right] \tag{13.32}$$

上式两端同除以 I_{BQ}，并定义 $r_\pi = V_T/I_{BQ}$，则有：

$$i_b(t) = \frac{v_{be}(t)}{r_\pi} \tag{13.33}$$

因此，对于在 Q 点附近变化的小信号，晶体管的基极-发射极(发射结)pn 结等效为电阻 r_π：

$$r_\pi = \frac{V_T}{I_{BQ}} \tag{13.34}$$

代入 $I_{BQ} = I_{CQ}/\beta$，得：

$$r_\pi = \frac{\beta V_T}{I_{CQ}} \tag{13.35}$$

室温下 $V_T=0.026$ V，而β的典型值为100，小信号放大器的典型偏置电流为$I_{CQ}=1$ mA，所以 $r_\pi=2600$ Ω。

总集电极电流等于β倍的总基极电流：

$$i_C(t)=\beta i_B(t) \tag{13.36}$$

但是，总电流等于 Q 点处的值与交流部分之和，所以：

$$I_{CQ}+i_c(t)=\beta I_{BQ}+\beta i_b(t) \tag{13.37}$$

可见，

$$i_c(t)=\beta i_b(t) \tag{13.38}$$

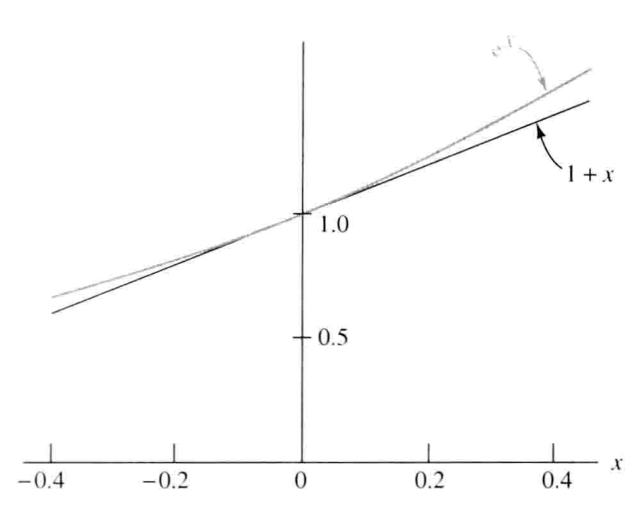


图 13.25　e^x 及其近似值 $1+x$ 的比较

13.7.1 BJT 的小信号等效电路

式(13.33)和式(13.38)分别给出了 BJT 中小信号电压和电流间的关系，所以用图 13.26 所示的小信号等效电路表示 BJT 十分方便。该电路形象地表示了式(13.33)和式(13.38)所表示的电流和电压的关系。

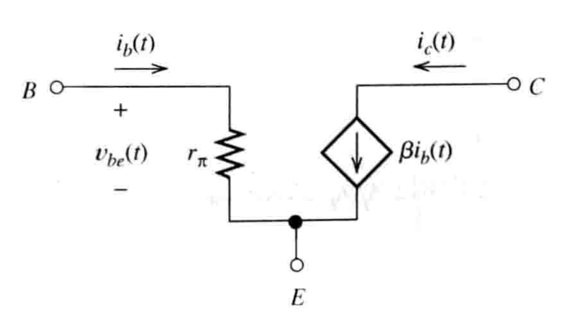


图 13.26　BJT 的小信号等效电路

通过分析发现，尽管 *pnp* 型和 *npn* 型 BJT 电流的参考方向不同，但是两者具有相同的小信号等效电路。由式(13.35)给出的 r_π 表达式也同时满足 *npn* 型和 *pnp* 型 BJT(设 *npn* 型 BJT 的 I_{CQ} 参考方向为流出集电极，所以 I_{CQ} 为正值)。下面几节将证明小信号等效电路对于分析 BJT 放大器方程非常有用。

13.8 共射极放大器

在 BJT 放大电路中，要想实现放大功能就必须使 BJT 的工作点位于线性放大区。例如，采用13.6 节的四电阻偏置电路使工作点偏置在线性放大区，而耦合电容用来连接负载和信号源，以避免影响静态工作点。

通过小信号等效电路可以分析放大电路的增益、输入电阻和输出电阻。在本节和下一节中，将分析两种重要的 BJT 放大电路。

图 13.27(a)所示为共射极放大器，电阻 R_1、R_2、R_E 和 R_C 组成了四电阻偏置电路；电容 C_1 将信号源和晶体管的基极相连，电容 C_2 将集电极上的被放大信号与负载 R_L 相连；另外，电容 C_E（称为旁路电容）为交流射极电流在发射极和地之间提供了一条低阻抗通路。

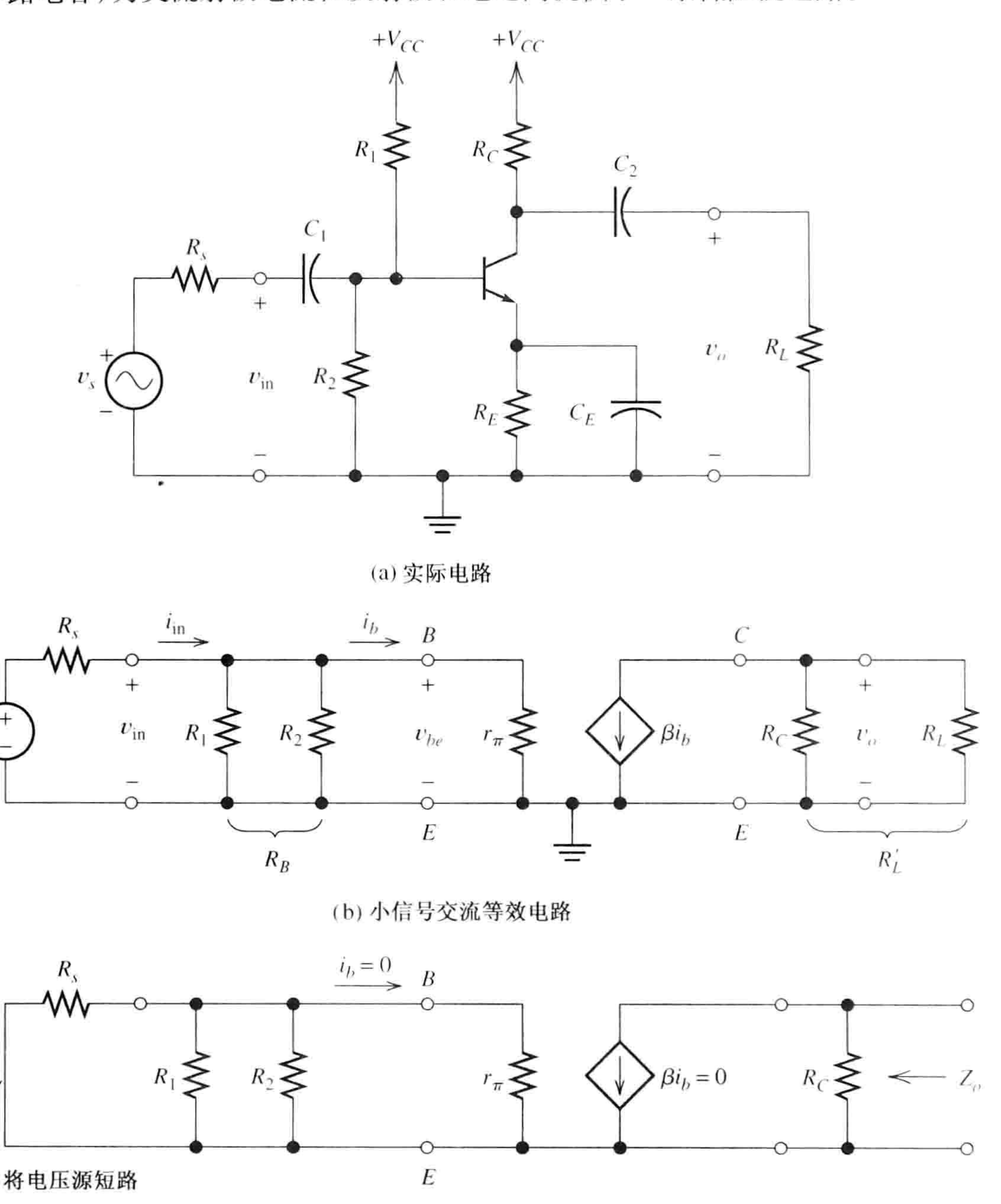


图 13.27　共射极放大器

通常选择较大的耦合电容和旁路电容，使其交流阻抗很小。为了简化电路，将电容置为短路。但是，在信号频率较低的情况下，此类电容会降低放大器的增益。

对于交流信号，发射极相当于与地直接相连，此时，输入信号与负载均与发射极相连，这就是将此电路称为共射极放大器的原因。

以上分析在中频区是成立的。但是，在低频区必须考虑耦合电容以及旁路电容的影响；而在高频区则需要分析包括截止频率等参数在内的更复杂的晶体管等效模型。本书不涉及对低频和高频区的分析。

13.8.1　小信号等效电路

在分析放大器之前画出小信号等效电路是非常有用的，如图 13.27(b)所示。其中，耦合电容被短路所代替，晶体管则被小信号等效模型所代替。

另外，由于直流电压源的内阻抗近似为零，所以电压源上不可能出现交流电压，则直流电压源可以等效为短路。

仔细比较图 13.27(a)所示的实际电路和图 13.27(b)所示的小信号等效电路可见，由于 C_1 被等效为短路，所以在小信号等效电路中输入信号直接连接基极；同样，射极直接与地相连，负载直接与集电极相连。

需要注意的是，在实际电路中 R_1 和直流电压源一端相连，但由于直流电压源等效为短路，因此在小信号等效电路中 R_1 连接在基极与地之间。

由于 R_1 同 R_2 并联，R_C 同 R_L 并联，这里定义 R_1 和 R_2 的并联电阻为 R_B，R_C 和 R_L 的并联电阻为 R'_L：

$$R_B = R_1 || R_2 = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} \tag{13.39}$$

$$R'_L = R_L || R_C = \frac{1}{1/R_L + 1/R_C} \tag{13.40}$$

并联电阻如图 13.27(b)所示。

13.8.2　电压增益

现在将根据等效电路来推导放大器电压增益的表达式。首先，输入电压应该等于 r_π 上的压降：

$$v_{in} = v_{be} = r_\pi i_b \tag{13.41}$$

而输出电压则等于流过 R'_L 的集电极电流所产生的电压：

$$v_o = -R'_L \beta i_b \tag{13.42}$$

负号表示电流从电压的正极性端流出。式(13.42)和式(13.41)两边分别相除，即得到电压增益为

$$A_v = \frac{v_o}{v_{in}} = -\frac{R'_L \beta}{r_\pi} \tag{13.43}$$

电压增益为负，表示共射极放大器是反相放大的。而增益大小通常相当大，可以达到几百。

式(13.43)的增益表达式表示有负载时的增益。而开路电压增益对于理解放大器的特性也非常重要，将开路代替 R_L，即可求出开路电压增益：

$$A_{voc} = \frac{v_o}{v_{in}} = -\frac{R_C \beta}{r_\pi} \tag{13.44}$$

13.8.3　输入阻抗

放大器的另一个重要参数是输入阻抗，通过分析等效电路来求解。输入阻抗是从输入端看进去得到的阻抗。图 13.27(b)所示的输入端等效电路等于 R_B 和 r_π 的并联组合：

$$Z_{in} = \frac{v_{in}}{i_{in}} = \frac{1}{1/R_B + 1/r_\pi} \tag{13.45}$$

通过将输入电压 v_{in} 除以电流 i_{in} 来求得输入阻抗，此电路的输入阻抗是纯电阻。如果等效电路中有电容或者电感，则可以通过相电压和相电流的比值来求得输入阻抗。

13.8.4 电流增益和功率增益

电流增益 A_i 可由式(11.3)求得：

$$A_i = \frac{i_o}{i_{in}} = A_v \frac{Z_{in}}{R_L} \tag{13.46}$$

放大器的功率增益则由其电流增益和电压增益之积求得：

$$G = A_i A_v \tag{13.47}$$

13.8.5 输出阻抗

输出阻抗是视信号电压源 v_s 为零时从负载端看进去求得的阻抗。如图 13.27(c)所示，当 v_s 为零时，基极上没有电压，所以 i_b 等于零。因此，受控源的电流 βi_b 等于零，即等效为开路。此时，从输出端看进去的阻抗就等于 R_C 。

$$Z_o = R_C \tag{13.48}$$

例 13.8 共射极放大器。

计算图 13.28 所示放大器的 A_v、A_{voc}、Z_{in}、A_i、G 和 Z_o，并画出 $v_o(t)$ 随时间变化的波形图其中，$v_s = 0.001\sin(\omega t)$。

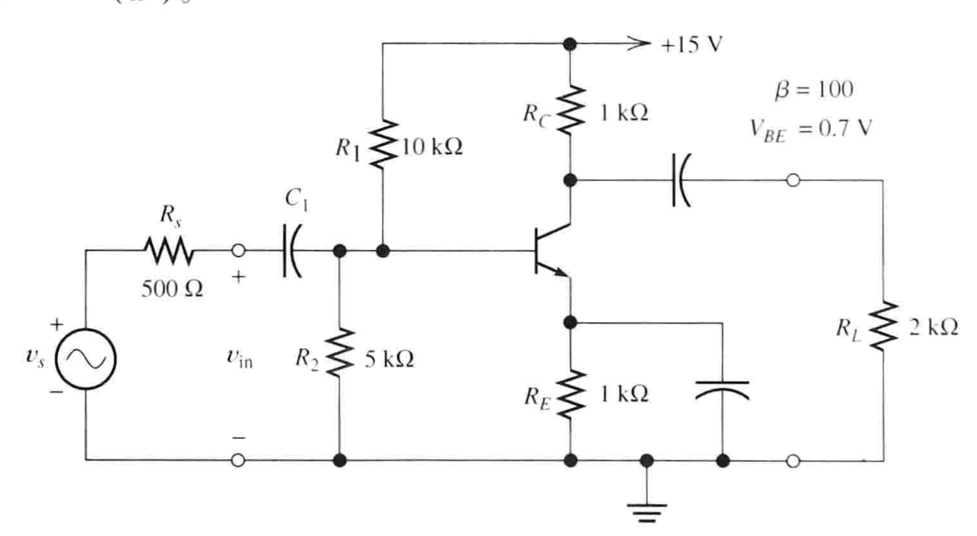


图 13.28 例 13.8 的共射极放大器

解： 要计算 r_π 需要先计算 I_{CQ}，所以首先分析直流情况下的电路。分析静态工作点不仅要考虑晶体管的影响，还要考虑 R_1、R_2、R_C 和 R_E 的影响。而对于输入电压和负载电阻，由于它们对 Q 点没有影响(因为在直流电路中耦合电容等效为开路)，因此可以不用考虑。

直流通路如图 13.2 所示。由例 13.7 可知，当 $\beta = 100$ 时，求得 Q 点为 $I_{CQ} = 4.12$ mA 和 $V_{CE} = 6.72$。将值代入式(13.35)，得：

$$r_\pi = \frac{\beta V_T}{I_{CQ}} = 631\ \Omega$$

由式(13.39)和式(13.40)，得：

$$R_B = R_1||R_2 = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} = 3.33\ \text{k}\Omega$$

$$R'_L = R_L||R_C = \frac{1}{1/R_L + 1/R_C} = 667\ \Omega$$

所以，求解式(13.43)～式(13.48)，得：

$$A_v = \frac{v_o}{v_{\text{in}}} = -\frac{R'_L\beta}{r_\pi} = -106$$

$$A_{v\text{oc}} = \frac{v_o}{v_{\text{in}}} = -\frac{R_C\beta}{r_\pi} = -158$$

$$Z_{\text{in}} = \frac{v_{\text{in}}}{i_{\text{in}}} = \frac{1}{1/R_B + 1/r_\pi} = 531\ \Omega$$

$$A_i = \frac{i_o}{i_{\text{in}}} = A_v\frac{Z_{\text{in}}}{R_L} = -28.1$$

$$G = A_iA_v = 2980$$

$$Z_o = R_C = 1\ \text{k}\Omega$$

注意：有载电压增益 A_v 略小于空载电压增益 A_{voc}，因为前者涉及放大器负载 R_L 的影响（详见第 11 章）。共射极放大器的功率增益相当大，这就是其得到广泛应用的原因。

电压源电压等于电压源内阻的电压和放大器输入阻抗的电压之和，所以有：

$$v_{\text{in}} = v_s\frac{Z_{\text{in}}}{Z_{\text{in}} + R_s} = 0.515v_s$$

当有载时，有：

$$v_o = A_v v_{\text{in}} = -54.6v_s$$

又因为 $v_s = 0.001\sin(\omega t)$ V，有：

$$v_o(t) = -54.6\sin(\omega t)\ \text{mV}$$

输出电压和输入电压的波形如图 13.29 所示，它们是反相的。

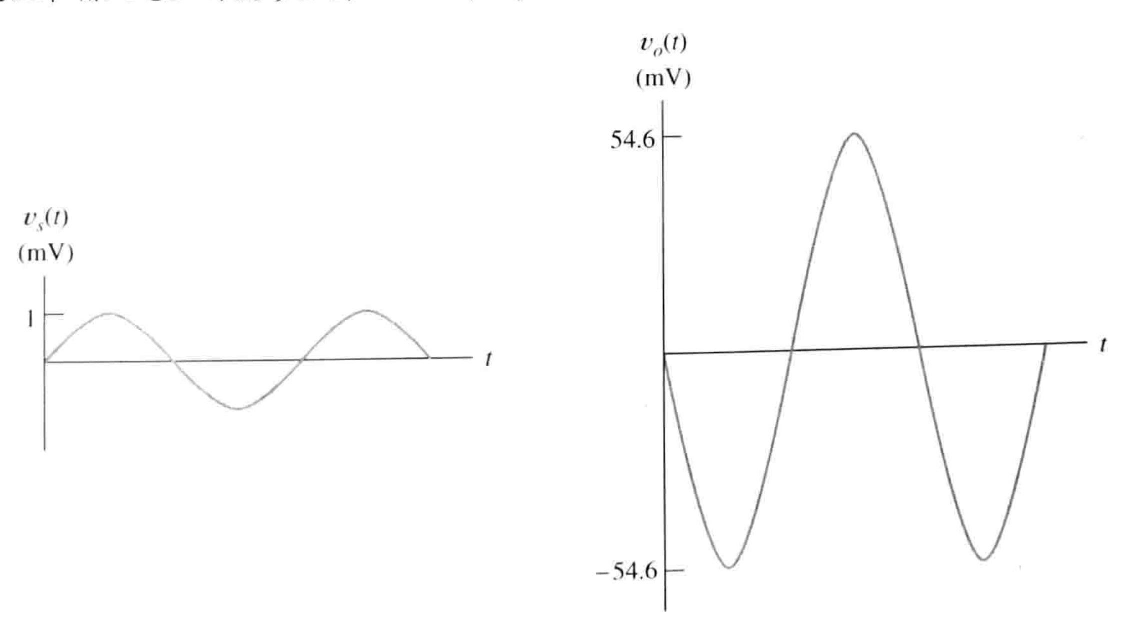


图 13.29　例 13.8 的输入电压和输出电压波形

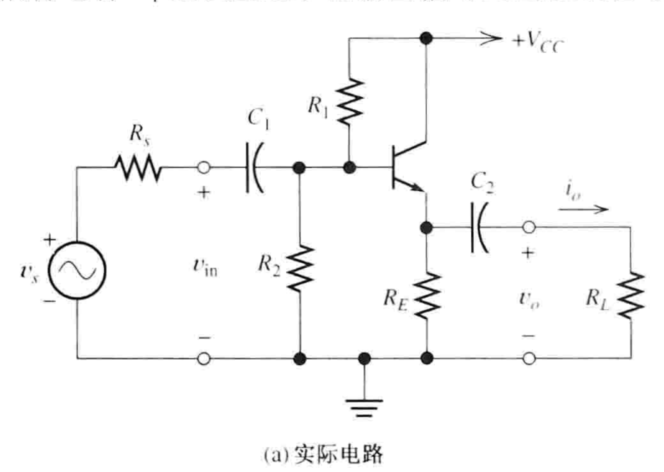
练习 13.14 若 $\beta=300$，重做例 13.8。(提示：当 β 变化时，Q 点随之发生变化。)

答案： $A_v=-109$，$A_{voc}=-163$，$Z_{in}=1186\ \Omega$，$A_i=-64.4$，$G=7004$，$Z_o=1\ \mathrm{k}\Omega$，$v_o=-76.5\sin(\omega t)\ \mathrm{mV}$。

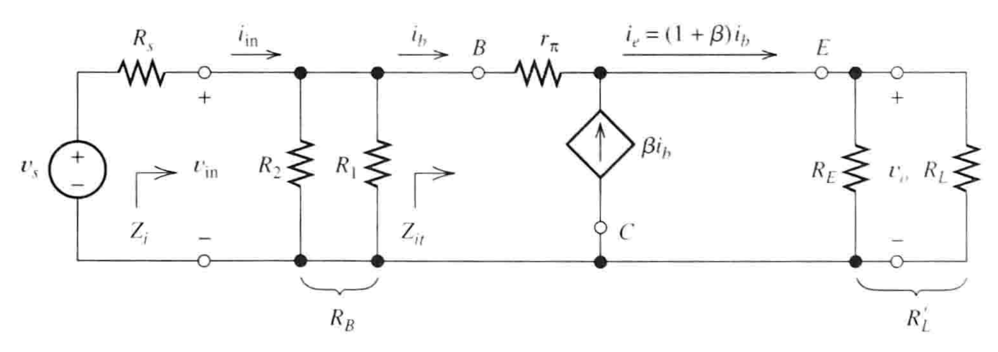
13.9 射极跟随器

另一种类型的 BJT 放大器如图 13.30(a)所示，称为射极跟随器。此电路无须共射极放大器的集电极电阻 R_C，所以该电路的偏置电路为 $R_C=0$ 的四电阻电路，即仅由电阻 R_1、R_2 和 R_E 组成的偏置电路。对此偏置电路的分析如同 13.6 节的例题。

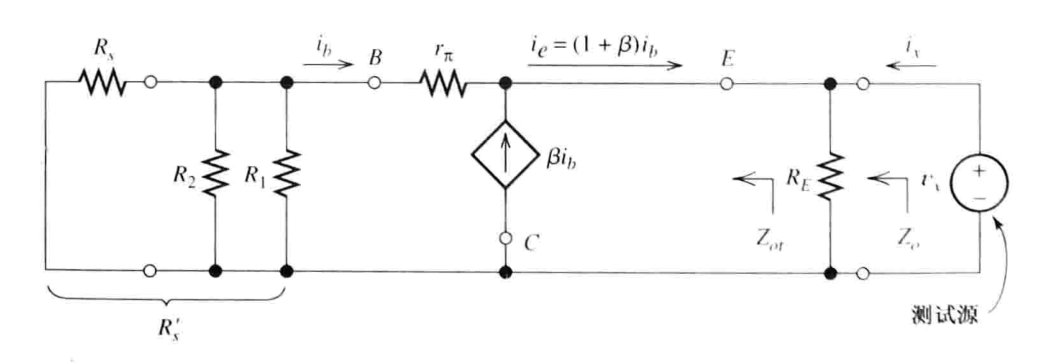
交流输入信号通过耦合电容 C_1 加到基极，而输出信号则通过耦合电容 C_2 加到负载。



(a) 实际电路



(b) 小信号等效电路



(c) 用于确定输出阻抗 Z_o 的等效电路

图 13.30 射极跟随器

13.9.1　小信号等效电路

射极跟随器的小信号等效电路如图 13.30(b)所示。和前面的分析一样，用短路代替电容和直流电压源，用小信号等效模型代替晶体管。

通过以上变化，电路如图 13.30(b)所示，此时集电极直接与地相连，因此，电路也称为射极跟随器。对于电路分析，画出小信号等效电路的能力是至关重要的。通过与图 13.30(b)所示的小信号等效电路相比较，试着根据原始电路画出小信号等效电路。

在等效电路中 R_1 和 R_2 并联，所以设并联电阻为 R_B。同样，设 R_E 和 R_L 的并联电阻为 R'_L，表达式如下：

$$R_B = R_1 || R_2 = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} \tag{13.49}$$

$$R'_L = R_L || R_E = \frac{1}{1/R_L + 1/R_E} \tag{13.50}$$

13.9.2　电压增益

现在推导射极跟随器的增益表达式。流过电阻 R'_L 的电流为 $i_b + \beta i_b$，所以输出电压为

$$v_o = R'_L(1+\beta)i_b \tag{13.51}$$

由基尔霍夫电压定律，得回路方程为

$$v_{\text{in}} = r_\pi i_b + (1+\beta)i_b R'_L \tag{13.52}$$

式(13.51)和式(13.52)两边分别相除，即得到电压增益：

$$A_v = \frac{(1+\beta)R'_L}{r_\pi + (1+\beta)R'_L} \tag{13.53}$$

上式的分母大于分子，所以射极跟随器的电压增益小于 1。但是事实上，电压增益只是稍稍小于 1，并且由于放大器的电流增益往往较大，此类放大器同样很有用。

注意：电压增益为正，说明射极跟随器的输入与输出电压是同相的，即如果输入电压变化，输出电压也会随之变化，而且变化的大小与输入电压几乎相同，即输出电压跟随输入电压变化。这就是此类放大器也称为射极跟随器的原因。

13.9.3　输入阻抗

如图 13.30(b)所示，输入阻抗 Z_i 等于 R_B 和 Z_{it} 的并联阻抗，其中，Z_{it} 为从晶体管的漏极看进去的输入阻抗。所以，输入阻抗 Z_i 写为

$$Z_i = \frac{1}{1/R_B + 1/Z_{it}} = R_B || Z_{it} \tag{13.54}$$

由式(13.52)得 Z_{it} 为

$$Z_{it} = \frac{v_{\text{in}}}{i_b} = r_\pi + (1+\beta)R'_L \tag{13.55}$$

与 BJT 放大器相比，射极跟随器的输入阻抗更高。(注意：在第 12 章中表明场效应晶体管

能提供比 BJT 更大的输入阻抗。)在获得射极跟随器的电压增益和输入电阻之后，由式(11.3)和式(11.5)便得到电流增益和功率增益。

13.9.4 输出阻抗

输出阻抗是从输出端看进去的戴维南阻抗。为了计算射极跟随器的输出阻抗，需要使电路空载，信号源为零，此时电路如图 13.30(c)所示。在输出端加上一个附加电压源 v_x，其电流为 i_x，方向为流入输出阻抗，则输出阻抗为

$$Z_o = \frac{v_x}{i_x} \tag{13.56}$$

(对于纯电阻电路，输出阻抗可由电压与电流的变化量求得；而对于非纯电阻电路，应该采用相量来计算。)

为了求输出阻抗值，需要写出 v_x 和 i_x 的方程。例如，R_E 上方所有电流之和满足方程：

$$i_b + \beta i_b + i_x = \frac{v_x}{R_E} \tag{13.57}$$

对于上式，要想求出输出阻抗，需要消去 i_b 。最后的结果中应该只包括晶体管参数和电阻值，而不包括任何电路参数，例如 i_b 。因此，还需要另一个方程。

首先，定义 R_S、R_1 和 R_2 的并联电阻为

$$R_s' = \frac{1}{1/R_s + 1/R_1 + 1/R_2} \tag{13.58}$$

所需要的另一个方程由基尔霍夫电压定律得：

$$v_x + r_\pi i_b + R_s' i_b = 0 \tag{13.59}$$

由式(13.59)解出 i_b ，代入式(13.57)，并化简得输出阻抗为

$$Z_o = \frac{v_x}{i_x} = \frac{1}{(1+\beta)/(R_s' + r_\pi) + 1/R_E} \tag{13.60}$$

这个阻抗也可以看作是 R_E 和以下电阻的并联：

$$Z_{ot} = \frac{R_s' + r_\pi}{1+\beta} \tag{13.61}$$

可见，Z_{ot} 是从晶体管射极看进去的等效阻抗，如图 13.30(c)所示。射极跟随器的输出阻抗往往比其他 BJT 放大器的输出阻抗小很多。

例 13.9 射极跟随器的分析。

计算如图 13.31 所示的射极跟随器的电压增益、输入阻抗、电流增益、功率增益和输出阻抗。

解： 为了计算 r_π，首先要确定偏置点。直流通路中，耦合电容等效为开路，且没有 R_S 和 R_L，所以直流电路如图 13.31(b)所示。

用其戴维南等效模型代替基极偏置电路，等效电路如图 13.31(c)所示。假设工作点在线性放大区，由基极回路得：

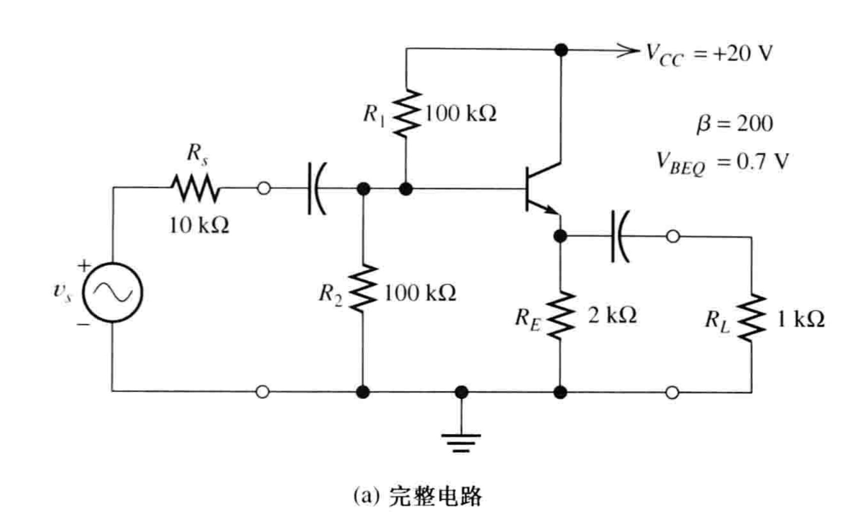
$$V_B = R_B I_{BQ} + V_{BEQ} + R_E(1+\beta)I_{BQ}$$

代入值，得：$I_{BQ} = 20.6\mu A$。有：

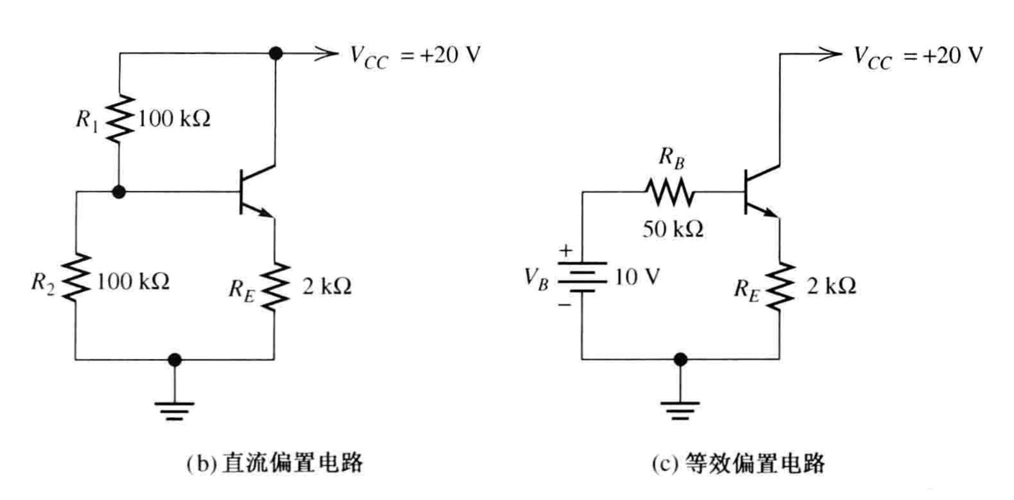
$$I_{CQ} = \beta I_{BQ} = 4.12 \text{ mA}$$

$$V_{CEQ} = V_{CC} - I_{EQ}R_E = 11.7 \text{ V}$$

因为 V_{CEQ} 远远大于 0.2 V 且 I_{BQ} 为正，所以晶体管工作在线性放大区。



(a) 完整电路



(b) 直流偏置电路　　(c) 等效偏置电路

图 13.31　例 13.9 的射极跟随器

由式(13.35)，得：

$$r_\pi = \frac{\beta V_T}{I_{CQ}} = 1260\ \Omega$$

在确定晶体管的工作点以及 r_π 值之后，计算放大器的增益和阻抗。将数据代入式(13.49)和式(13.50)，得：

$$R_B = R_1 || R_2 = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} = 50\ \text{k}\Omega$$

$$R'_L = R_L || R_E = \frac{1}{1/R_L + 1/R_E} = 667\ \Omega$$

由式(13.53)得电压增益为

$$A_v = \frac{(1+\beta)R'_L}{r_\pi + (1+\beta)R'_L} = 0.991$$

由式(13.54)和式(13.55)得输入阻抗为

$$Z_{it} = r_\pi + (1+\beta)R'_L = 135\ \text{k}\Omega$$

$$Z_i = \frac{1}{1/R_B + 1/Z_{it}} = 36.5\ \text{k}\Omega$$

由式(13.58)和式(13.60)，得：

$$R'_s = \frac{1}{1/R_s + 1/R_1 + 1/R_2} = 8.33\ \text{k}\Omega$$

$$Z_o = \frac{1}{(1+\beta)/(R'_s + r_\pi) + 1/R_E} = 46.6\ \Omega$$

由式(11.3)，得电流增益：

$$A_i = A_v \frac{Z_i}{R_L} = 36.2$$

由式(11.5)，得功率增益：

$$G = A_v A_i = 35.8$$

尽管电压增益稍稍小于1，但是电流增益却很大(与1相比)。因此，输出功率大于输入功率，此电路是有效的放大器。

练习 13.15 若$\beta = 300$，重做例13.9，并将结果同例13.9的结果进行比较分析。

答案：$A_v = 0.991$，$Z_i = 40.1\ \text{k}\Omega$，$Z_o = 33.2\ \Omega$，$A_i = 39.7$，$G = 39.4$。

本章小结

1. npn 型双极结型晶体管(BJT)由两层 n 型材料(分别为集电区和发射区)及其中间的 p 型材料(基区)组成。
2. 在线性放大区，集电极电流是被放大了的基极电流，表达式为：$i_C = \beta i_B$。其中，β 的典型值为100。
3. npn 型 BJT 的典型共射极特性曲线如图13.5所示。
4. 负载线法是分析放大电路的基本方法。
5. BJT 放大器不仅放大信号，还会使信号失真。在线性区，失真主要因为输入特性曲线的曲率以及输出特性曲线的不等间距排列所致。对于大信号而言，当晶体管工作在饱和区和截止区之间不断变化时，将发生“限幅”之类比较严重的失真。
6. 除了电流方向和电压极性相反外，pnp 型 BJT 和 npn 型 BJT 放大电路几乎是完全相同的。
7. BJT 工作在以下3个区：线性放大区、饱和区和截止区。这3个工作区的 BJT 等效电路模型如图13.16所示。
8. 在 BJT 的大信号分析中，我们先假定工作点在某区域，利用相应的电路等效模型来解出电流和电压，然后判断所得结果是否满足所假定区域的约束条件。如果不吻合，则重复以上过程直到得到合理的结果。
9. BJT 作为放大器件时，必须被偏置工作在线性区。四电阻偏置电路(如图13.22(a)所示)常用于简单的放大器。
10. BJT 的小信号等效电路如图13.26所示。
11. 要分析中频区的放大器，首先需要画出小信号等效电路。BJT 由它的等效电路模型代替，耦合电容和旁路电容则用短路代替。然后，获得增益和阻抗的表达式，并代数求解。
12. 两种重要的 BJT 放大电路是共射极放大器(如图13.27(a)所示)和射极跟随器(如图13.30(a)所示)。共射极放大器是反相放大器，且具有较大的电压增益与电流增益和中等的输入阻抗。而射极跟随器是同相放大器，具有近似为1的电压增益、较大的电流增益和较高的输入阻抗。

习题

13.1 节　电压和电流的关系

P13.1　画出 *npn* 型 BJT 的电路符号，标出各极以及相应电流的参考方向，并确定 BJT 工作在线性放大区时的实际电流方向。

P13.2　画出 *npn* 型 BJT 的结构示意图，并标出 3 个区域。在正常运行时，电流是流入还是流出基极、集电极以及发射极？

P13.3　一个 *pn* 结在正向偏置时，其哪一侧应该接至正电源？在正常工作状态下，BJT 的发射结应该如何偏置（正偏或者反偏）？对于集电结呢？

P13.4　写出 *npn* 晶体管的发射极电流的肖克莱方程。

P13.5　给出一个 BJT 参数 α 与 β 的定义，并说明相应的 *pn* 结的偏置状况。

* P13.6　一个 *npn* 晶体管的基极-射极之间（发射结）是正偏，集电结是反偏，已知 $i_C=9$ mA，$i_B=0.3$ mA，求 i_E、α 和 β。

* P13.7　假设在室温下（$V_T=26$ mV），一个 *npn* 晶体管的 $I_{ES}=10^{-13}$ A，$\beta=100$，$v_{CE}=10$ V，$i_E=10$ mA。求 v_{BE}，v_{BC}，i_B，i_C 和 α。

P13.8　已知 BJT 的 $\beta=200$，求 α。

P13.9　已知某 *npn* 型 BJT 的基极-发射极（发射结）正偏、基极-集电极（集电结）反偏。若 $\beta=200$，$i_B=10$ μA，求 i_C 和 i_E。

P13.10　已知某 *npn* 型 BJT 的基极-发射极（发射结）正偏、基极-集电极（集电结）反偏。若 $i_C=10$ mA，$i_E=10.5$ mA，求 i_B、α 和 β。

P13.11　在热力学温度 $T=300$ K 时，一个晶体管的参数 $i_E=10$ mA，$v_{BE}=0.600$ V。要求计算 I_{ES}；在热力学温度 $T=310$ K 时，一个晶体管的参数 $i_E=10$ mA，$v_{BE}=0.580$ V，再计算 I_{ES}，并说明当温度增加 10 K 时是什么引起 I_{ES} 的变化。提示：根据式（10.2），$V_T=kT/q$，玻尔兹曼常数 $k=1.38\times10^{-23}$ J/K，电荷电量 $q=1.60\times10^{-19}$ C。

P13.12　求图 P13.12 中晶体管的 β 值。

P13.13　假设某个 *npn* 晶体管的 $V_{BE}=0.7$ V（当 $I_E=10$ mA 时），假设 $V_T=26$ mV，试计算 $I_E=1$ mA 时 V_{BE} 的值，然后再计算 $I_E=1$ μA 时的 V_{BE} 值。

P13.14　分析图 P13.14 所示电路，晶体管 Q_1 和 Q_2 完全相同，且 $I_{ES}=10^{-14}$ A，$\beta=100$，求 V_{BE} 和 I_{C2}。设 $V_T=26$ mA。（提示：两个晶体管均工作在线性放大区，因为两个晶体管相同且 V_{BE} 相等，所以集电极电流相等。）

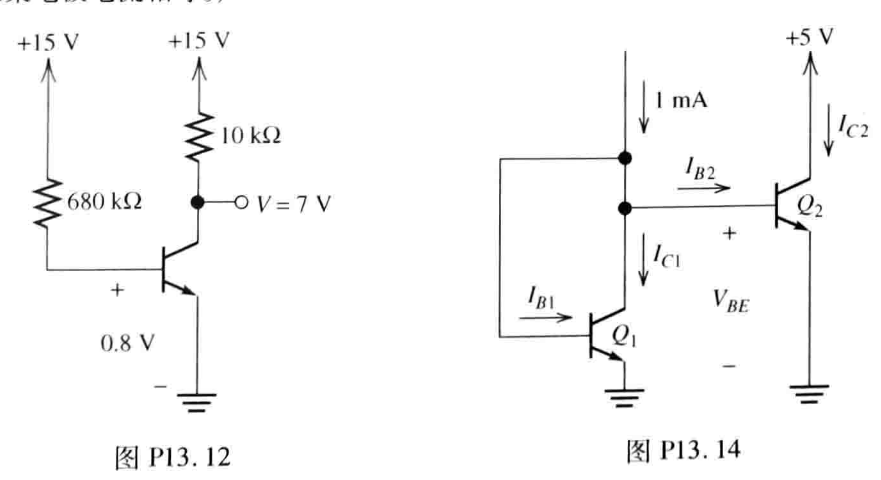


图 P13.12　　　　图 P13.14

P13.15　如习题 P13.14，假设 Q_1 有 $I_{ES1}=10^{-14}$ A，$\beta=100$，而 Q_2 有 $I_{ES2}=10^{-13}$ A，$\beta=100$。重复习题 P13.14 的问题。

*P13.16 两个晶体管 Q_1 和 Q_2 并联等效为一个晶体管，如图 P13.16 所示。如果单个晶体管的参数如下：$I_{ES1} = I_{ES2} = 10^{-13}$ A，$\beta_1 = \beta_2 = 100$，求等效晶体管的 I_{ES} 和 β_{eq}，假设所有晶体管均工作在同一温度下。

P13.17 图 P13.17 中两个晶体管的连接称为复合管，可以等效为一个晶体管。求用 β_1 和 β_2 表示的等效晶体管的 β_{eq}。

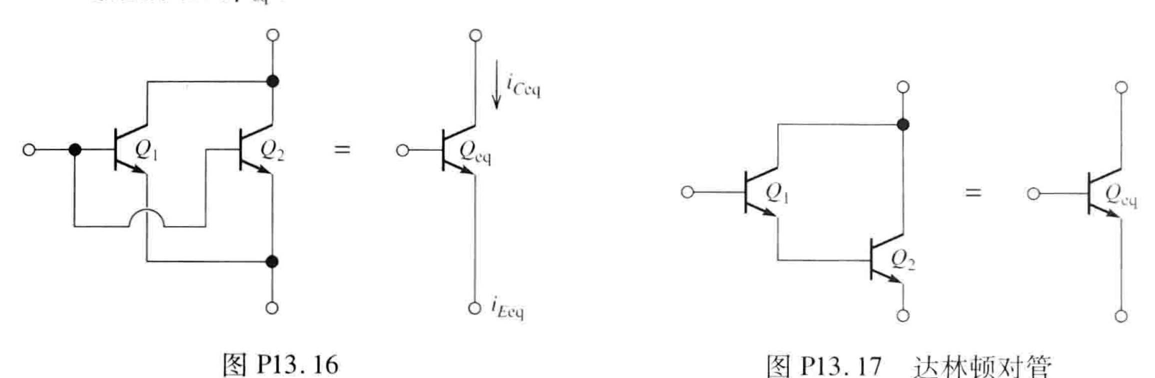


图 P13.16　　　　图 P13.17　达林顿对管

13.2 节　共射极接法的特性曲线

*P13.18 在室温 30℃下，已知某 *npn* 型 BJT 在 $i_B = 0.1$ mA 时 $v_{BE} = 0.7$ V。试画出 30℃时的输入特性曲线。求当 $i_B = 0.1$ mA 时 v_{BE} 在 180℃下的近似值。(提示：温度每上升 1℃，v_{BE} 降低 2 mV。)画出 180℃时的输入特性曲线。

*P13.19 图 P13.19 所示为某晶体管的特性曲线，试求该晶体管 α 和 β 的值。

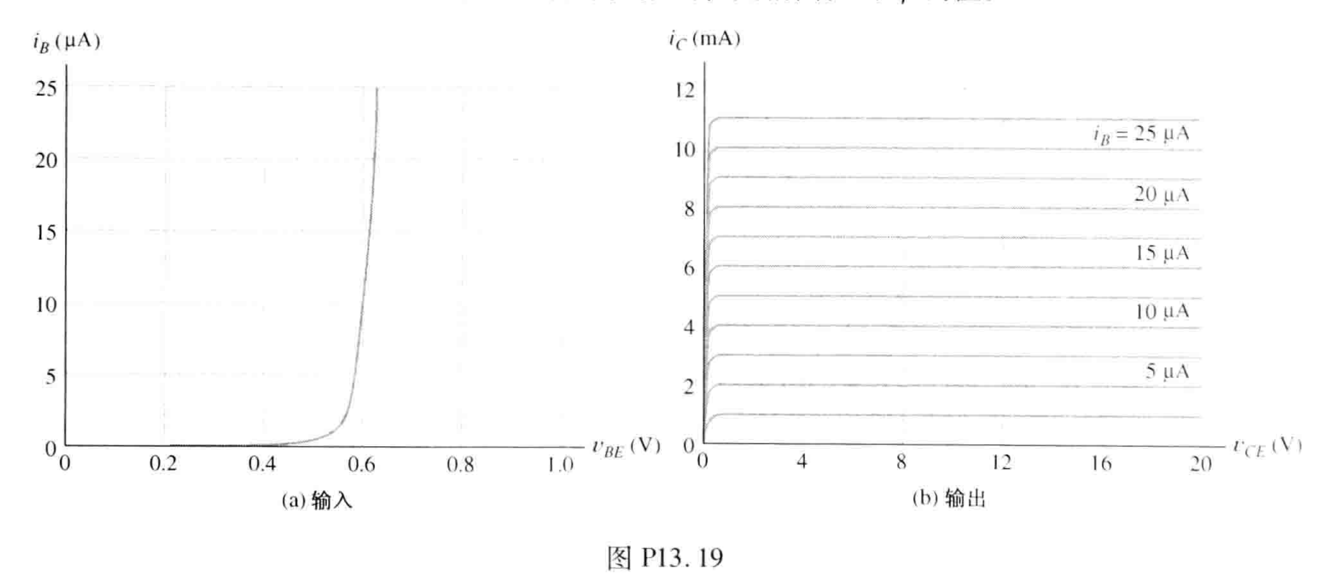


图 P13.19

P13.20 已知一个 *npn* 硅晶体管的参数 $\beta = 100$，$i_B = 0.1$ mA。如果 v_{CE} 在 0 ~ 5 V 变化，要求画出 $i_C \sim v_{CE}$ 的特性曲线。当 $\beta = 300$ 时重复上述要求。

P13.21 某晶体管的特性曲线如图 P13.19 所示，其中 $i_C = 8$ mA，$v_{CE} = 12$ V。试分别在输入和输出特性曲线上标出其工作点。

13.3 节　共射极放大器的负载线分析法

P13.22 简述 BJT 放大器失真的几种原因。

P13.23 如图 13.7 所示电路，已知 $V_{CC} = 10$ V，$R_C = 2$ kΩ，要求在 $i_C \sim v_{CE}$ 的特性曲线上画出负载线。当 $V_{CC} = 15$ V 时，画出负载线，并说明当电源电压改变时，负载线的斜率如何变化。

*P13.24 分析图 13.7 所示电路，设 $V_{CC} = 20$ V，$V_{BB} = 0.8$ V，$R_B = 40$ kΩ，$R_C = 2$ kΩ，输入信号是幅值为 0.2 V、频率为 1 kHz 的正弦信号 $v_{in}(t) = 0.2\sin(2000\pi t)$。晶体管的共射极特性曲线如图 P13.19 所示。求 v_{CE} 的最大值、最小值以及在 Q 点处的值，并计算该电路的近似电压增益。

P13.25 若 $V_{BB}=0.3\text{V}$，重做习题 P13.24，并分析为什么电压增益会这么小。

P13.26 若 $R_C=10\ \text{k}\Omega$，重做习题 P13.24。简述 $v_{CE}(t)$ 的波形特点，并分析为什么电压增益在此电路中没有意义。

13.4 节 *pnp* 型晶体管

*P13.27 画出一个 *pnp* 晶体管的电路符号，标注各极和电流。当器件工作在恒流区时，标注各极电流的实际方向。

*P13.28 某一 *pnp* 硅晶体管的 $\beta=100$，$i_B=50\ \mu\text{A}$。画出当 v_{CE} 在 0 ~ −5 V 之间变化时 i_C 与 v_{CE} 的关系曲线。当 $\beta=300$ 时，按照要求重做一遍。

*P13.29 电路如图 P13.29 所示，其中 $i_s(t)=10+5\sin(2000\pi t)\ \mu\text{A}$，晶体管的 $\beta=100$。

(a) 画出 i_B 分别等于 0 μA、5 μA、10 μA、15 μA、20 μA 和 25 μA 时，v_{CE} 在 0 ~ −20 V 的范围内变化的输出特性曲线。

(b) 在图 P13.29(a) 所示的输出特性曲线上画出输出负载线。

(c) 求 $I_{C\max}$、I_{CQ} 和 $I_{C\min}$。

(d) 画出 $v_{CE}(t)$ 随时间变化的曲线。

(e) 若 $i_s(t)=20+5\sin(2000\pi t)\ \mu\text{A}$，重做(c)和(d)。

P13.30 已知一个 *pnp* 晶体管的 $V_{CE}=-5\ \text{V}$，$I_C=0.995\ \text{mA}$，$I_E=1.000\ \text{mA}$。计算晶体管的 α 与 β 值。

P13.31 在工作温度为 30℃ 时，已知一个 *pnp* 晶体管在 $I_E=2\ \text{mA}$ 时的 $V_{BE}=-0.7\ \text{V}$，估计当 $I_E=2\ \text{mA}$、工作温度为 180℃ 时的 V_{BE} 值。

P13.32 图 P13.32 所示是一个 *npn* 晶体管和一个 *pnp* 晶体管连接而成的 Sziklai 对管，等效为一个 *npn* 晶体管。要求用 β_1 与 β_2 表示 β_{eq} 的值。

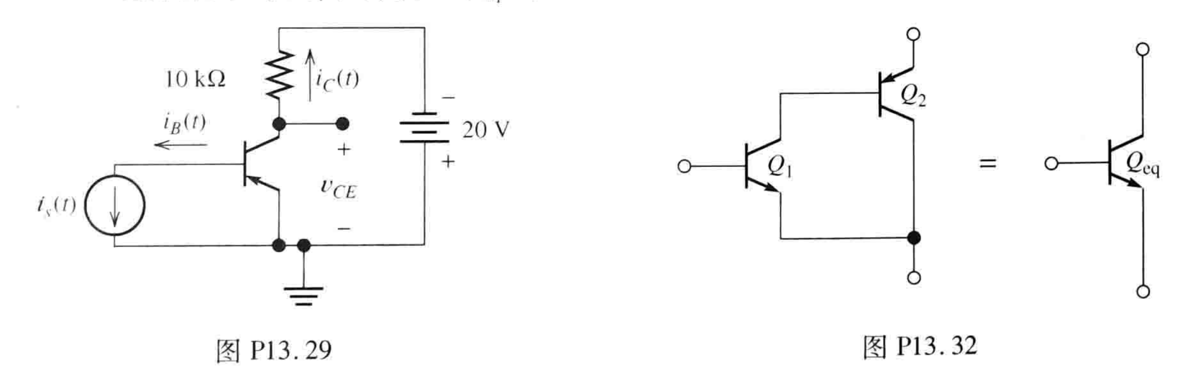


图 P13.29　　　　图 P13.32

13.5 节 大信号直流电路模型

P13.33 当一个 *npn* 晶体管在室温下工作于放大区时，画出其大信号直流等效电路，并表示能确保器件工作在放大区的电流和电压极值。如果要工作在饱和区，又该如何取值？如果要工作在截止区呢？

P13.34 将器件更换为 *pnp* 晶体管，重做习题 P13.33。

P13.35 当一个典型的小信号 *npn* 晶体管工作在室温下时，假设 i_B 在 0 ~ 40 μA 范围变化，试画出输入特性曲线。如果 $\beta=100$，i_B 以 10 μA 为梯度变化，试画出输出特性曲线。最后，标注截止区、恒流(放大)区和饱和区。

*P13.36 BJT 分别工作在线性放大区、饱和区和截止区时，基极-发射极(发射结)以及基极-集电极(集电结)将如何偏置？

P13.37 已知某 *npn* 型 BJT 的 $\beta=100$，确定以下各种情况 BJT 的工作区：(a) $V_{CE}=10\ \text{V}$，$I_B=20\ \mu\text{A}$；(b) $I_C=I_B=0$；(c) $V_{CE}=3\ \text{V}$，$V_{BE}=0.4\ \text{V}$；(d) $I_B=50\ \mu\text{A}$，$I_C=1\ \text{mA}$。

P13.38 已知某 *pnp* 型 BJT 的 $\beta=100$，工作在室温下，在以下情况下分析其工作区域：(a) $V_{CE}=-5\ \text{V}$，$V_{BE}=-0.3\ \text{V}$；(b) $I_C=10\ \text{mA}$，$I_B=1\ \text{mA}$；(c) $I_B=0.05\ \text{mA}$，$V_{CE}=-5\ \text{V}$。

P13.39 如图 P13.39 中 4 个 BJT 的β均等于100。当 BJT 工作在饱和区时，$|V_{CE}|=0.2$ V；当 BJT 工作在线性区和饱和区时，$|V_{BE}|=0.6$ V。确定每个晶体管的工作区，并计算 V_{CE}、I_B、I_E 和 I_E 的值。

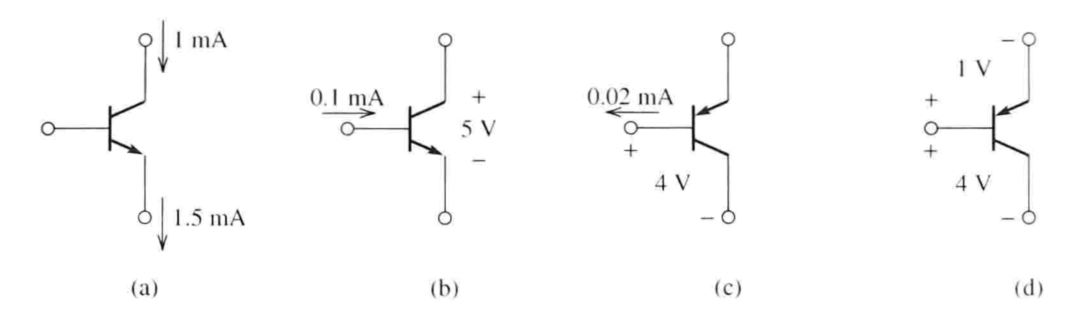


图 P13.39

P13.40 如图 P13.17 所示的达林顿对管，可等效为图中的一个晶体管。假设 Q_1、Q_2都工作在放大区，且$|V_{BE}|=0.6$ V，要求计算等效晶体管工作在放大区时的 V_{BE}值。如果将达林顿管换作 Sziklai 对管，如图 P13.32 所示，重复上述要求。

13.6 节 BJT 电路的大信号直流分析

*P13.41 写出采用大信号电路模型进行 BJT 电路直流分析的具体步骤。

P13.42 画出固定偏置电路，并解释为什么此电路不适合作为多级放大电路的偏置电路。

P13.43 画出 *npn* 型 BJT 的四电阻偏置电路的电路图。

*P13.44 采用图 13.16 所示的大信号电路模型分析晶体管，求图 P13.44 中 4 个晶体管的 I_C 和 V_{CE}，设晶体管工作在放大区和饱和区时均有$\beta=100$，$|V_{BE}|=0.7$ V。若$\beta=300$，重复以上要求，并比较其值的不同。

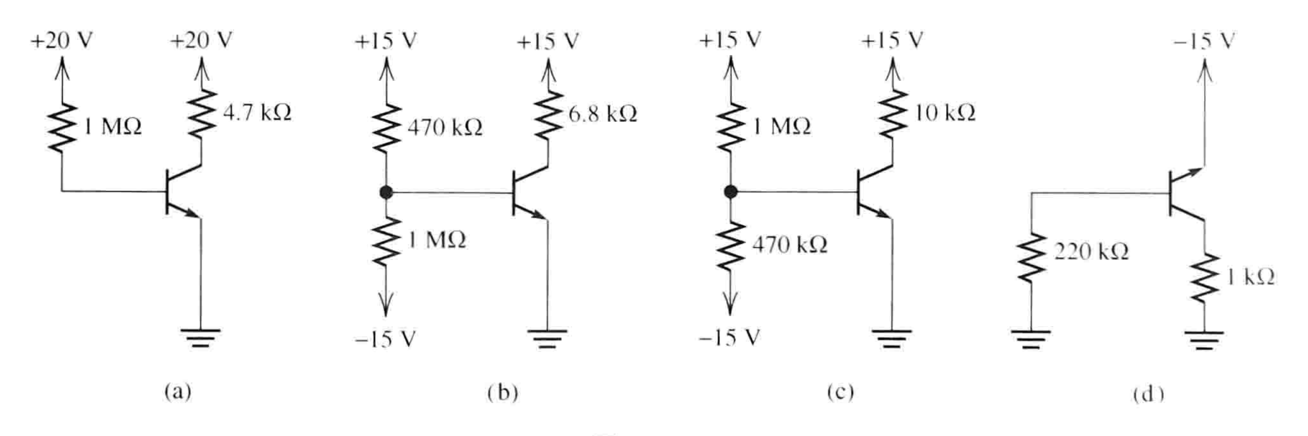


图 P13.44

P13.45 分析图 P13.45 所示电路，当β分别为 100 和 300 时，求 I 和 V 的值。以下所有晶体管工作在线性放大区和饱和区，均有$|V_{BE}|=0.7$ V。

P13.46 分析图 13.22(a)所示四电阻偏置电路，其中 $R_1=200$ kΩ，$R_2=100$ kΩ，$R_C=10$ kΩ，$R_E=10$ kΩ，$V_{CC}=15$ V、$\beta=200$。设 $V_{BE}=0.7$ V，求 I_{CQ} 和 V_{CEQ}。

*P13.47 分析图 P13.47 所示电路。要求 I_C 在 Q 点处的值大于最小值 4 mA 且小于最大值 5 mA。设电阻值恒定，而β在 100～300 的范围内变化，假设 R_B 的最大值仍然满足约束条件。求 R_B 的最大值以及此时的 R_E。

P13.48 如图 13.22(a)所示的四电阻偏置电路，其中 $R_1=100$ kΩ，$R_2=200$kΩ，$V_{CC}=15$ V，$R_C=10$ kΩ，$R_E=10$ kΩ，$\beta=200$。假设器件工作在放大区和饱和区时均有 $V_{BE}=0.7$ V，要求计算 I_{CQ} 和 V_{CEQ}。提示：晶体管不可能工作在放大区。

图 P13.45

*P13.49　四电阻偏置电路如图 13.22(a)所示，$V_{CC}=15$ V，$R_1=100$ kΩ，$R_2=47$ kΩ，$R_C=4.7$ kΩ，$R_E=4.7$ kΩ。设 β 在 50 ~ 200 的范围内变化，$V_{BE}=0.7$ V，电阻的偏差为 ±5%，求 I_C 的最大值和最小值。

P13.50　如图 P13.50 所示的晶体管都工作在放大区，$\beta=100$，$V_{BE}=0.7$ V。要求计算每个晶体管的 I_C 和 V_{CE}。

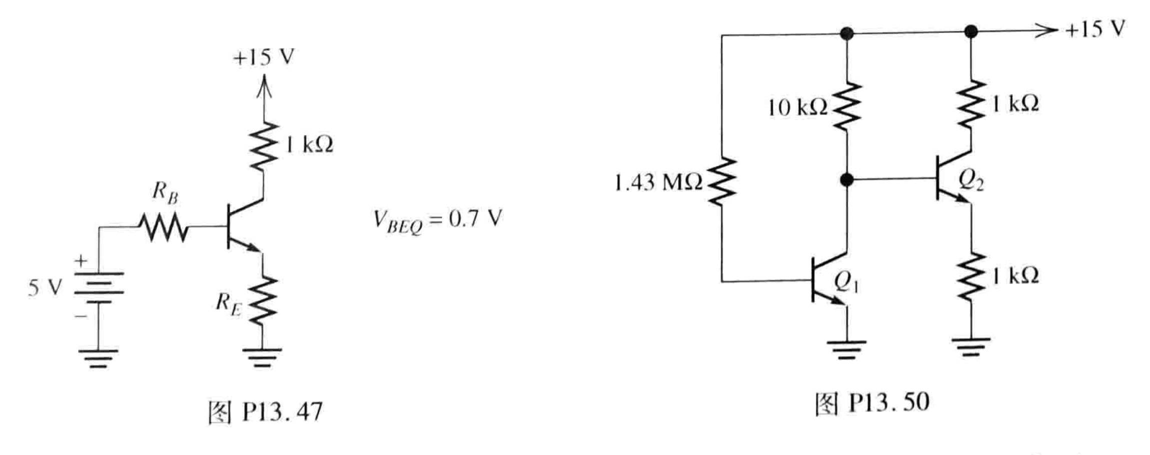


图 P13.47　　图 P13.50

P13.51　分析图 P13.51 所示电路，求 R_1 和 R_C 为何值时，使偏置点为 $V_{CE}=5$ V，$I_C=2$ mA。

P13.52　分析图 P13.52 所示电路，求 I_C 和 V_{CE}。

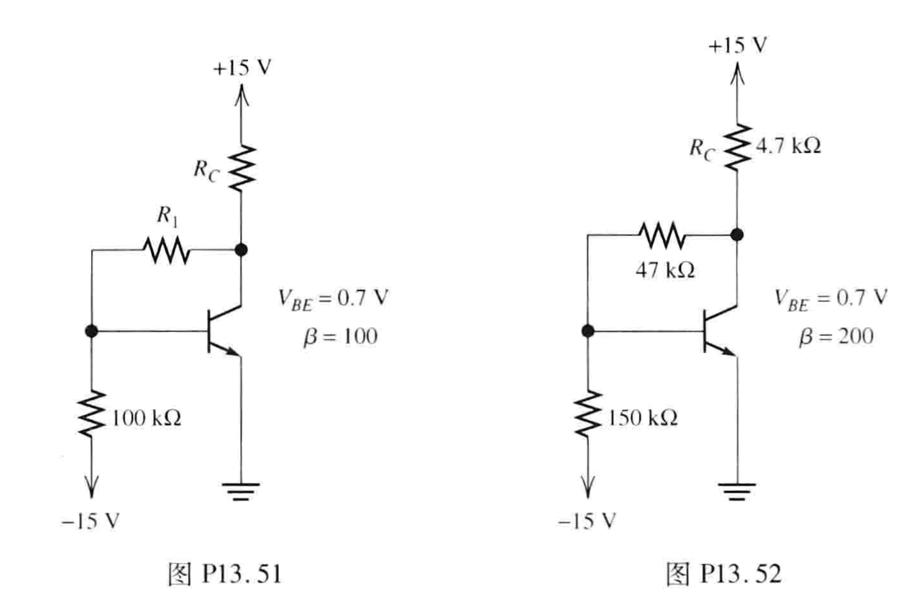


图 P13.51　　图 P13.52

13.7 节　小信号等效电路

P13.53　画出 BJT 的小信号等效电路。

P13.54　已知β和静态工作点 Q 值，要求给出计算 r_π 的公式。

P13.55　在室温下，某 *npn* 型 BJT 的$\beta=100$。求 I_{CQ} 分别等于 0 mA、0.1 mA 和 1 μA 时 r_π 的值。设 BJT 工作在线性放大区，且 $V_T=26$ mV。

*P13.56　设某个 BJT 新产品的输入特性 $i_B=10^{-5}v_{BE}^2$，电流单位为 A，电压单位为 V，$i_C=100i_B$。其小信号等效电路如图 13.26 所示，求等效电阻 r_π 与 I_{CQ}的关系式，若 $I_{CQ}=1$ mA，求 r_π。

P13.57　如图 P13.17 所示的达林顿对管可以等效为一个晶体管。分别画出对管和等效晶体管的小信号等效电路，根据 $r_{\pi1}$、$r_{\pi2}$、β_1 和 β_2 推导 $r_{\pi eq}$ 的表达式。

P13.58　Sziklai 对管如图 P13.32 所示，重做习题 P13.17，分别画出对管和等效晶体管的小信号等效电路，根据 $r_{\pi1}$、$r_{\pi2}$、β_1 和 β_2 推导 $r_{\pi eq}$ 的表达式。

13.8 节　共射极放大器

P13.59　为什么用耦合电容将输入电压和负载连接到放大电路？如果放大直流信号，是否还需要耦合电容？为什么？

P13.60　共射极放大器是否为反相放大器？其电压增益和电流增益有什么特点？

P13.61　采用 4 个电阻作为偏置电路，画出一个共射极放大电路，其中包含一个信号源和一个负载电阻。

P13.62　分析图 P13.62 所示的共射极放大器。画出直流电路模型，并求 I_{CQ}、$r_\pi A_v$、A_{voc}、Z_{in}、A_i、G 和 Z_o。设在该电路工作的频率范围内，耦合电容和旁路电容等效为短路。

*P13.63　将图 P13.62 所示电路的电阻均增大 100 倍，包括 R_s和 R_L。重做习题 P13.62，并列表分析低阻抗放大器和高阻抗放大器所得结果的区别。

P13.64　分析图 P13.64 所示的共射极放大器。(a)画出电路的小信号等效电路，设耦合电容等效为短路。(b)推导由电阻值、r_π 以及β表示的电压增益的表达式。(c)推导由电阻值、r_π 以及β表示的输入电阻的表达式。(d)设$\beta=100$，$V_{BEQ}=0.7$ V，$R_C=2$ kΩ，$R_L=2$ kΩ，$R_E=100$ Ω 以及 $V_{CC}=20$ V。求 R_B 为何值时 $I_{CQ}=5$ mA。(e)对于(d)中给出的值，计算由(c)和(d)推导出的表达式的值。

13.9 节　射极跟随器

P13.65　画出一个射极跟随器，其中包含一个信号源和一个负载电阻。

P13.66　射极跟随器的电压增益和功率增益有什么特点？

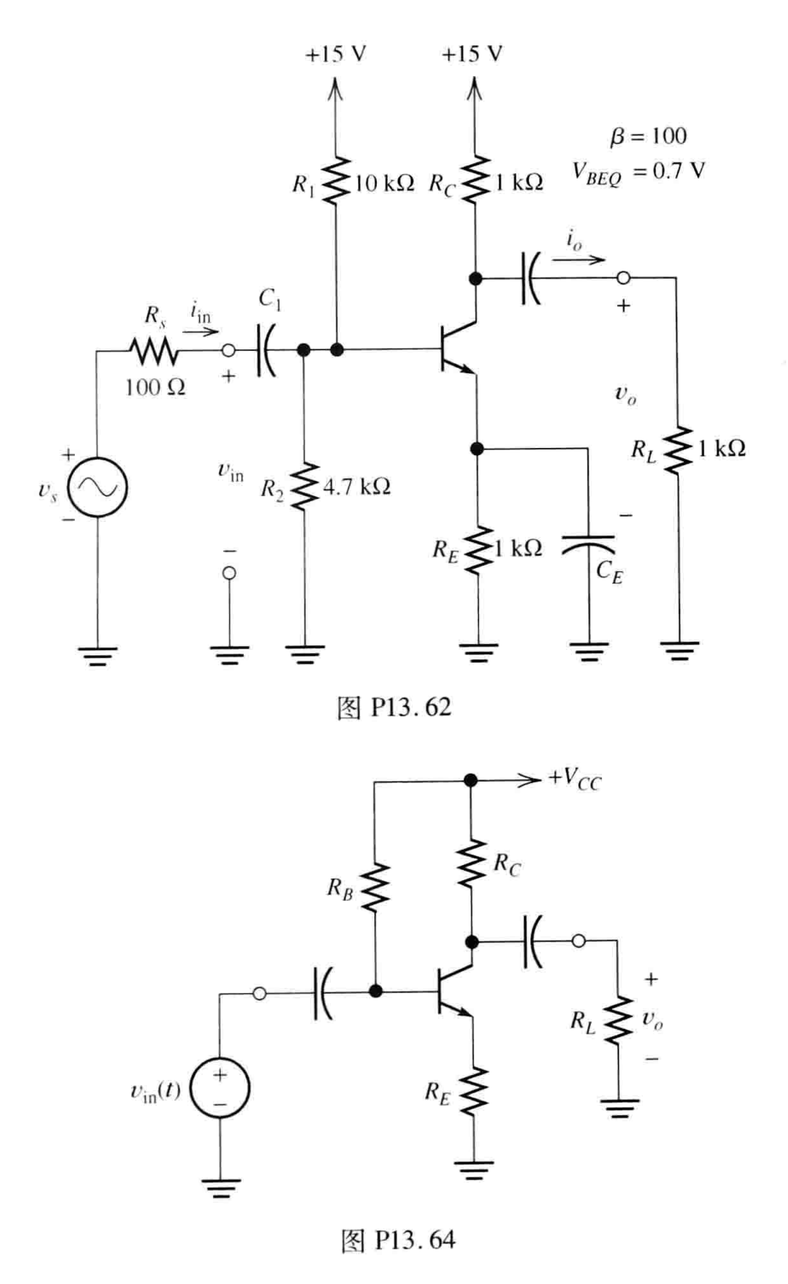


图 P13.62

图 P13.64

* P13.67　分析图 P13.67 所示的射极跟随器，画出直流等效模型并求 I_{CQ}。然后根据所求的结果计算 r_π 以及 A_v、A_{voc}、Z_{in}、A_i、G 和 Z_o 的值。

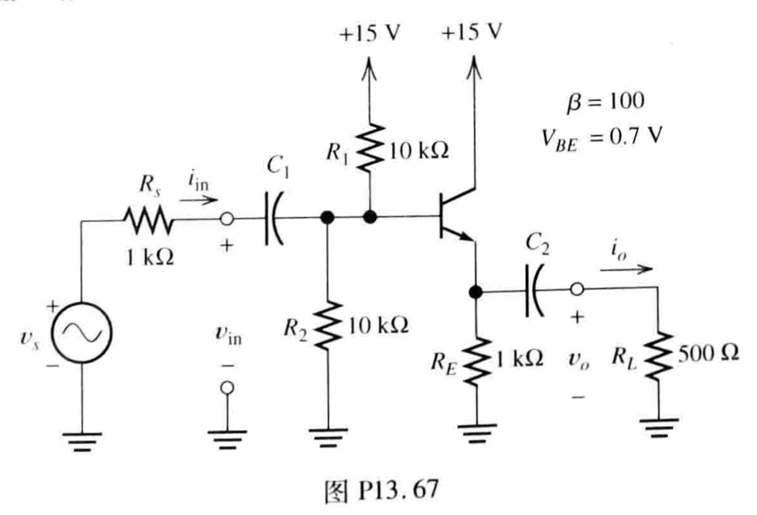


图 P13.67

P13.68　将图 P13.67 所示电路的电阻均增大 100 倍，包括 R_S 和 R_L。重做习题 P13.67，并列表比较低阻抗放大器和高阻抗放大器所得结果的区别。

测试题

以下是一套测试题，以此检测自己是否掌握了本章的重要概念。测试题的答案在附录 E 中，详解在在线学生资源的文档中。附录 F 说明了学生资源的详细信息。

T13.1　在表 T13.1(b)中选择合适的内容填入表 T13.1(a)的空白处(表 T13.1(b)的选项可以使用多次或者不用)。

表 T13.1

题目(a)	最佳答案
a. 一个 BJT 工作在放大区，则集电极 - 基极之间__________。	
b. 一个 BJT 工作在放大区，则发射极 - 基极之间__________。	
c. 一个 BJT 工作在放大区，____电流通常远小于其他两极的电流。	
d. 当 BJT 放大电路达到______或者______，输出波形发生限幅。	
e. 一个 BJT 放大电路，如果集电极特性曲线不等间距，会导致______。	
f. BJT 工作在______区时，其大信号模型包含两个电压源。	
g. BJT 工作在______区时，其大信号模型为 3 个极之间开路。	
h. 若一个 BJT 的参数 $\beta=50$，$I_C=1$ mA，$I_E=1.5$ mA，则 BJT 工作于______区。	
i. 一个射极跟随器的电压增益值为______。	
j. 一个共射极放大器的电压增益值为________。	
k. 在一个中频小信号等效电路中，耦合电容可视为_______。	
(b)选项	
1. 截止区	
2. 正偏	
3. 反偏	
4. 发射极(发射区)	
5. 基极(基区)	
6. 集电极(集电区)	
7. 饱和区	
8. 大增益	
9. 小增益	
10. 失真	
11. 有源(放大)区	
12. 值远大于 1，且为负	
13. 值远小于 1，且为负	
14. 反相	
15. 略小于 1	
16. 同相	
17. 值大于 1，且为正	
18. 开路	
19. 短路	

T13.2　如图 13.7 所示的简单放大器，$R_B=10\text{ k}\Omega$，$V_{BB}=0.8$ V，$v_{in}(t)=0.2\sin(2000\omega t)$ V，$R_C=2.5\text{ k}\Omega$，$V_{CC}=10$ V。特性曲线如图 13.5 所示。请采用负载线分析法求 $V_{CE\min}$、V_{CEQ} 和 $V_{CE\max}$。

T13.3　一个 *npn* 型 BJT 工作在放大区，$I_{CQ} = 1$ mA 和 $I_{EQ} = 1.04$ mA。设 $V_T = 26$ mV，求 α、β、r_π 的值，并画出 BJT 的小信号等效电路。

T13.4　如图 T13.4 所示，已知 $\beta = 50$，$v_{BE} = 0.7$ V，要求：(a) 计算 I_C 和 V_{CE}；(b) 令 $\beta = 250$，重复要求(a)。

T13.5　如图 T13.5 所示的放大电路，要求画出中频带小信号等效电路，并且对等效电路的各元件标注对应的符号。

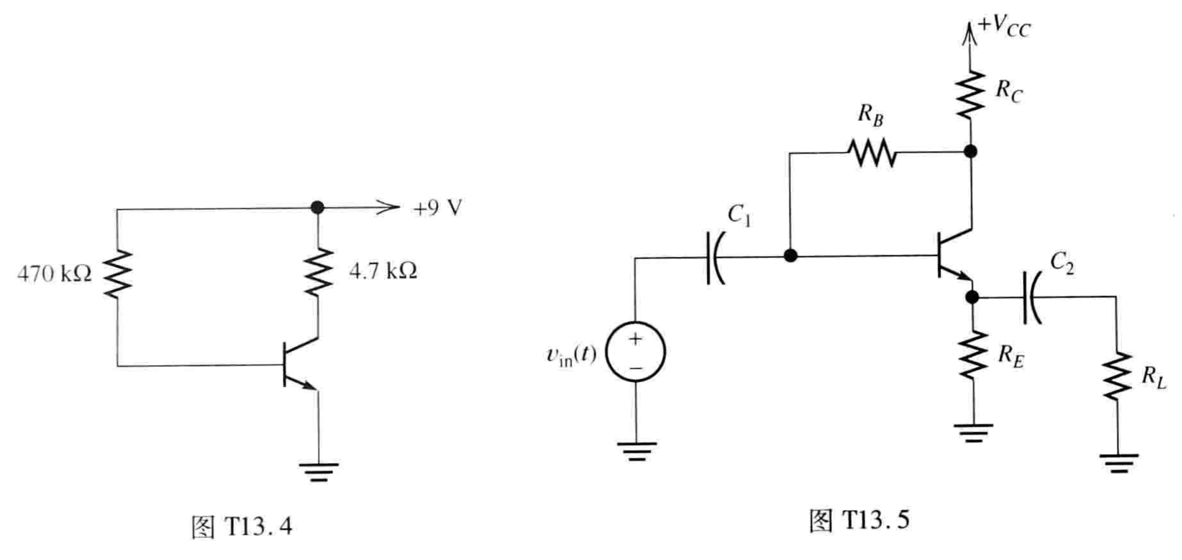


图 T13.4　　　　图 T13.5

T13.6　共射极放大器如图 13.27(a) 所示，$R_1 = 100$ kΩ，$R_2 = 47$ kΩ，$R_C = 2.2$ kΩ，$R_L = 5.6$ kΩ，$\beta = 120$，$V_T = 26$ mV，$I_{CQ} = 4$ mA。求电压增益 $A_v = v_O/V_{in}$ 和输入阻抗。

第 14 章　运算放大器

本章学习目标

- 掌握理想运算放大器的各种特性
- 判断运算放大器中的负反馈
- 利用节点约束条件来分析具有负反馈的理想运算放大器电路
- 选择适用于各种不同应用的运算放大器的电路结构
- 使用运算放大器来设计各种用途的电路
- 确定实际运算放大器的局限性和识别其在仪器仪表的应用中潜在的误差
- 理解精密仪用放大器的工作原理
- 积分器、微分器和有源滤波器的应用

本章介绍

第 11 章讨论了基本放大器的外部特性。通过第 12 章和第 13 章的学习，知道了怎样使用场效应晶体管或双极型晶体管来构成基本放大器。本章将介绍在工程仪表中广泛使用的一个重要器件——运算放大器。

运算放大器是由大约 30 个场效应管或双极型晶体管、10 个电阻和一些电容组成的电路。这些组成元件通过一定的工序被集成在一块硅晶体上（称为芯片），用这种方式制造出来的电路称为集成电路（IC）。

集成电路的制造并不比单个晶体管的制造复杂多少，所以运算放大器与第 12 章和第 13 章中介绍的分立场效应管和双极型晶体管电路相比更经济，是更好的选择。

目前，运算放大器（或者简称运放）是应用广泛的通用集成电路。不过，这种类型的放大器最初用于在模拟计算机电路中执行信号的积分或加法等运算，因此称为运算放大器。

我们将会看到，这些价格便宜的集成电路可以与电阻（有些情况下，再加上电容）组成很多有用的电路。而且，这些电路的特点是主要取决于电路结构和电阻值，而受运放本身一些参数值不稳定的影响很小。

14.1　理想运算放大器

运算放大器的电路符号如图 14.1 所示，是一个具有反相和同相输入端的差分放大器（在 11.11 节讨论了差分放大器）。输入信号用 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 表示（通常用小写字母来代表时变电压，同时，经常省略时间变量而仅用简单的 v_1、v_2 等表示输入电压）。

我们知道，输入信号的平均值叫作共模信号，由下式得到：

$$v_{icm} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

同样，输入电压之间的差叫作差模信号，由下式得到：

$$v_{id} = v_1 - v_2$$

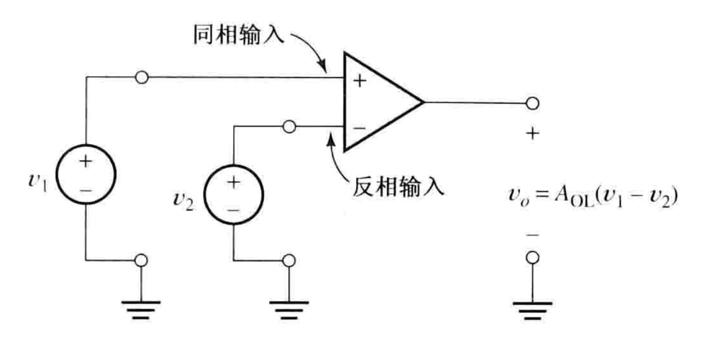


图 14.1　运算放大器的电路符号

理想运算放大器有以下特性：

- 输入阻抗为无限大
- 差模输入信号的增益为无限大
- 共模输入信号的增益为零
- 输出阻抗为零
- 无限宽的带宽

理想运算放大器的等效电路只包含受控源，如图 14.2 所示。开环增益 A_{OL} 非常大——理想情况下为无限大。

运算放大器中通常存在把一部分输出信号引回作为输入信号的反馈网络。因此，信号通过放大器输出，再由反馈网络引回作为输入信号形成了一个闭环过程。A_{OL} 是放大器没有反馈网络时的增益，因此称为开环增益。

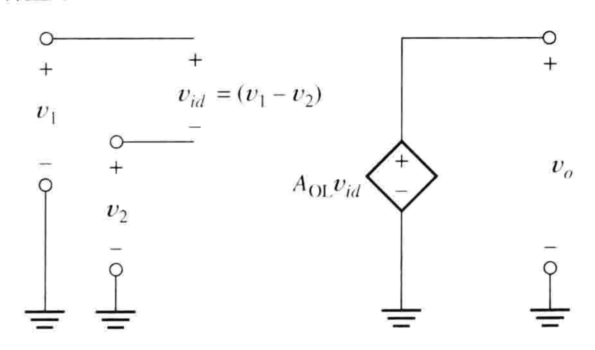


图 14.2　理想运算放大器的等效电路（开环增益 A_{OL} 极大，接近∞）

现在，假设放大器的开环增益 A_{OL} 恒定不变，因此理想运算放大器没有线性或者非线性的失真，其输出电压 v_o 和差模输入电压 $v_{id} = v_1 - v_2$ 的波形相同。（以后将会知道 A_{OL} 实际上是一个与频率有关的函数。另外，在实际运用中的放大器存在非线性失真的缺陷。）

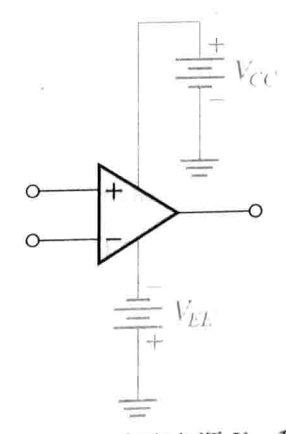


图 14.3　直流电源 V_{CC} 和 V_{EE} 的运放符号

14.1.1　电源连接

为了让实际运算放大器正常工作，就必须由一个或多个直流电压源给它提供直流电压，如图 14.3 所示。然而，常常省略电路图中的电源连接部分。（正如图中所示，标准的做法是用以重复的大写字母作为下标的大写字母来表示直流电源，如 V_{CC} 和 V_{EE} 。）

14.2 反相放大器

运算放大器几乎都采用了负反馈。负反馈就是把输出信号返回到系统的输入端和源信号一起作为输入信号，反馈回来的信号和源信号极性相反(也有可能是正反馈，正反馈就是把输出信号返回到系统的输入端和源信号一起作为输入信号，反馈回来的信号和源信号极性相同。然而负反馈在放大器电路中应用更广泛)。通常会假设运算放大器为理想运放，并使用节点约束概念的方法来分析放大器电路。

一个理想运算放大器的开环差模增益是接近无限大的，甚至一个非常小的输入电压都会得到非常大的输出电压。在一个负反馈电路中，输出信号的一小部分是连接回到反向输入端作为反相输入信号的，这就迫使差模电压趋向零。如果假设增益是无穷大的，那么差模电压为零，于是输入电流也为零，这种电压和电流均为0的情况统称为节点约束条件(也分别称为虚断和虚短)。

理想运算放大器电路的分析步骤如下：

1. 确定有无负反馈。
2. 假设运算放大器的差模电压和输入电流趋于零。(节点约束：虚短、虚断。)
3. 应用标准的电路分析原理(比如基尔霍夫定律和欧姆定律)去求解电路中的各参数。

接下来，以几个普遍应用于工程仪表中的重要电路为例，阐明如何使用这种分析方法。

14.2.1 基本反相器

反相放大器的运算放大电路如图14.4所示，通过假设它为理想运算放大器和运用节点约束来确定电压增益 $A_v = v_o/v_{in}$ 。但是，在分析该电路之前，应首先确认电路引入了负反馈而不是正反馈。

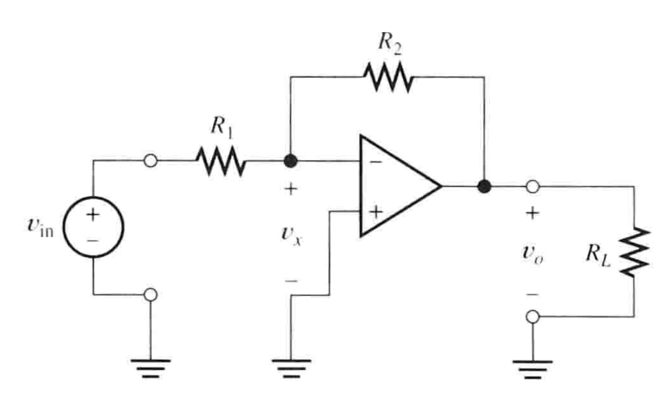


图14.4 反相放大器

接下来，将证明图14.4所示电路引入了负反馈。首先，假设某一时刻的输入电压 v_{in} 在反相输入端产生一个正极性的电压 v_x 。这时，在输出端出现一个非常大(理论上是无穷大的)的反相输出电压。而这个输出电压的一部分又通过电阻 R_2 的反馈路径返回到反相输入端。因此，反相输入中最初的正极性电压由于负反馈的作用逐渐趋于零。同理，反相输入端上的初始负极性电压也会因引入负反馈而趋于零(v_x 为负的情况也类似)。可见，欲从运算放大器的输出端得到精确的输出电压值，就必须有和原始输入电压信号相反的反馈电压，并且在输入端产生零输入电压(几乎为零)。因为假设了运算放大器的增益为无限大，所以只要有一个非常小(理论上为零)的输入电压 v_x 就可以得到需要的输出了。

图 14.5 所示就是一个反相放大器，图中包含了运算放大器输入的节点约束条件。值得注意的是，输入电压是加在电阻 R_1 上的，因此流过电阻 R_1 的电流为

$$i_1 = \frac{v_{in}}{R_1} \tag{14.1}$$

流入运算放大器输入端的电流为零(虚断)，所以流过电阻 R_2 的电流为

$$i_2 = i_1 \tag{14.2}$$

由式(14.1)和式(14.2)，可以得到：

$$i_2 = \frac{v_{in}}{R_1} \tag{14.3}$$

列写包含输出端、电阻 R_2 和运放输入端在内的回路电压方程，得：

$$v_o + R_2 i_2 = 0 \tag{14.4}$$

用式(14.3)代替式(14.4)中的 i_2，并且求解电路的电压增益，得到：

$$A_v = \frac{v_o}{v_{in}} = -\frac{R_2}{R_1} \tag{14.5}$$

因为 A_v 是带有反馈网络的电路增益，因此称为闭环增益。

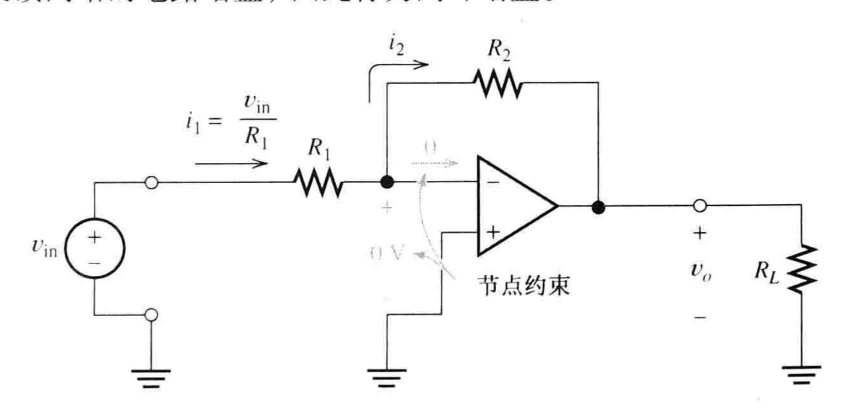


图 14.5 用节点约束条件分析反相放大器

假设运放为理想的情况下闭环电压增益仅仅由电阻的比值决定。这是一个非常理想的情况，因为电阻值相对准确和稳定。值得注意的是，电压增益是个负值，这说明放大器是反相放大的，即输出电压和输入电压是反相的。

反相放大器的输入阻抗为

$$Z_{in} = \frac{v_{in}}{i_1} = R_1 \tag{14.6}$$

通过选择 R_1 值可以很方便地调节电路的输入阻抗。

整理式(14.5)可得：

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1} v_{in} \tag{14.7}$$

可见，输出电压与负载电阻 R_L 无关。从而得到这样一个推论：输出电压可以作为理想电压源(就它与负载 R_L 的关系而言)，换句话说，反相放大器的输出阻抗为零。

以后将会看到反相放大器的特性其实是要受到运算放大器非理想性质的影响的。然而，在许多应用场合，放大器的实际性能和理想性能的偏差非常小。

14.2.2 “虚短”的概念

有时，图 14.5 中运算放大器输入端的状态称为虚短，因为运算放大器的差模输入电压趋向于零，就如同短接到地，其输入电流也会为零。由于运算放大器反相和同相输入端没有电流流过，因此也称为虚断。

14.2.3 反相电路的分析

目前已经构造了多种反相电路。分析这些电路时遵循的步骤和分析基本反相器的步骤相同：先确定是否存在负反馈，再根据节点约束条件，并应用基本的电路分析原理。

例 14.1 反相放大器的分析。

图 14.6 所示为一种采用小阻值电阻构成的高增益反相放大器，无须像常规反相放大器那样采用很高的电阻值。假设运算放大器为理想的，要求得到一个电压增益的表达式，并求出输入阻抗和输出阻抗值。给定条件为：$R_1 = R_3 = 1\ \text{k}\Omega$，$R_2 = R_4 = 10\ \text{k}\Omega$。参照图 14.5 所示的常规反相器，有 $R_1 = 1\ \text{k}\Omega$，如果要使图 14.6 所示电路达到与图 14.5 所示电路相同的增益，问需要 R_2 为多大？

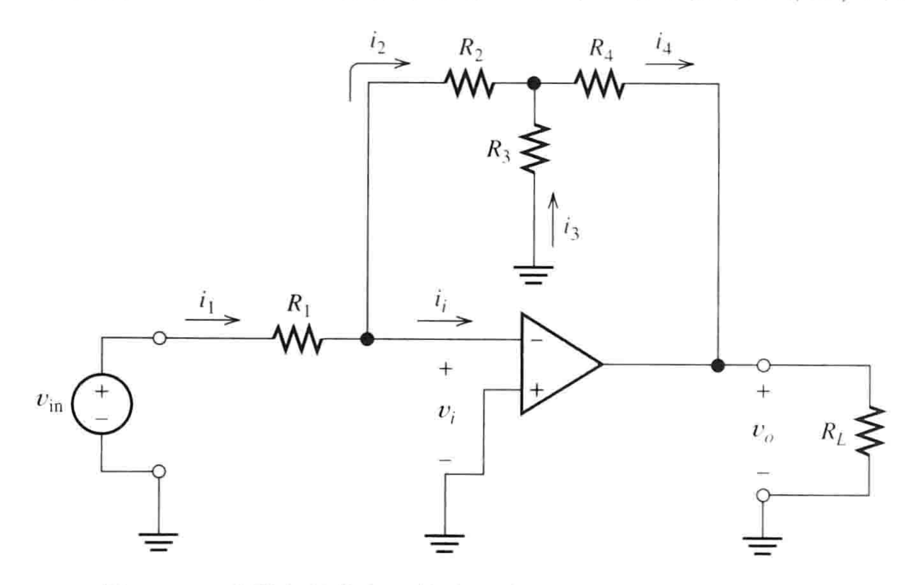


图 14.6 采用小阻值电阻构成的高增益放大器(见例 14.1)

解： 首先，确定电路中存在负反馈。假设输入信号 v_i 为正值，可以得到一个非常大的反相输出电压。其中的一部分通过电阻网络返回输入端并且和原始的输入信号极性相反。因此，可以证明负反馈的存在。

接下来，采用节点约束的条件：

$$v_i = 0 \quad 和 \quad i_i = 0$$

运用基尔霍夫电流定律和电压定律以及欧姆定律分析电路。注意到，v_{in} 是加在 R_1 上的电压(利用 $v_i = 0$ 的虚短条件)，可以写出：

$$i_1 = \frac{v_{in}}{R_1} \tag{14.8}$$

然后，在 R_1 右边的节点上应用基尔霍夫电流定律，并利用已知约束条件 $i_i = 0$，得到：

$$i_2 = i_1 \tag{14.9}$$

对 v_i、R_2 和 R_3 构成的回路写出一个电压等式，同时利用了虚短条件 $v_i = 0$，有：

$$R_2 i_2 = R_3 i_3 \tag{14.10}$$

在 R_3 上方的节点上应用基尔霍夫电流定律，有：

$$i_4 = i_2 + i_3 \tag{14.11}$$

对 v_O、R_4 和 R_3 所在的回路写出电压等式：

$$v_O = -R_4 i_4 - R_3 i_3 \tag{14.12}$$

接下来，用替代法消去电流变量(i_1，i_2，i_3 和 i_4)得到一个输出电压和输入电压的关系式。首先，从式(14.8)和式(14.9)中可以得到：

$$i_2 = \frac{v_{\text{in}}}{R_1} \tag{14.13}$$

然后，用式(14.13)代替式(14.10)中的 i_2，整理后可得：

$$i_3 = v_{\text{in}}\frac{R_2}{R_1 R_3} \tag{14.14}$$

用式(14.13)和式(14.14)消去式(14.11)中的 i_2 和 i_3 ，可以得到下面的关系式：

$$i_4 = v_{\text{in}}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_1 R_3}\right) \tag{14.15}$$

最后，用式(14.14)和式(14.15)消去式(14.12)中的 i_3 和 i_4 ，得：

$$v_O = -v_{\text{in}}\left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_4}{R_1} + \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3}\right) \tag{14.16}$$

因此，电路的电压增益为

$$A_v = \frac{v_O}{v_{\text{in}}} = -\left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_4}{R_1} + \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3}\right) \tag{14.17}$$

由式(14.8)计算输入电阻为

$$R_{\text{in}} = \frac{v_{\text{in}}}{i_1} = R_1 \tag{14.18}$$

观察式(14.16)可以知道，输出电压是与负载电阻无关的。因此，对负载来说，电路的输出就像是一个理想电压源。换句话说，放大器的输出电阻为零。按已知电阻值 ($R_1 = R_3 = 1\ \text{k}\Omega$，$R_2 = R_4 = 10\ \text{k}\Omega$) 计算电压增益的值，可得：

$$A_v = -120$$

在图 14.5 所示的基本反相放大电路中，电压增益值由式(14.5)给出，即：

$$A_v = -\frac{R_2}{R_1}$$

因此，如果 $R_1 = 1\ \text{k}\Omega$，要得到 −120 的电压增益，要求 R_2 为 120 kΩ。值得注意的是，为了达到相同的增益，基本反相放大器需要的电阻比率为 120:1，而对于图 14.6 所示的反相电路只需要 10:1。有时，在电路中保持电阻比率尽可能接近 1 会有显著的优点。因此，图 14.6 所示的电路要比图 14.5 所示电路更好。

上述例子讲解了怎样利用节点约束来分析带有负反馈的理想运算放大电路，接下来通过一些习题来练习这种方法的运用。如下电路均存在负反馈，并假设均为理想运算放大器，以便于在分析中使用节点约束条件。

练习 14.1 图 14.7 中的电路是一个加法器。(a)假设电路中的运放是理想运放，在给定输入电压和电阻值的条件下求解输出电压。(b)对电源 v_A 来说，输入电阻是多少？(c)对电源 v_B 来说，输入电阻又是多少？(d)对于负载 R_L 的输出电阻是多少？

答案: (a) $v_o = -(R_f/R_A)v_A - (R_f/R_B)v_B$; (b) v_A 的输入电阻等于 R_A; (c) v_B 的输入电阻等于 R_B; (d)输出阻抗为零。

练习 14.2 求解图 14.8 所示电路中标示的电流和电压。

答案: (a) $i_1 = 1$ mA, $i_2 = 1$ mA, $i_0 = -10$ mA, $i_x = -11$ mA, $v_0 = -10$ V; (b) $i_1 = 5$ mA, $i_2 = 5$ mA, $i_3 = 5$ mA, $i_4 = 10$ mA, $v_o = -15$ V。

练习 14.3 求解图 14.9 所示电路的输出电压表达式。

答案: $v_o = 4v_1 - 2v_2$。

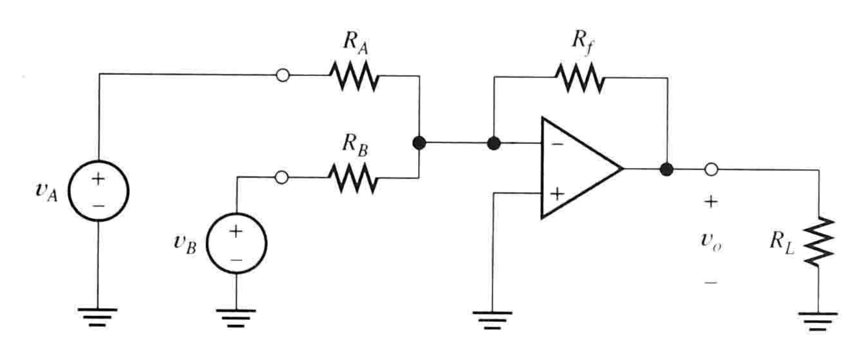
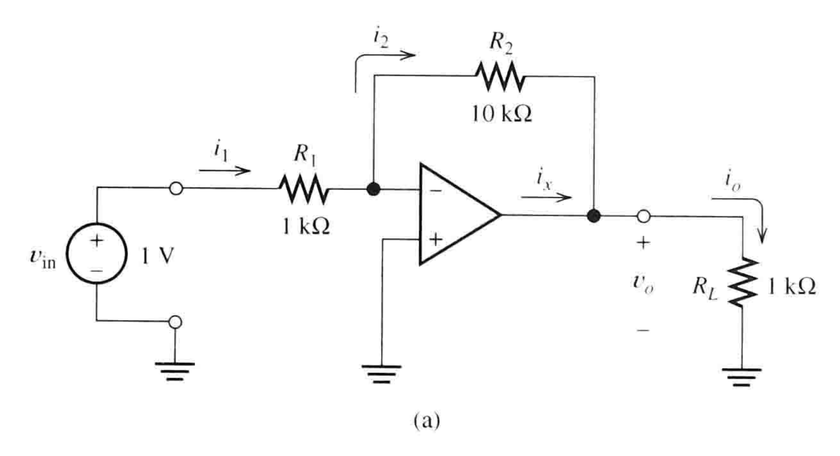
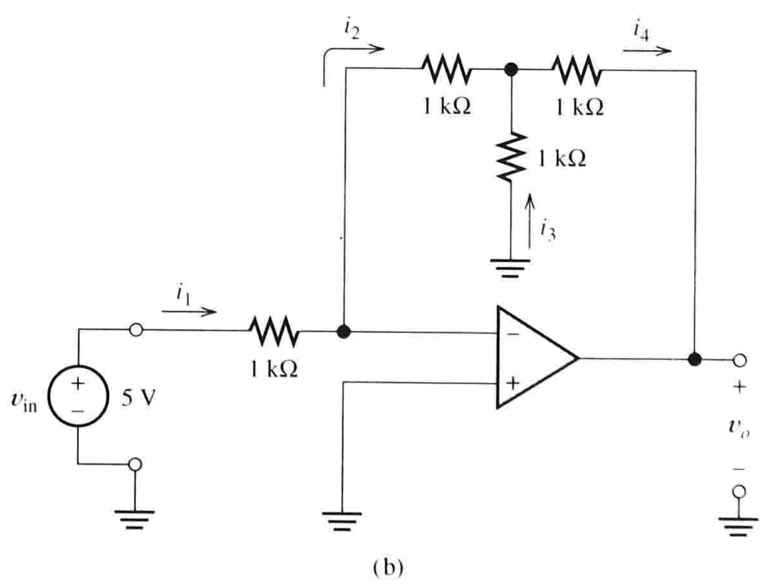


图 14.7 加法器, 见练习 14.1



(a)



(b)

图 14.8 练习 14.2 的电路

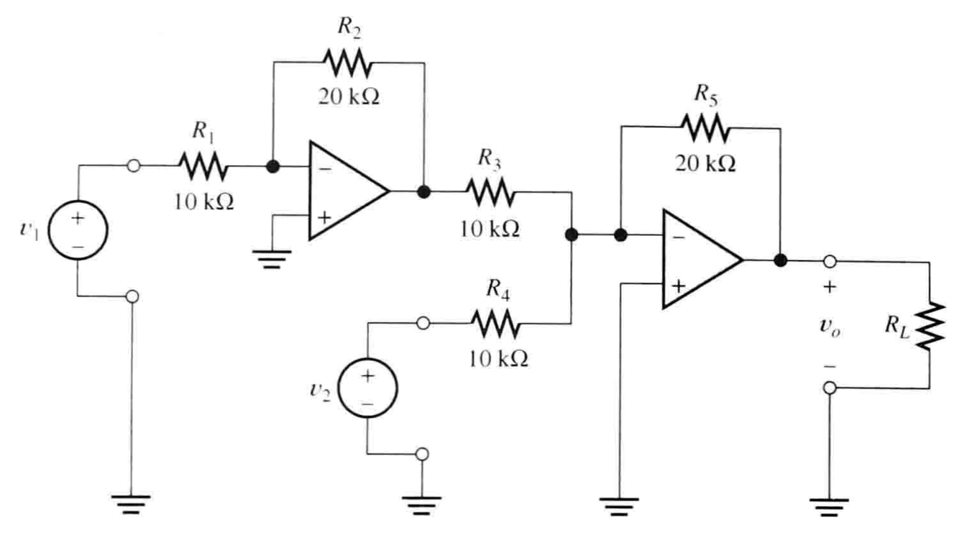


图 14.9 练习 14.3 的电路

14.2.4 正反馈

如果在反相放大电路中将运算放大器的两个输入端互换，如图 14.10 所示，这将会很有趣。这种情况是正反馈，也就是说，反馈信号将增强原输入信号的作用。这样，如果输入一个正的电压信号，就会得到一个非常大的正输出电压。输出电压的一部分通过反馈网络回到了运放的输入端，因此输入电压越来越大，输出电压也就跟着越来越大，输出电压很快达到运放所能输出的最大电压值，从而达到饱和。

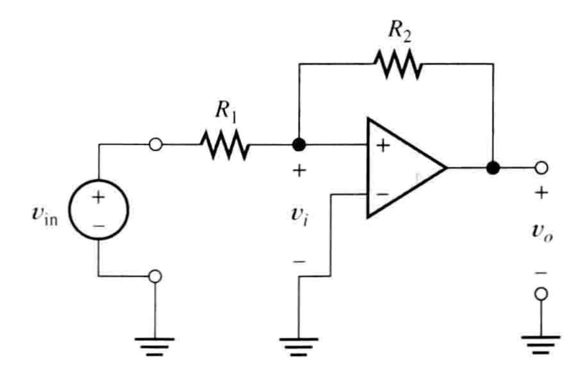


图 14.10 正反馈电路

如果开始存在一个负的输入电压，那么输出电压就会达到负的最大值。因此，电路就不能起到放大作用了——输出电压保持在负最大值或正最大值，与输入电压 v_{in} 无关。然而，如果输入电压 v_{in} 达到足够大，而且极性改变，则输出电压将会从一个最大值转向另一个最大值。在第 7 章中，正反馈电路(例如触发器)用于数字系统中的存储器。

如果忽略图 14.10 所示的电路是正反馈而不是负反馈这个事实，并且错误地运用节点约束条件，将会得到表达式 $v_o = -(R_2/R_1)v_{in}$，和分析负反馈电路一样。这说明在使用节点约束之前验证负反馈存在是非常重要的。

14.3 同相放大器

同相放大器的电路结构如图 14.11 所示，假设运算放大器是理想的。首先，确定反馈是正的还是负的。假设 v_i 是正极性信号，产生了一个非常大的正的输出电压。输出电压的一部分通过 R_1 又出现在输入端。因为 $v_i = v_{in} - v_1$，随着 v_o 和 v_1 的增加 v_i 逐渐趋于零。所以，放大器和反馈网络表现为使 v_i 逐渐趋于零。可见，因为反馈信号和原输入信号相反，所以这是负反馈。

接下来，就可以利用节点约束条件：$v_i = 0$ 和 $i_i = 0$，并运用基尔霍夫电压定律和条件 $v_i = 0$，

得到:

$$v_{in} = v_1 \qquad (14.19)$$

既然 $i_i = 0$, R_1 上的电压可以通过电阻分压公式得出:

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o \qquad (14.20)$$

把式(14.20)代入式(14.19)并整理，得到闭环电压增益:

$$A_v = \frac{v_o}{v_{in}} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \qquad (14.21)$$

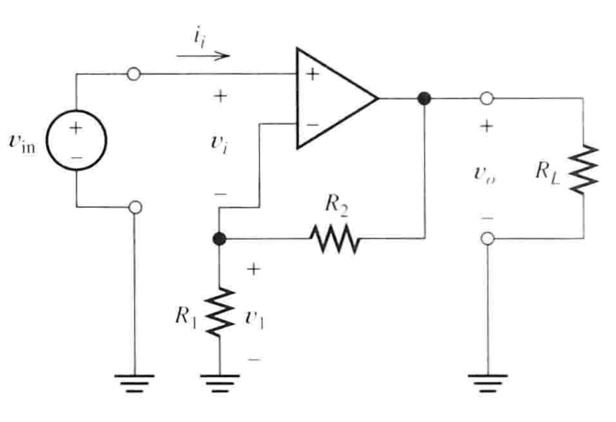


图 14.11 同相放大电路

注意: 电路是同相放大器(即 A_v 是正的)，并且增益大小由反馈电阻的比值来决定。

理论上讲，运放电路的输入阻抗是无穷大的，因为输入电流 i_i 为0。既然电压增益不受负载电阻的影响，那么输出电压也与负载电阻无关，从而输出阻抗也为0。因此，理想运算放大器构成的反相放大器是一个理想的电压放大器(理想放大器已经在11.6节中讨论过了)。

14.3.1 电压跟随器

由式(14.21)可知: 当 $R_2 = 0$ 时，增益为1。但是，通常选择断开 R_1 (即 $R_1 = \infty$)来实现增益为1，这样的电路称为电压跟随器，如图14.12所示。

练习 14.4 分别求解图14.13所示电路的电压增益和输入阻抗。(a)开关打开时; (b)开关闭合时。

答案: (a) $A_v = +1$, $R_{in} = \infty$; (b) $A_v = -1$, $R_{in} = R/2$。

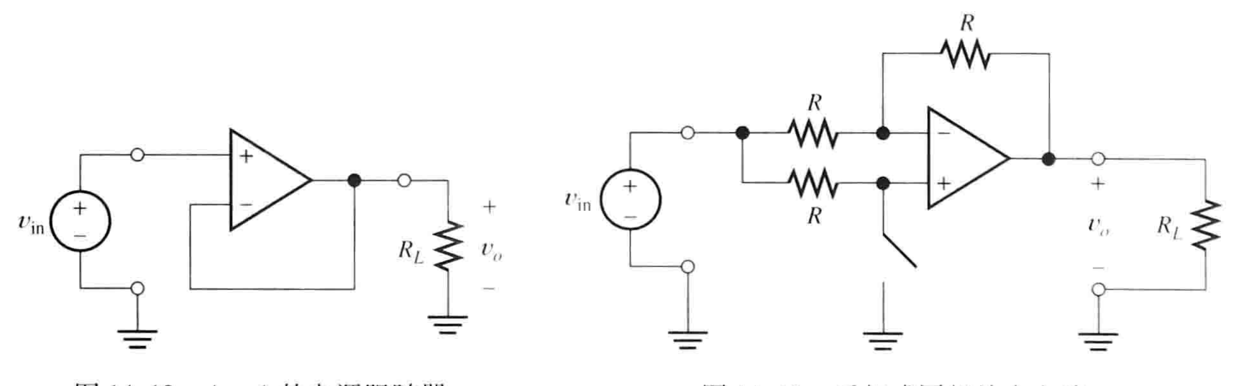


图 14.12 $A_v = 1$ 的电源跟随器

图 14.13 反相或同相放大电路

练习 14.5 假设图14.14所示电路中的运放是理想的，要求使用节点约束条件求解输出电流 i_o 的表达式，并计算电路的输入、输出电阻。

答案: $i_o = v_{in}/R_F$, $R_{in} = \infty$, $R_o = \infty$ (因为输出电流与负载阻抗无关)。

练习 14.6 (a)求解图14.15所示电路的电压增益 v_o/v_{in} 的表达式。(b)计算 $R_1 = 10\ \text{k}\Omega$ 和 $R_2 = 100\ \text{k}\Omega$ 时的电压增益。(c)求电路的输入电阻。(d)求输出电阻。

答案: (a) $A_v = 1 + 3(R_2/R_1) + (R_2/R_1)^2$; (b) $A_v = 131$; (c) $R_{in} = \infty$; (d) $R_0 = 0$。

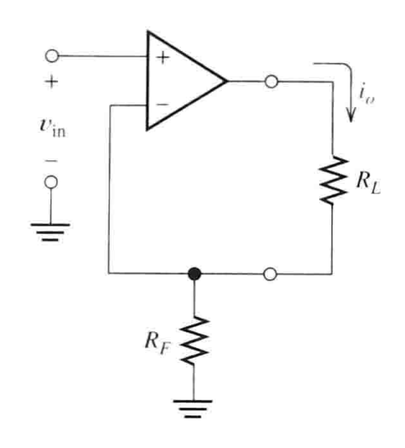


图 14.14　电压-电流转换器(也称为跨导放大器),练习14.5的图

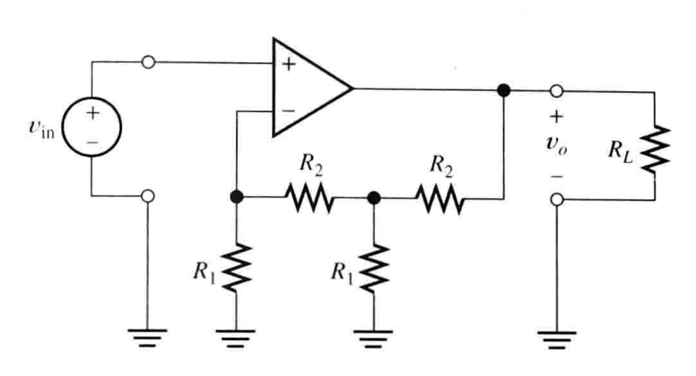


图 14.15　练习 14.6 的图

实际应用 14.1　负反馈在机械(力学)中的应用——动力方向盘

除了在放大器电路中的使用，负反馈还有很多其他方面的工程应用，例如在汽车助力方向盘系统中的应用。图 PA14.1 所示是一个典型系统的简化图。一个由发动机(引擎)驱动的液压泵连续不断地给控制阀门提供压力，使得液体流到助推气缸的两边。为了直行，提供的压力等于气缸两边的压力，没有转向力的作用。当司机转动方向盘时，通过给某一边的气缸提供比另一边大的压力，从而辅助司机实现方向盘的转动。图 PA14.1 所示说明了一个方向的液体流动路径。当车轮转动时，一个来自转向系统的机械反馈臂使得阀门回到原来的位置。因此，有一条负反馈路径从助推气缸通过机械连接回到控制阀门。

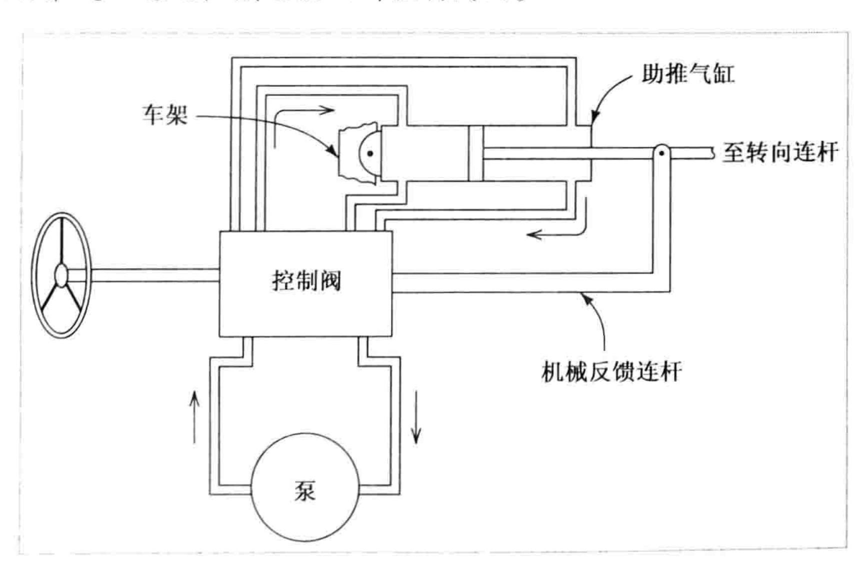


图 PA14.1　汽车助力方向盘系统的简图，说明负反馈的重要性

负反馈在动力方向盘系统中起到一个很重要的作用。试想一下如果没有助推气缸的输出和控制阀门之间的机械联系将会发生什么。如果方向盘被转动稍稍偏离了中心，压力就会持续地供应给助推气缸，那么车轮会一直偏转直到最终到达极限位置。这样，司机完成一个慢转弯都会非常困难。

反过来说，在适当的地方加了反馈连接后，车轮能够转动到使阀门返回原来的中心位置。当方向盘转动时，轮子按比例转动。

值得注意的是，控制阀门反映的是方向盘的输入和转向系统位置的差别，这和运算放大器对其差模输入信号的反应相似。液体泵就像一个运算放大器电路中的电源，助推气缸的位置就像运放电路中的输出信号，而回到控制阀门的机械连接就像一个反馈电路。

14.4 简单放大器的设计

可以通过使用电阻反馈网络和放大器来设计许多有用的放大器。现在，我们考虑放大器是理想的。然后再考虑理想运算放大器的非理想属性。在实践中，电路设计的性能需求往往不那么极端，设计在假设理想运放的条件下进行。

我们通过之前几节(包括练习)已经讨论过的运算放大器电路来举例说明如何设计，对于这些电路，设计主要包括选择一个合适的电路结构和反馈电阻值。

例 14.2 同相放大器的设计。

使用一个理想的运算放大器设计一个增益为 10 的同相电压增益放大器。输入信号的范围为 $-1 \sim +1$ V。设计中电阻容许有 5% 的误差。(参见附录 B 的标准的 5% 容许误差电阻值。)

解： 我们使用图 14.11 所示的同相放大器配置。增益由式(14.21)给出。因此，我们有

$$A_v = 10 = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

从理论上讲，在 $R_2 = 9R_1$ 的前提下，任何电阻器值都能提供适当的增益。然而，阻抗非常小且并不实际，这是因为通过电阻的电流必须由运算放大器的输出提供，且本质上来源于电源。例如，如果 $R_1 = 1\ \Omega$ 和 $R_2 = 9\ \Omega$，输出电压 10 V，运算放大器必须提供 1 A 的电流，如图 14.16 所示。大多数集成运放不能够提供如此大的输出电流，即使能够，电源的负荷也将是没有保证的。在以下电路中，我们将保持 $R_1 + R_2$ 足够大，以使提供给它们的电流是合理的。在交流线路供能的电路设计中，电流升到毫安级通常是可以接受的。(在电池供能的设备中，我们会更加努力地减少电流和避免经常更换电池。)

另一方面，非常大的电阻(如 $R_1 = 10\ \text{M}\Omega$ 和 $R_2 = 90\ \text{M}\Omega$)也存在一些问题。如此大的电阻的值是不稳定的，尤其是在潮湿环境中。稍后，我们将看到大电阻由于运放缺陷的偏置电流导致的问题。此外，高阻抗电路容易通过杂散电容耦合从附近的电路吸收不必要的信号，如图 14.17 所示。

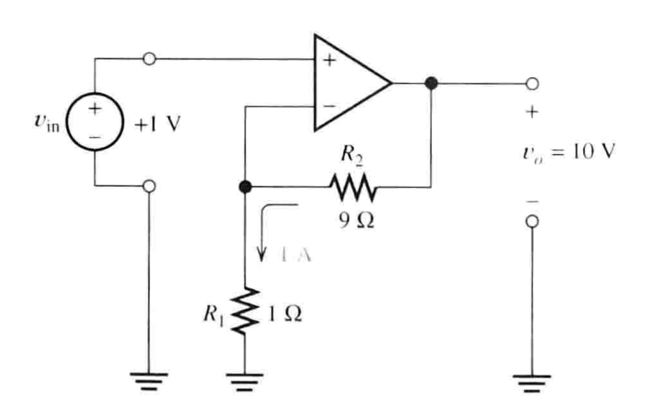


图 14.16 如果使用小电阻需要一个过大的电流

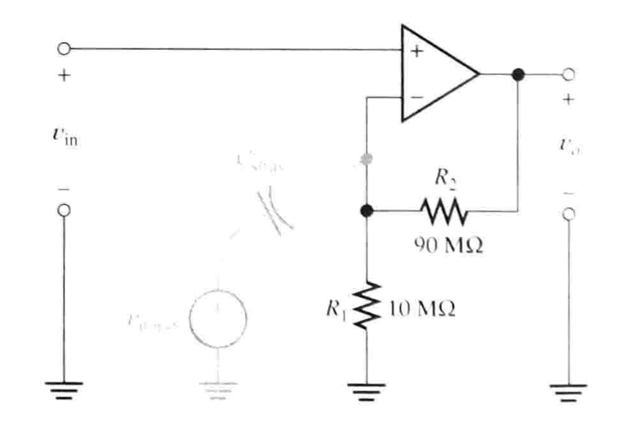


图 14.17 如果使用大电阻、杂散电容耦合不希望的信号进入电路

一般来说，电阻值大约在 100 Ω ~ 1 MΩ 最适合在运放电路中使用。因为这个问题对阻抗的误差要求为 5% (参见附录 B)，我们寻找两个电阻，其中 $R_2/R_1 = 9$。一种可能性是 $R_2 = 180$ kΩ

和 $R_1=20\ \text{k}\Omega$。然而，对于许多应用，我们将发现 $R_2=18\ \text{k}\Omega$ 和 $R_1=2\ \text{k}\Omega$ 会工作得很好。当然，如果考虑到5%的电阻误差率，我们可以允许 R_2/R_1 有约 ±10% 的变化。这是因为 R_2 可以降低5%而 R_1 升高5%，反之亦然。因此，放大器的增益变化范围约为(这里 $A_v=1+R_2/R_1$) ±9%。

如果需要更精确，电阻误差率应选择为1%。另一个选择是用一个可调电阻来使增益达到所需的值。

例 14.3　放大器设计。

测量锻锤振动仪表的传感器有一个总是小于 500 Ω 内阻，而且它随着时间变化。这就需要一个用于放大内部电压源 v_s 的放大器。这个电压增益为 10 ±5%。对这个应用设计一个放大器。

解：由于指定的是一个负增益，我们选择使用反相放大器，如图 14.4 所示。拟采用的放大器和信号源如图 14.18 所示。

利用加法节点约束和传统电路分析，我们可以得到：

$$v_O=-\frac{R_2}{R_1+R_s}v_s$$

因此，我们选择的电阻值应该满足：

$$\frac{R_2}{R_1+R_s}=10\pm5\%$$

因为 R_s 的值是可变的，所以必须选择 R_1 的值要远大于 R_s 的最大值。因此，我们选择 $R_1\approx100$，$R_{smax}=50\ \text{k}\Omega$。(因此，当 R_s 范围从 0 ~500 Ω 变化时，R_1+R_s 之和变化范围只有 1%。)为了实现所需的增益，我们取 R_2 为 500 kΩ。

因为一个增益误差范围指定为 ±5%，我们要使用变化率为 1% 的电阻。这非常必要，因为增益变化包括 R_s，R_1 和 R_2 的变化。如果每种引起 ±1% 的增加，增益变化约 ±3%，是在允许的范围之内的。

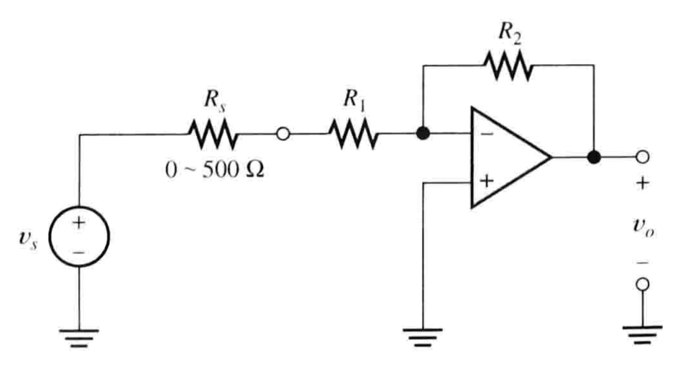


图 14.18　例 14.3 电路

参见电阻标准值变化 1% 的表(参见附录 B)，我们选择 $R_1=49.9\ \text{k}\Omega$ 和 $R_2=499\ \text{k}\Omega$。为了确保增益不超过限制，这些值不会小到产生大电流，或者太大以至于将干扰信号带进电路。

另一个解决方案是使用精度为 5% 的电阻，但选择 $R_1=51\ \text{k}\Omega$，而 R_2 为一个 430 kΩ 的固定电阻和一个 200 kΩ 可调电阻的串联电阻。那么增益可以最初设置为所需的值。但会有一些增益波动，这是因为 R_s 的变化和由于老化、温度变化等原因造成的其他电阻值发生的漂移。

练习 14.7　找出例 14.3 中电路增益 $A_{vs}=v_o/v_s$ 的最大值和最小值。$R_1=49.9\ \text{k}\Omega$，$R_2=499\ \text{k}\Omega$。假设电阻 R_1 和 R_2 有 ±1% 的误差，R_s 的范围为 0 ~500 Ω。

答案：增益极值是 −9.71 和 −10.20。

14.4.1 高精度设计

当设计增益误差很小的放大器时(1%或更好的)，有必要采用可调电阻。我们也许可以采用成本更低的5%电阻误差率的电阻而不用1%的，并用可调电阻来补偿更大的变化。然而，这在实际应用中并不好，因为误差率5%的电阻比误差率1%的电阻更不稳定。此外，固定电阻器往往比可调电阻更稳定。从长期的角度来看最好的方法是使用1%电阻精度的固定电阻和设计足够的调整范围来克服其产生的增益变化。

通常，我们会结合不同类型的运放电路来设计需要的函数关系。这些要点在接下来的示例中会加以说明。

例 14.4 加法放大器的设计。

两个信号源的内部电压分别为 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$。其内阻小于1 kΩ，但具体的值不知道并且可能随时间改变。设计一个放大器，其输出电压是 $v_o(t)=A_1v_1(t)+A_2v_2(t)$。增益为 $A_1=5\pm1\%$ 和 $A_2=-2\pm1\%$。假设为理想运放。

解： 图14.7所示的加法电路可以用输入电压加权和的方式表达为

$$v_O=-\frac{R_f}{R_A}v_A-\frac{R_f}{R_B}v_B$$

式中，两个输入信号的增益为负。然而，问题是要求 v_1 增益为正和 v_2 增益为负。因此，我们首先让 v_1 通过一个反相放大器。然后，将这个反相放大器的输出和 v_2 再输入到加法电路。电路如图14.19所示。

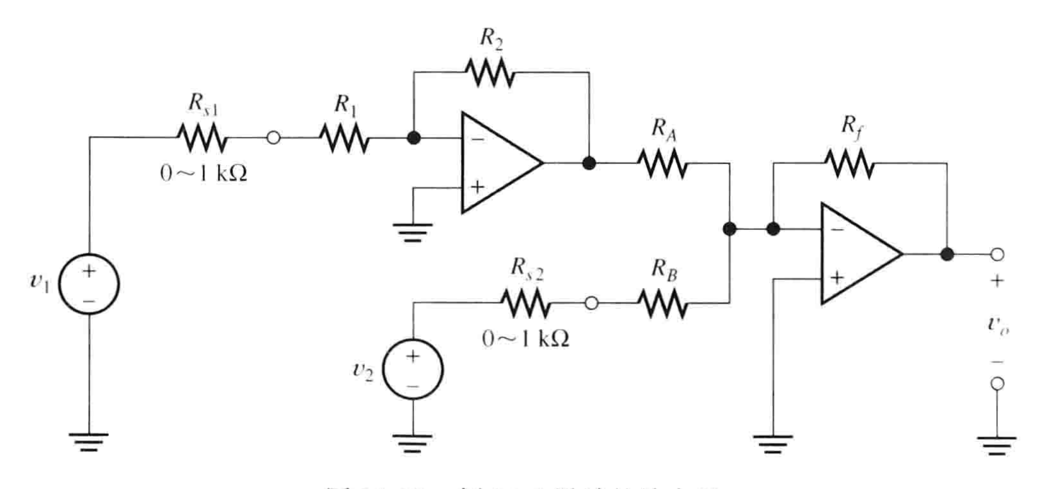


图14.19 例14.4设计的放大器

结果表明，该电路的输出电压为

$$v_O=\frac{R_2}{R_{s1}+R_1}\frac{R_f}{R_A}v_1-\frac{R_f}{R_{s2}+R_B}v_2 \tag{14.22}$$

我们必须选择合适的电阻值以保证 v_1 输入增益为+5和 v_2 输入增益为-2。许多电阻的组合都可以满足这个要求。然而，我们应该保持从电源看到的输入阻抗远远大于电源内阻，以避免由于负载造成的增益变化。这意味着我们应该选择很大的 R_1 和 R_B。(然而，需要记住，非常大的值是不实际的。)因为我们想要使增益值保持在±1%，因此选择 $R_1=R_B=500\ \text{k}\Omega$。然后，随着电源内阻的变化，增益的变化只有约0.2%(因为输入阻抗大约是电源内阻最大值的500倍)。

即使我们选择使用1%变化范围的电阻，也必须使用可调电阻削减增益。例如，使用1%变化范围的电阻，增益为

$$A_1 = \frac{R_2}{R_{s1} + R_1} \frac{R_f}{R_A}$$

由于电阻的误差，其增益的变化范围约为 ±4%。因此为了调整 A_1，我们使用一个固定电阻串联在一个可变电阻 R_1 上。类似地，为了调整 A_2，我们使用一个固定电阻串联在一个可变电阻 R_B 上。

假设选择 R_1 为 453 kΩ(这是一个 1% 变化范围的电阻)的固定电阻器串联一个 100 kΩ 的微调器(即一个最大值为 100 kΩ 的可调电阻)，我们对 R_B 使用相同的组合。(回想一下，我们计划的 R_1 和 R_B 值为 500 kΩ。)微调器允许大约 ±10% 的调整，这比各种不同的固定电阻器更为准确。

v_2 的输入增益为

$$A_2 = -\frac{R_f}{R_{s2} + R_B}$$

由于 $R_{s2} + R_B$ 的额定值为 500 kΩ，而且需要 $A_2 = -2$。R_f 选择精度 1% 的 1 MΩ 电阻。现在，由于我们想得到

$$A_1 = \frac{R_2}{R_{s1} + R_1} \frac{R_f}{R_A} = 5$$

由于已经选择的电阻值使 $R_5/(R_{s1} + R_1) = 2$，则我们必须选择 R_2 和 R_A 的值使 $R_2/R_A = 2.5$。因此，我们选择了 $R_2 = 1$ MΩ，$R_A = 402$ kΩ。至此我们完成了设计，各种选择如下：

R_1 为 405 kΩ 固定电阻和 100 kΩ 可调电阻的串联

R_B 取值与 R_1 相同

$R_2 = 1$ MΩ

$R_A = 402$ kΩ

$R_f = 1$ MΩ

练习 14.8 推导式(14.22)。

练习 14.9 某个电压源有一个 600 Ω ±20% 的内部阻抗。设计一个放大器，其输出电压是 $v_o = A_{vs} v_s$，其中 v_s 是内部电压源。假设采用理想运放和 $A_{vs} = 20 \pm 5\%$。

答案：可以有很多种解决方案。一个好的解决方案是如图 14.11 所示的电路，其中 $R_2 \approx 19 \times R_1$。例如，我们可以采用 1% 变化范围的电阻，其标称值 $R_1 = 1$ kΩ 和 $R_2 = 19.1$ kΩ。

练习 14.10 重复练习 14.9，其中 $A_{vs} = -25 \pm 3\%$。

答案：可以有很多种解决方案。一个好的解决方案是图 14.18 所示的电路，$R_1 \geqslant 20R_S$，$R_S \approx 25(R_1 + R_s)$。例如，我们可以采用 1% 变化范围的电阻，其标称值 $R_1 = 20$ kΩ 和 $R_2 = 515$ kΩ。

练习 14.11 如果 $A_1 = +1 \pm 1\%$ 和 $A_2 = -3 \pm 1\%$，重复例 14.4。

答案：可以通过例 14.4 中采取的方法得到许多答案。

14.5 运算放大器线性工作的缺陷

在 14.1 节 ~14.4 节中介绍了运算放大器，学习了怎样使用节点约束来分析带有负反馈的放大器电路，以及放大器的设计方法。到目前为止一直假设运放是理想的，这个假设适合于学习放大电路的基本原理，而不适合分析使用实际放大器的高性能电路。因此，在这一节以及接下来的几节里，我们将分析实际放大器中存在的一些缺陷，并讨论在设计中怎样去处理这些缺陷。

实际放大器的非理想性质可以分为3类：(1)线性范围内的非理想特性；(2)非线性特性；(3)直流失调。这一节讨论线性范围内的非理想特性，在接下来的几节里将讨论非线性特性和直流失调。

14.5.1 输入和输出阻抗

理想运算放大器有一个无穷大的输入阻抗和一个零输出阻抗。然而，实际的放大器只有有限大的输入阻抗和不为0的输出阻抗。由双极型晶体管作为输入级的集成放大器的输入阻抗一般为1 MΩ，而以场效应管作为输入级的集成放大器的输入阻抗则要高很多，一般为10^{12} Ω。低功耗放大器的输出阻抗可以高达数千欧姆，但是大多集成放大器的输出阻抗为1～100 Ω。

在带有负反馈的电路中，阻抗在很大程度上取决于反馈作用，而在闭环控制电路中放大器的输入和输出阻抗几乎不影响其性能。

14.5.2 增益和带宽的限制

理想的放大器有无限大的增益和无限宽的带宽。实际放大器只能有有限大的开环增益，通常在10^4～10^6之间(这里指没有反馈电阻的开路电压增益)。而且，实际放大器的带宽是受到限制的，不可能无限宽。实际放大器的增益是一个与频率有关的函数，频率越高增益就越小。

通常，集成放大器的带宽是被放大器设计者有意限制了的，这称为频率补偿，为的是在反馈放大器中避免振荡的发生。对频率补偿的进一步讨论超出了本书的范围，在此不予介绍。然而，大多数集成放大器开环增益的表达式为：

$$A_{\mathrm{OL}}(f)=\frac{A_{0\mathrm{OL}}}{1+\mathrm{j}(f/f_{B\mathrm{OL}})} \tag{14.23}$$

其中，A_{0OL}是放大器的直流开环增益，f_{BOL}是开环转折频率。

在开环增益的伯德图上，直到频率等于f_{BOL}时，增益$A_{OL}(f)$都是一个近似的恒定值。频率超过f_{BOL}时，频率每增加十倍频增益就减少20 dB，如图14.20所示(伯德图已经在6.4节中介绍过)

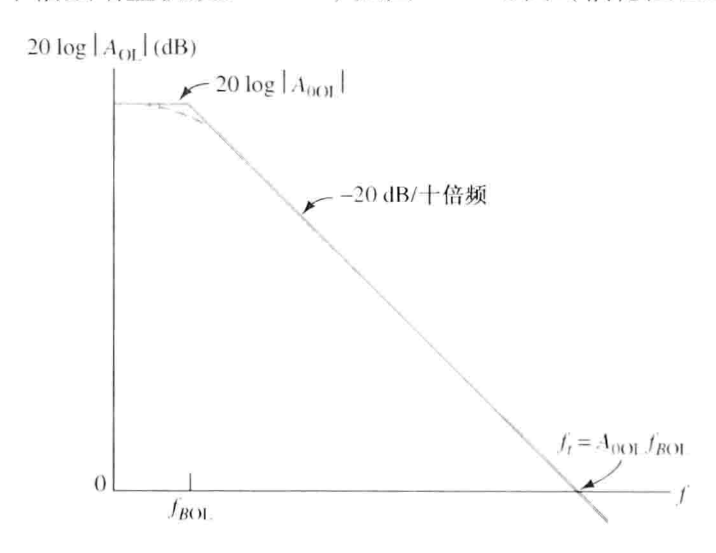


图14.20 典型运放开环增益的伯德图

14.5.3 闭环带宽

这里将要说明负反馈会减小放大器的直流增益，并扩展其带宽。分析图14.21所示的同相放大电路。输出电压向量$\mathbf{V}_o$是开环增益与差模输入电压相量$\mathbf{V}_{id}$的乘积：

$$\mathbf{V}_o = A_{\mathrm{OL}}(f)\mathbf{V}_{id} \tag{14.24}$$

假设放大器的输入阻抗为无穷大，那么输入电流就为 0。于是，R_1 上的电压就可以在反馈网络（R_1 和 R_2 串联）中运用电压分配原则求出。R_1 上的电压为 $\beta\mathbf{V}_o$，β 是 R_1 和 R_2 的分压系数：

$$\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{14.25}$$

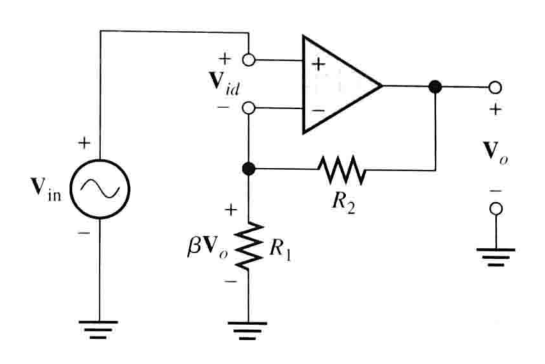


图 14.21　用于分析闭环带宽的同相放大电路

对图 14.21 应用基尔霍夫电压定律，得到：

$$\mathbf{V}_{\mathrm{in}} = \mathbf{V}_{id} + \beta\mathbf{V}_o$$

求出 $\mathbf{V}_{id}$ 并代入式(14.24)，得到：

$$\mathbf{V}_o = A_{\mathrm{OL}}(\mathbf{V}_{\mathrm{in}} - \beta\mathbf{V}_o) \tag{14.26}$$

求解带有反馈电阻的放大电路的闭环增益：

$$A_{\mathrm{CL}} = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_{\mathrm{in}}} = \frac{A_{\mathrm{OL}}}{1 + \beta A_{\mathrm{OL}}} \tag{14.27}$$

将式(14.23)代入式(14.27)，得：

$$A_{\mathrm{CL}}(f) = \frac{A_{0\mathrm{OL}}/[1 + \mathrm{j}(f/f_{B\mathrm{OL}})]}{1 + \{\beta A_{0\mathrm{OL}}/[1 + \mathrm{j}(f/f_{B\mathrm{OL}})]\}} \tag{14.28}$$

变换一下形式，得：

$$A_{\mathrm{CL}}(f) = \frac{A_{0\mathrm{OL}}/(1 + \beta A_{0\mathrm{OL}})}{1 + \{\mathrm{j}f/[f_{B\mathrm{OL}}(1 + \beta A_{0\mathrm{OL}})]\}} \tag{14.29}$$

现在，定义闭环直流增益为

$$A_{0\mathrm{CL}} = \frac{A_{0\mathrm{OL}}}{1 + \beta A_{0\mathrm{OL}}} \tag{14.30}$$

闭环带宽为

$$f_{B\mathrm{CL}} = f_{B\mathrm{OL}}(1 + \beta A_{0\mathrm{OL}}) \tag{14.31}$$

在式(14.29)中使用这些定义，得到：

$$A_{\mathrm{CL}}(f) = \frac{A_{0\mathrm{CL}}}{1 + \mathrm{j}(f/f_{B\mathrm{CL}})} \tag{14.32}$$

与式(14.23)进行比较，发现闭环增益和开环增益的表达式形式是完全一样的。开环直流增益 $A_{0\mathrm{OL}}$ 非常大，通常为 $(1 + \beta A_{0\mathrm{OL}}) \gg 1$。因此，从式(14.30)中可见闭环增益要比开环增益小得多。并且式(14.31)说明闭环带宽要比开环带宽宽很多。总而言之，负反馈会减小增益并扩大带宽。

14.5.4　增益带宽积

现在分析闭环增益和闭环带宽的乘积。由式(14.30)和式(14.31)可知：

$$A_{0\mathrm{CL}}f_{B\mathrm{CL}} = \frac{A_{0\mathrm{OL}}}{1 + \beta A_{0\mathrm{OL}}} \times f_{B\mathrm{OL}}(1 + \beta A_{0\mathrm{OL}}) = A_{0\mathrm{OL}}f_{B\mathrm{OL}} \tag{14.33}$$

因此，直流增益和带宽的积与反馈率 β 无关。把增益带宽的乘积记为 f_t，有：

$$f_t = A_{0\mathrm{CL}}f_{B\mathrm{CL}} = A_{0\mathrm{OL}}f_{B\mathrm{OL}} \tag{14.34}$$

如图 14.20 所示，f_t 是开环增益的伯德图中穿越 0 dB 时的交点频率。0 dB 对应的是转折单位增益，因此，f_t 也叫作单位增益带宽。通用集成放大器的增益带宽积一般为几兆赫兹。

例 14.5 开环和闭环伯德图。

某运算放大器的直流开环增益 $A_{0OL}=10^5$，带宽 $f_{BOL}=40\text{Hz}$。如果用这些放大器和反馈电阻构成一个闭环直流增益为 10 的同相放大器，求解该放大器的闭环带宽，并绘制开环增益伯德图和闭环增益伯德图。

解： 增益带宽积为

$$f_t = A_{0OL}f_{BOL} = 10^5 \times 40\ \text{Hz} = 4\ \text{MHz} = A_{0CL}f_{BCL}$$

因此，如果反馈作用使得增益减小到 $A_{0CL}=10$，则带宽为 $f_{BCL}=400\ \text{kHz}$。

换算成分贝，直流开环增益为

$$A_{0OL} = 20\log(10^5) = 100\ \text{dB}$$

转折频率为 $f_{BOL}=40\ \text{Hz}$。根据 6.4 节中学过的伯德图可知，在转折频率以下的增益函数是常数(一条平行于横轴的直线)，大于转折频率以后是一条以斜率为 20 dB 下降的直线。伯德图如图 14.22 所示。

将 $A_{0CL}=10$ 用分贝形式表示，有：

$$A_{0CL} = 10\log(10) = 20\ \text{dB}$$

转折频率是 $f_{BCL}=400\ \text{kHz}$。最终的伯德图如图 14.22 所示。值得注意的是，闭环增益曲线在与开环增益曲线相交前是一条不变的平行直线，相交后与开环增益曲线重合。

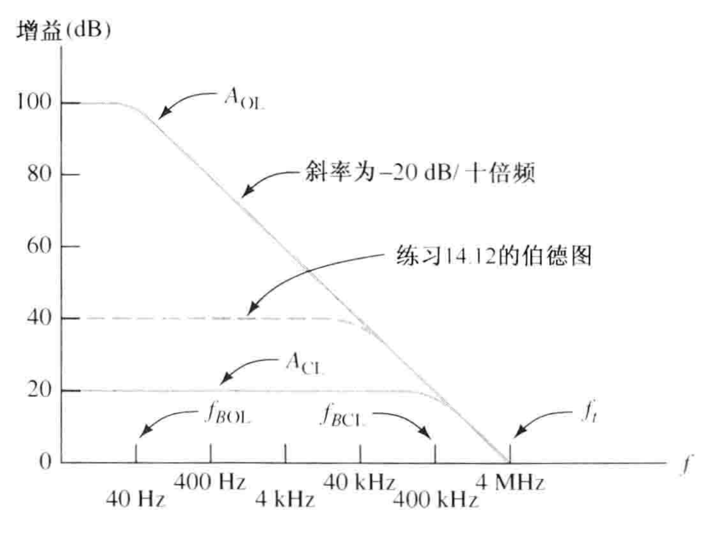


图 14.22 例 14.5 和练习 14.12 的伯德图

练习 14.12 在 $A_{0CL}=100$ 时重做例 14.5。

答案： $f_{BCL}=40\ \text{kHz}$。伯德图如图 14.22 所示。

14.6 非线性限制

14.6.1 输出电压的峰值限制

实际放大器的输出有几个非线性限制。首先，输出电压的范围是有限的。如果输入信号足够大，输出电压将趋向于超出这个限制，那么就会出现削波现象。

允许的输出电压范围取决于所使用放大器的类型、负载电阻值和电源电压值。例如，电源

电压为 +15 V 和 −15 V 的 μA741 放大器（μA741 是一种常用放大器）能够产生 −14 ~ +14 V 范围的输出电压。如果电源电压值减小一些，则线性输出电压范围也要随着减小。（这是典型的针对负载电阻大于 10 kΩ 的放大器。μA741 放大器可以保证的线性输出范围只有 −12 ~ +12 V。负载电阻值越小，这种非线性限制就越大。）

正弦输入的同相放大器如图 14.23 所示，假设为理想运算放大器，电压增益为式（14.21），如下所示。

$$A_v = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

$R_1 = 1\ \text{k}\Omega$，$R_2 = 3\ \text{k}\Omega$，则 $A_v = 4$。输入正弦电压峰值 $V_{im} = 1$ V 时，其 $R_L = 10\ \text{k}\Omega$ 上的输出电压为正弦波，无非线性行为，如图 14.24 所示。当输入电压峰值为 5 V 时，其输出达到了峰值限值，出现了削波现象，如图 14.25 所示。

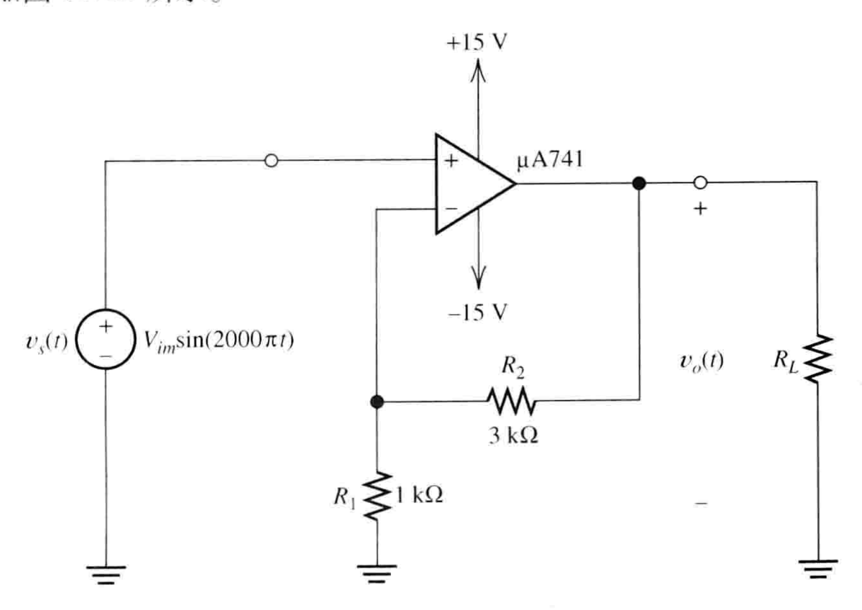


图 14.23　证明运算放大器各种非线性行为的同相放大器

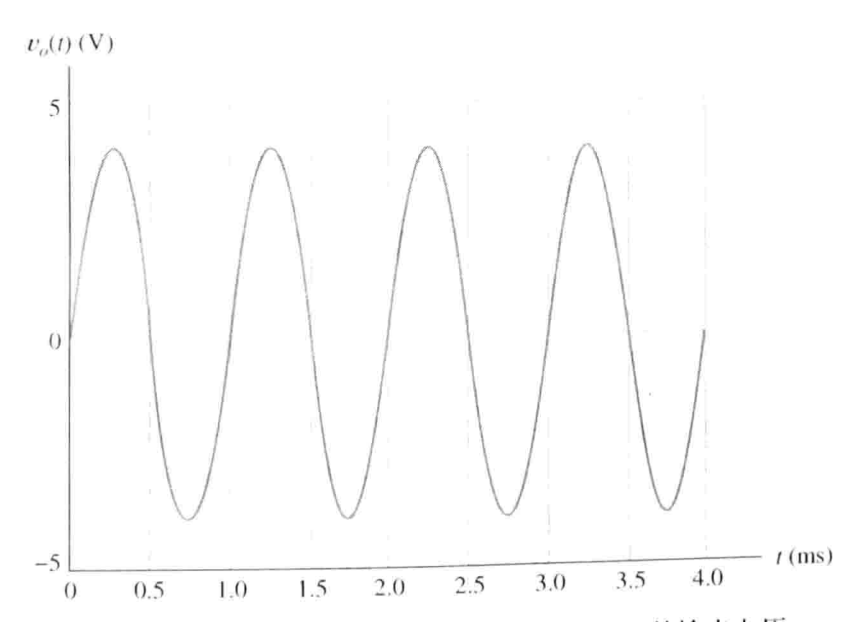


图 14.24　当 $R_L = 10\ \text{k}\Omega$，$V_{im} = 1$ V 时，图 14.23 的输出电压，没有任何非线性限制超出界限，则 $v_o(t) = 4v_s(t)$

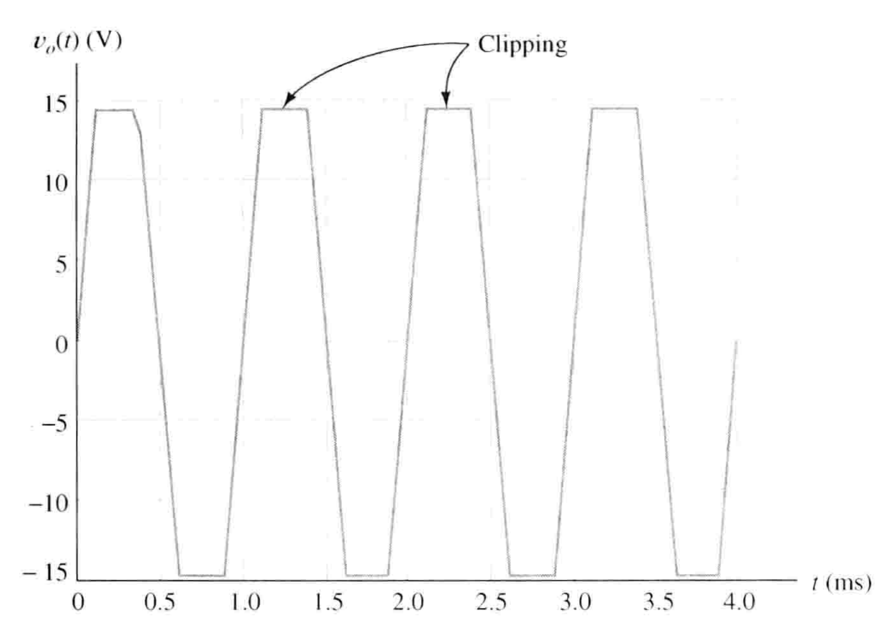


图 14.25　当 $R_L = 10\ \text{k}\Omega$，$V_{im} = 5\ \text{V}$ 时，图 14.23 的输出电压，超过最大输出电压，削波发生

14.6.2　输出电流限制

实际放大器输出的第二个限制是放大器提供给负载的最大电流限制。对于 μA741 放大器来说，最大限制电流为 ±40 mA。如果负载电阻值变小使得输出电流超出这个限制，则输出波形也会出现削波。

例如，假设图 14.23 所示电路的输入电压峰值 $v_{im} = 1\ \text{V}$，负载电阻调到 50 Ω。对于一个理想放大器可以算出输出电压峰值为 $V_{om} = 4\ \text{V}$，输出电流峰值为 $V_{om}/R_L = 80\ \text{mA}$。然而，μA741 放大器的输出电流最大限制为 40 mA，因此也会发生削波现象。电路的输出电压波形如图 14.26 所示，可见输出电压的峰值为 $40\ \text{mA} \times R_L = 2\text{V}$。

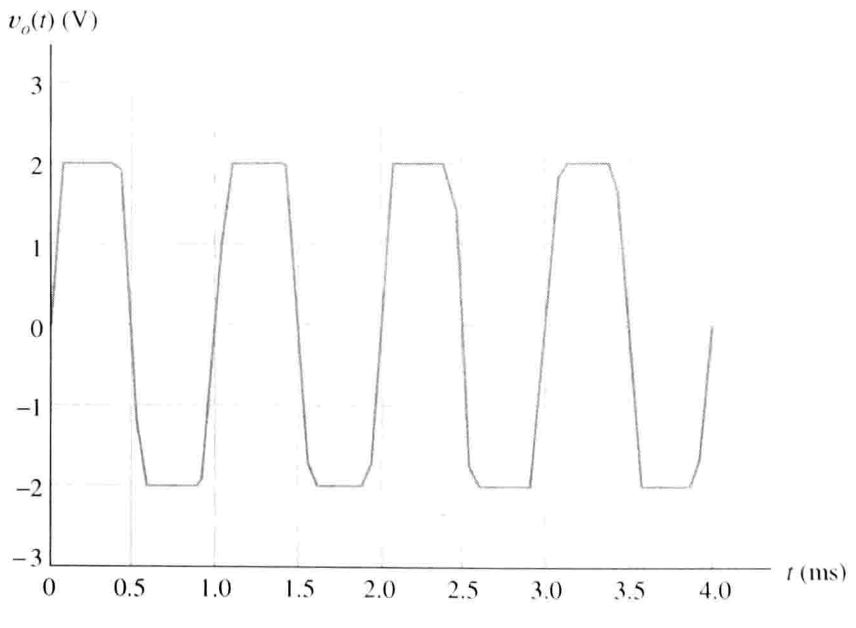


图 14.26　当 $v_{im} = 1\ \text{V}$，$R_L = 50\ \Omega$ 时，图 14.23 所示电路的输出电压波形，因为达到最大输出电流限制而发生削波

14.6.3 转换速率的限制

另一个非线性限制是实际放大器输出电压改变速率的限制，叫作转换速率限制。输出电压增大(或减小)的速率不能超过该限制值。转换速率限制用公式表示为

$$\left|\frac{\mathrm{d}v_O}{\mathrm{d}t}\right| \leqslant \mathrm{SR} \tag{14.35}$$

对于不同类型的集成放大器，转换速率限制值的范围从 SR = 10^5 V/s 到 SR = 10^8 V/s 不等。对于电源电压为 ±15 V，R_L >2 kΩ 的 μA741 型放大器，转换速率的典型限制值为 5×10^5 V/s(通常表示为0.5 V/μs)。

例如，图 14.23 所示电路，输入电压变为峰值2.5 V，50 kHz 的正弦波，如下式：

$$v_S(t) = 2.5\sin(10^5\pi t)$$

t =0 时刻(t =0 时，输入电压为 0)开始的输出电压如图 14.27 所示，同时标注了 4 倍的输入电压。t =0 时，输出电压为 0，理想输出超过了转换速率的限制,所以 μA741 的真实输出电压将会以最大速率上升，大约0.5 V/μs。在 A 点，真实输出终于达到了理想输出，但是理想输出的下降也超过了转换速率。于是 μA741 的真实输出电压将会以最大速率下降。正是由于转换速率的限制，实际运算放大器的输出为三角波，而非正弦波。

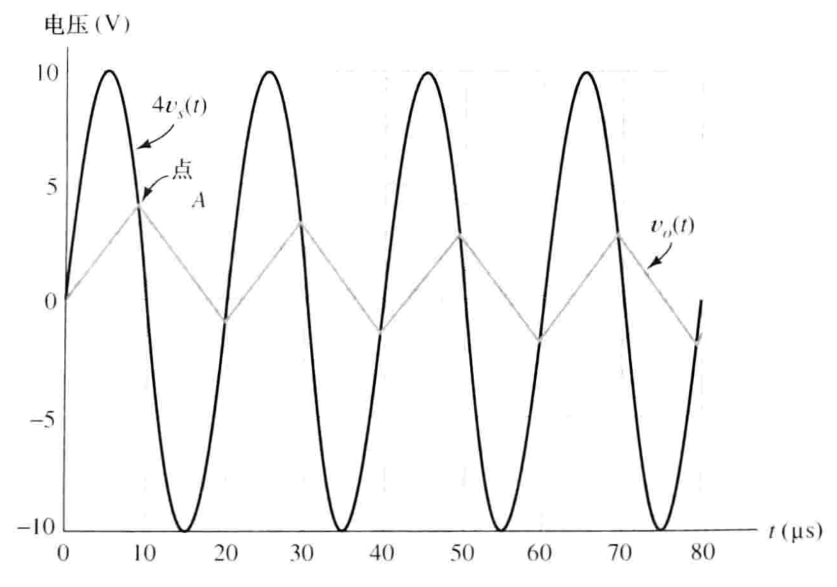


图 14.27 当 $v_s(s)$ =2.5sin($10^5\pi t$) V，R_L =10 Ω 时，图 14.23 的输出电压，超过了转换速率的限制，波形为三角波

14.6.4 全功率带宽

放大器的全功率带宽是指一个频率范围。在这个频率范围内，放大器能够产生振幅等于最大输出电压的不失真正弦波输出。

接下来，推导一个用转换速率和峰值表示的全功率带宽的表达式。输出电压的表达式为

$$v_O(t) = V_{om}\sin(\omega t)$$

将上式对时间求导，得：

$$\frac{\mathrm{d}v_O(t)}{\mathrm{d}t} = \omega V_{om}\cos(\omega t)$$

最大转换速率为 $\omega V_{om} = 2\pi f V_{om}$。令其等于放大器的转换速率限制值，有:

$$2\pi f V_{om} = \text{SR}$$

求得频率为

$$f_{\text{FP}} = \frac{\text{SR}}{2\pi V_{om}} \tag{14.36}$$

式中，把全功率增益带宽记为 f_{FP}。只有当频率小于 f_{FP} 时，放大器才可能输出不失真的全振幅正弦波。

例 14.6 全功率带宽。

已知转换速率 SR =0.5 V/μs，保证最大输出峰值 V_{om} =12 V。求 μA741 放大器的全功率带宽。

解: 将给定的已知数据代入式(14.36)，得:

$$f_{\text{FP}} = \frac{\text{SR}}{2\pi V_{om}} \approx 6.63\ \text{kHz}$$

因此，当频率小于 6.63 kHz 时，μA741 放大器可以输出峰值为 12V 的不失真正弦波。

练习 14.13 图 14.28 中，理想运算放大器的输出电压范围为 −4 ~4 V，最大输出电流为 10 mA，转换速率限制 SR =5 V/μs，并且输入正弦信号。(a) 求全功率带宽。(b) 频率为 1 kHz，R_L = 1 kΩ，求波形不发生失真的最大输出电压。(c) 频率为 1 kHz，R_L = 100 Ω，求波形不发生失真的最大输出电压。(d) 频率为 1 MHz，R_L = 1 kΩ，求波形不发生失真的最大输出电压。(e) R_L = 1 kΩ，$v_s(t) = 5\sin(2\pi 10^6 t)$，画出稳态的输出电压波形。

答案: (a) f_{FP} = 199 kHz; (b) 4 V; (c) 1 V; (d) 0.796 V; (e) 输出峰值为 1.25 V 的三角波

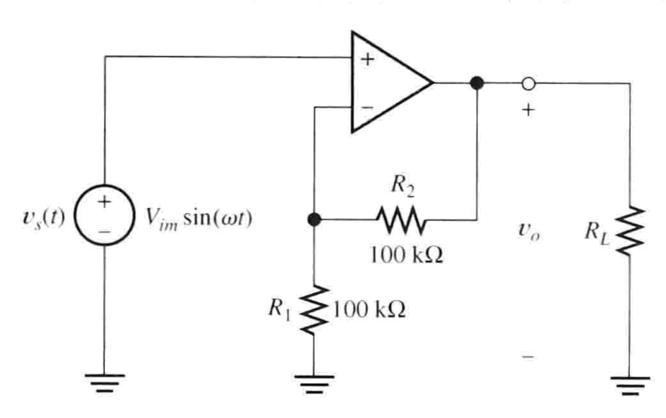


图 14.28 练习 14.13 的电路图

14.7 直流缺陷

通常放大器为直接耦合输入电路，因此，流入放大器输入端的直流偏置电流必然流经连到输入端的元件，如信号源或者反馈电阻。

将流入同相输入端的直流电流记为 I_{B+}，而流入反相输入端的直流电流记为 I_{B-}。设直流电流的平均值为偏置电流，记为 I_B，有:

$$I_B = \frac{I_{B+} + I_{B-}}{2} \tag{14.37}$$

理论上，运算放大器的输入电流是对称的，流入同相和反相输入端的偏置电流是相等的。

然而，由于实际上各器件不是完全匹配的，所以偏置电流并不相等。流入同相和反相输入端的偏置电流之差叫作失调电流，记为：

$$I_{\text{off}} = I_{B+} - I_{B-} \tag{14.38}$$

放大器的另一个直流缺陷是当输入电压为 0 时，输出电压可能不为 0，等效为放大器中有一个很小的直流偏置电压（失调电压）与其中一个输入端串联。这三种直流缺陷（偏置电流、失调电流和失调电压）可以用在放大器输入端放置直流电源的方法来模拟，如图 14.29 所示。图中，I_B 表示偏置电流，$I_{\text{off}}/2$ 表示失调电流，而 V_{off} 表示失调电压。（这三种电源已经在 11.12 节中讨论过，讨论结果表明这三种电源可应用于运算放大器电路中，也可以用在一般放大器中。）

两个偏置电流大小相等，参考方向也相同（如图 14.29 所示，均流出输入端）。在某些运算放大器中，偏置电流可能是负的，即流向输入端。通常，对于一个给定的运放，其偏置电流的方向是可以确定的。例如，如果一个运算放大器的输入端是 *npn* 型双极型晶体管的基极，那么偏置电流就是正的（假设参考方向如图 14.29 所示）。换句话说，如果是 *pnp* 型双极型晶体管的基极，那么偏置电流就是负的。

由于两个偏置电流源在大小和方向上是匹配的，所以在设计电路时就可以认为它们的影响是相互抵消的。另一方面，失调电压的极性和失调电流的方向是不确定的。例如，如果一个给定运放的失调电压值最大为 2 mV，那么 V_{off} 的变化范围就是 −2 ~ 2 mV。通常，大多数运放的失调电压值都接近 0，只有少数运放的失调电压值接近最大规定值。集成运放最大失调电压的典型值是几毫伏。

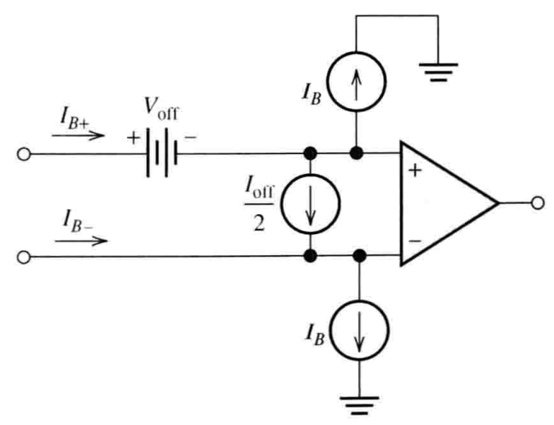


图 14.29　表现运放直流缺陷的三个电流源和一个电压源模型

以双极型晶体管为输入元件的运放，其偏置电流通常为 100 nA。以场效应管为输入元件的运放，其偏置电流要低很多，例如以结型场效应为输入的元件，其失调电流的典型值为 100 pA（在 25℃温度下）。一般来说，失调电流值的范围是 20% ~50% 的偏置电流值。

偏置电流、失调电流和失调电压对反相或者同相放大器的影响是在输出信号上叠加了一个直流电压（通常不希望出现这样的情况）。通过加上如图 14.29 所示的电源来分析这些影响，而运放的其余条件均视为理想。

例 14.7　考虑极端情况下的直流输出。

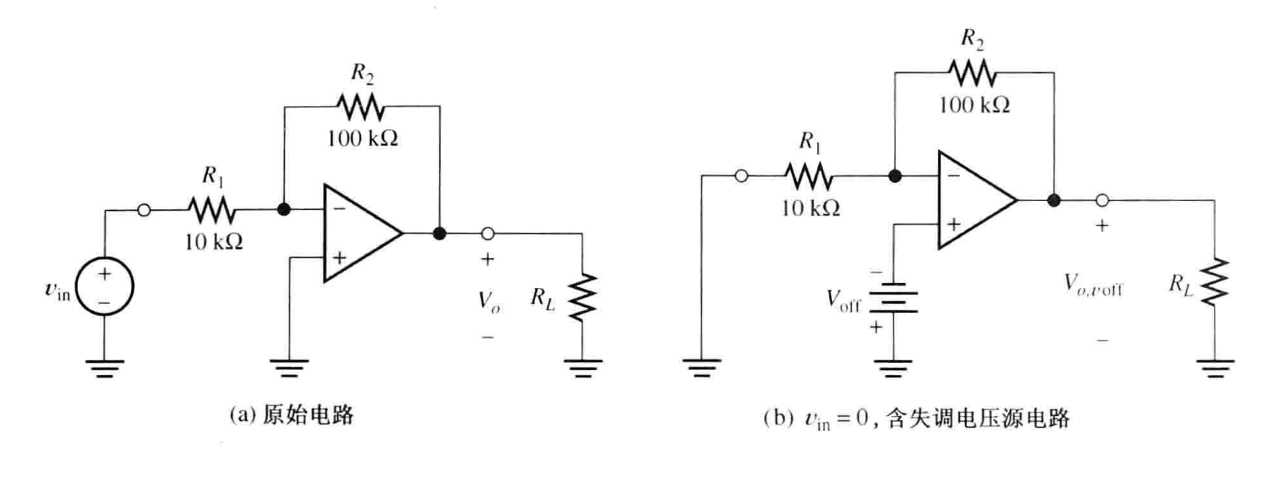
假定输入电压为 0，求反相放大器的极端直流输出电压，如图 14.30（a）所示。其最大偏置电流为100 nA，最大失调电流为 40 nA，最大失调电压为 2 mV。

解：在不同直流电源作用下分别计算其输出电压，然后利用叠加原理，求得极端直流输出电压。

1. 考虑失调电压，包含失调电压源的电路如图 14.30（b）所示。失调电压源能与任意输入端串联，我们选择与同相输入端串联。则电路变为同相放大器（尽管画法不同，但图 14.30（b）与图 14.11 等效）。所以输出电压为增益乘以偏置电压：

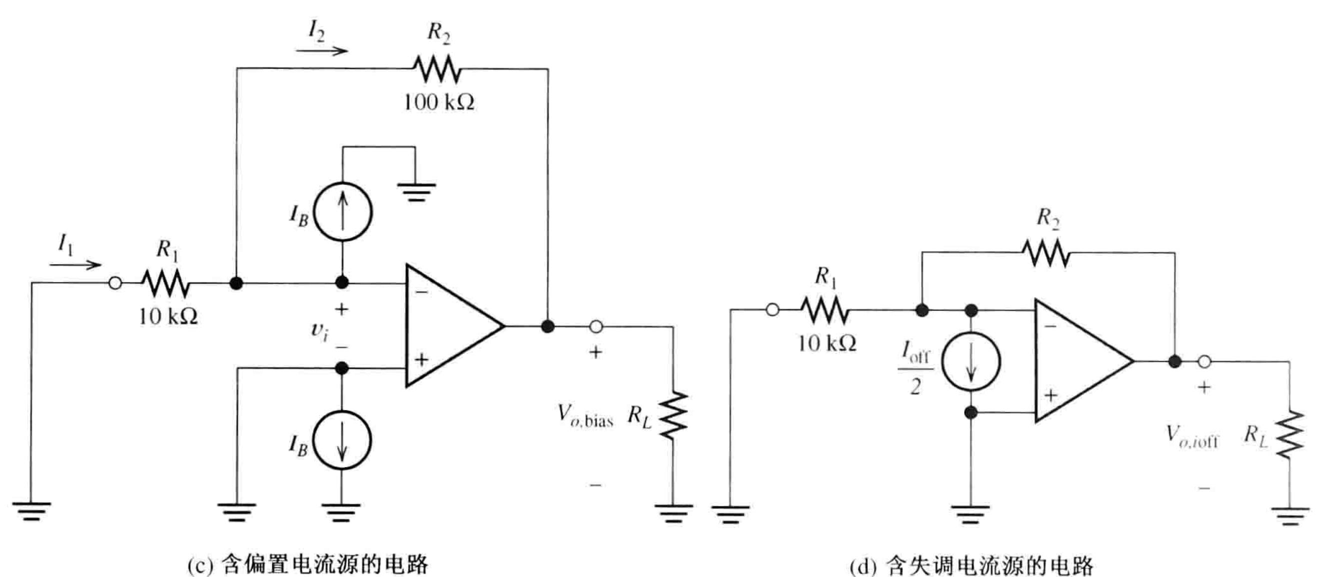
$$V_{o,\text{voff}} = -\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{\text{off}}$$

代入参数值：



(a) 原始电路

(b) $v_{in}=0$，含失调电压源电路



(c) 含偏置电流源的电路

(d) 含失调电流源的电路

图 14.30　例 14.7 的电路图

$$V_{o,voff}=-11V_{off}$$

因为设定偏置电压的最大幅值为 2 mV，所以输出电压 $V_{o,off}$ 的范围为 $-22\sim+22$ mV。然而实际上大部分芯片的输出电压 $V_{o,off}$ 接近于 0。

2. 考虑偏置电流，包含偏置电流源的电路如图 14.30(c)所示。因为同相输入端接地，所以与之并联的偏置电流源短路，对输出电压不产生影响。由于为理想运算放大器且 $V_i=0$，所以电流 $I_1=0$。应用基尔霍夫电流定律，得 $I_2=-I_B$。从输出端得到电压方程如下：

$$V_{o,bias}=-R_2I_2-R_1I_1$$

将 $I_1=0$ 和 $I_2=-I_B$ 代入，得：　　$V_{o,bias}=R_2I_B$

I_B 的最大值为 100 nA，则 $V_{o,bias}$ 的最大值是 10 mV。通常 I_B 的最大值是给定的，但最小值不是。所以一般假设 $V_{o,bias}$ 的最小值是 0。

3. 考虑失调电流，电路如图 14.30(d)所示。与偏置电流分析方法类似，可得：

$$V_{o,ioff}=R_2\left(\frac{I_{off}}{2}\right)$$

I_{off} 的最大值为 40 nA，所以 $V_{o,ioff}$ 的变化范围为 $-2\sim+2$ mV。

由叠加原理可得：

$$V_O=V_{o,voff}+V_{o,bias}+V_{o,ioff}$$

所以，输出电压的极值为

$$V_O = 22 + 10 + 2 = 34\ \text{mV}$$

$$V_O = -22 + 0 - 2 = -24\ \text{mV}$$

因此，输出电压的变化范围为 −24 ~ 34 mV。（我们假设偏置电流的影响最小）典型的输出电压值接近 0 而不是这些极值。

14.7.1　消除偏置电流的影响

前面提到，可以设计一个电路使得其两个偏置电流源的作用相互抵消。例如，在反相放大器配置中添加一个与放大器同相输入端串联的电阻 R_{bias}，如图 14.31 所示。这样做不会改变放大器的增益，却会使得两个电流源 I_B 的作用相互抵消。注意，R_{bias} 的值等于 R_1 和 R_2 的并联值。

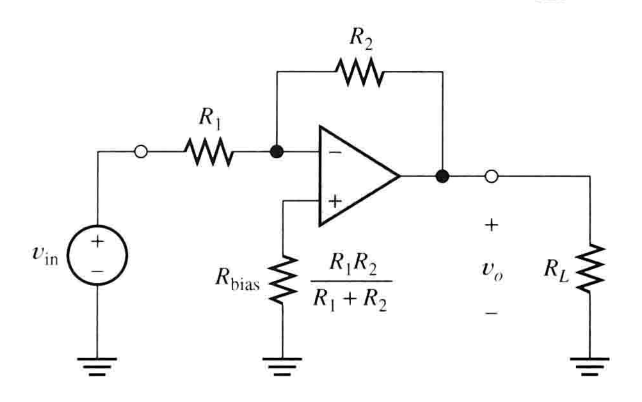


图 14.31　在分析放大器中增加电阻 R_{bias} 可抵消偏置电流的影响

练习 14.14　放大器如图 13.31 所示。(a)假定为理想运算放大器，导出电压增益 v_o/v_{in} 的表达式。其结果应与不含偏置电流补偿电阻的反相放大器相同，如式(14.5)所示。(b) $v_{\text{in}} = 0$，并包含偏置电流源，证明输出电压为 0。(c) $R_1 = 10\ \text{k}\Omega$，$R_2 = 100\ \text{k}\Omega$，失调电压 V_{off} 的最大值为 3 mV，计算输出电压的变化范围。(d) $R_1 = 10\ \text{k}\Omega$，$R_2 = 100\ \text{k}\Omega$，失调电流 I_{off} 的最大值为 40 nA，计算输出电压的变化范围。(e)根据(c)、(d) 中的数据，计算由偏置电流、失调电压和失调电流共同作用下输出电压的变化范围。

答案： (a) $v_o/V_{\text{in}} = -R_2/R_1$；(b)33 mV；(c)4 mV；(d)37 mV。

练习 14.15　同相放大器如图 14.32 所示。(a)推导电压增益 v_o/v_{in} 的表达式，R_{bias} 是否影响增益？解释原因。(b)保证偏置电流引起的输出电压为 0，推导 R_{bias} 的表达式。

答案： (a) $v_o/v_{\text{in}} = 1 + R_2/R_1$。增益与 R_{bias} 无关，因为通过 R_{bias} 的电流为 0（理想运算放大器情况下）。(b) $R_{\text{bias}} = R_1 \parallel R_2 = 1/(1/R_1 + 1/R_2)$。

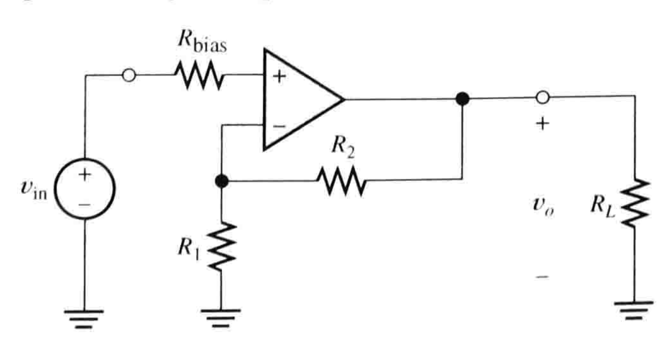


图 14.32　包含 R_{bias} 的同相放大器

14.8 差分放大器和仪用放大器

图 14.33 所示是一个差分放大器。假设运放是理想的并且 $R_4/R_3 = R_2/R_1$，那么输出就是差模信号的常数倍数。其共模信号的增益为0(在 11.11 节中已经讨论过共模信号的问题了)。为了将偏置电流的影响降到最小，选择 $R_2 = R_4$，$R_1 = R_3$。

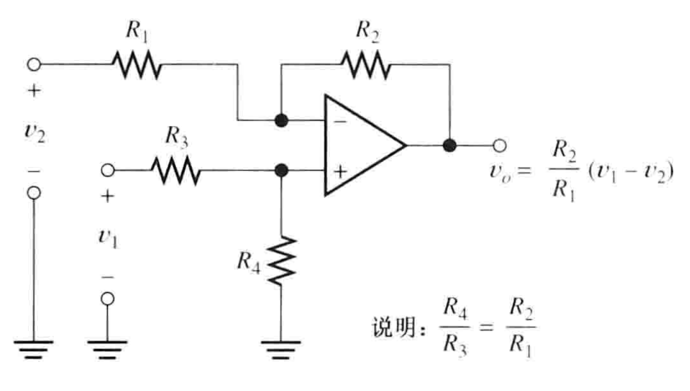


图 14.33 差分放大器

电路的输出阻抗为0。对于 v_1 的输入阻抗为 $R_3 + R_4$。

由 v_1 产生的电流通过反馈网络（R_1 和 R_2）流回到输入源 v_2 中。因此，在信号源 v_2 看来，电路似乎不是无源的。所以，输入阻抗的概念在 v_2 上不适用(除非 v_1 为0)。

在某些应用场合，信号源有自己的内部阻抗，所以和理想信号之间的差别就是有内部电压降。于是，在设计电路时可以分别加上信号源 v_2，v_1 的内部阻抗 R_1 和 R_3。然而，要获得很高的共模抑制比，就需要使电阻的比率非常匹配。如果电源的阻抗没有小到可以忽略或者阻抗值不确定，要想做到匹配是一件非常困难的事。

14.8.1 精密仪用差分放大器

图 14.34 所示是一个改进过的差分放大器电路，其共模抑制比不会受信号源内部阻抗的影响。因为节点约束条件在放大器 X_1 和 X_2 的输入端上，所以从信号源流出的电流为0。于是，两个信号源的输入阻抗都为无穷大，输出电压只与信号源内部阻抗有关。和类似的差分放大器(如图 14.33 所示)相比，这是一个很重要的优点。值得注意的是，此种放大器的第二级是一个单位增益的差分放大器。

这个电路的奇妙之处在于差模信号在第一级中的增益比共模信号的高很多。为了证明这一点，首先考虑只有差分输入的情况(例如 $v_1 = -v_2$)。由于电路是对称的，A 点的电压为0。即在分析只有差分输入的情况时，可以认为 A 点是接地的。这样，输入放大器 X_1 和 X_2 就可以看成是增益为 $(1 + \frac{R_2}{R_1})$ 的同相放大器。第二级的差模增益是1。因此，总的差模信号增益为 $(1 + \frac{R_2}{R_1})$。

接下来，考虑只有共模输入的情况(如 $v_1 = v_2 = v_{cm}$)。因为节点约束条件，所以放大器 X_1（或者 X_2）的输入端之间的电压差为0。于是，放大器 X_1 和 X_2 反相输入端的电压都等于 v_{cm}。由于两个串联电阻 R_1 之间的电压为0，也就是说没有电流流过 R_1。所以，同样也没有电流流过 R_2。已知共模信号在第一级中的增益为1，于是放大器 X_1 和 X_2 的输出电压等于 v_{cm}。换句话说，第一级的差模信号增益是 $(1 + \frac{R_2}{R_1})$，比1要大得多，从而达到减小共模信号相对于差模信号的

值的目的。值得注意的是，如果 A 点是真的接地点，那么共模信号的增益将和差模信号的增益相等，即 $(1+\frac{R_2}{R_1})$。

实际上，因为不需要使用 A 点，所以会将两个串联的 R_1 电阻结合成一个电阻（电阻值为 $2R_1$），因此也就不存在两个 R_1 的电阻值匹配不匹配的问题了。并且，从电路图中也可以看出，在第一级中要让差模增益比共模信号高出很多也不需要考虑 R_2 的匹配问题。既然第一级减小了共模信号的相对值，那么第二级中就不必过分考虑电阻的匹配了。

因此，尽管电路要复杂一些，但是图 14.34 所示差分放大器的性能要比图 14.33 所示的电路好得多。特别是共模抑制比与电源内部阻抗无关，两个电源的输入阻抗都为无穷大，并且电阻匹配要求也不是很重要。

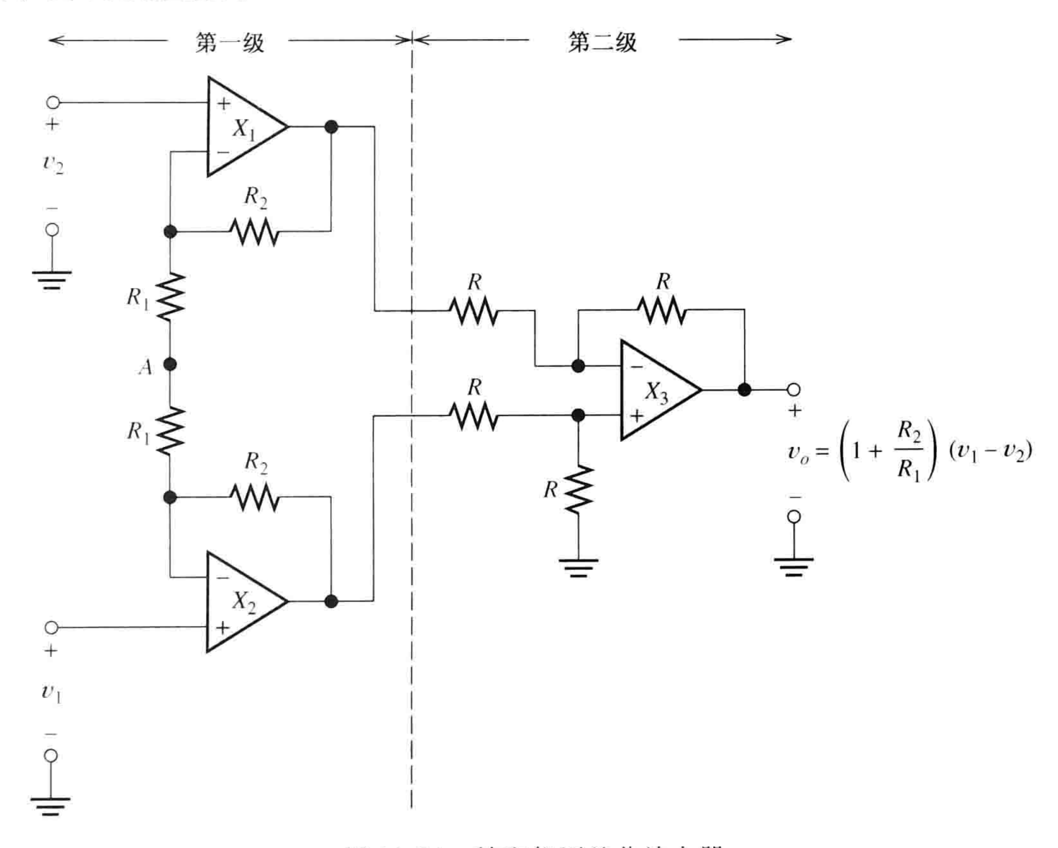


图 14.34　精密仪用差分放大器

练习 14.16　假设运放是理想的，推导图 14.33 所示差分放大器的输出电压表达式。假定 $R_4/R_3 = R_2/R_1$。

14.9　积分器和微分器

积分器的电路如图 14.35 所示，其输出电压正比于输入电压对时间的积分（对运行时间积分的意思是指积分的上限是时间 t）。

积分电路在测量仪表的应用中作用很大。例如，针对一个来自加速度传感器的正比于加速度的信号，可以通过对加速度信号进行积分，从而得到一个正比于速度的信号。另一种积分方式产生正比于位置的信号。

在图 14.35 中，负反馈通过电容产生。因此，假设运放是理想的，其反相输入端的电压为 0。输入电流为

$$i_{\text{in}}(t)=\frac{v_{\text{in}}(t)}{R} \tag{14.39}$$

流入理想运放输入端的电流为0。所以，输入电流 i_{in} 流过电容。假设复位开关在 $t=0$ 时刻是打开的。于是，电容电压在 $t=0$ 时为0。电容上的电压为

$$v_C(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i_{\text{in}}(t)\,\mathrm{d}t \tag{14.40}$$

对从放大器输出端到电容再到输入端构成的回路可写出一个电压方程：

$$v_O(t)=-v_C(t) \tag{14.41}$$

将式(14.39)代入式(14.40)，再将得到的结果代入式(14.41)，得：

$$v_O(t)=-\frac{1}{RC}\int_0^t v_{\text{in}}(t)\,\mathrm{d}t \tag{14.42}$$

因此，输出电压是输入电压对运行时间积分的 $-\frac{1}{RC}$ 倍。如果希望积分器有一个正的增益，可以将积分器级联一个反相放大器。

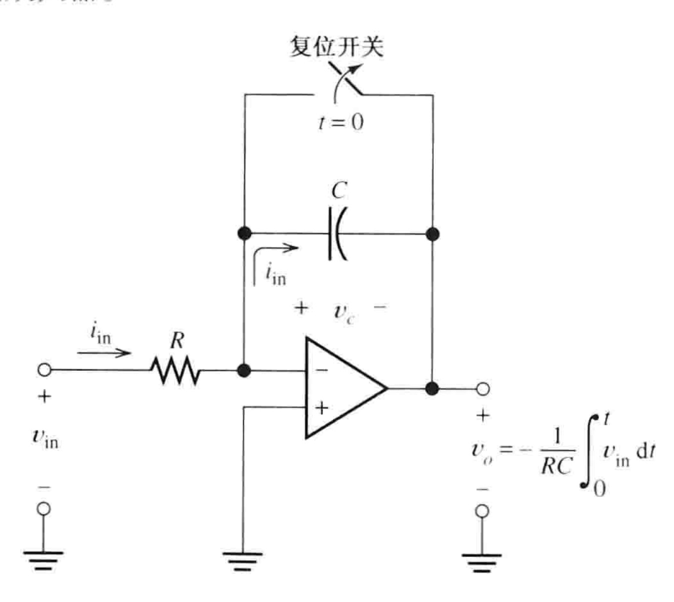


图 14.35　积分器

可见，选择 R 和 C 的值可以调整增益的大小。当然，选择电容时，为了减少费用、体积和规模，希望电容值越小越好。然而，对于一个给定的($1/RC$)值，电容越小，电阻就会越大，电流 i_{in} 也就会越小。因此，随着电容的减小，偏置电流的影响会越来越明显。通常，在设计中尽量做到折中。

练习 14.17　图 14.35 所示的积分器，其输入为图 14.36 所示的方波信号。(a)如果 $R=10\ \text{k}\Omega$，$C=0.1\ \mu\text{F}$，并且运放是理想的，请画出输出波形。(b)如果 $R=10\ \text{k}\Omega$，那么 C 为多少时才能产生峰—峰值为 2 V 的输出。

答案：(a)见图 14.37。(b) $C=0.5\ \mu\text{F}$。

练习 14.18　图 14.35 中，$v_{\text{in}}=0$，$R=10\ \text{k}\Omega$，并且 $C=0.01\ \mu\text{F}$。如图中所示，$t=0$ 时复位开关打开。除偏置电流 $I_B=100\ \text{nA}$ 之外，可以把运放看成是理想的。(a)求以时间作为变量的输出电压的表达式。(b) $C=1\ \mu\text{F}$，其他条件不变，重做(a)。

答案：(a) $v_o(t)=10t$；(b) $v_o(t)=0.1t$。

练习 14.19　在图 14.35 所示电路中添加一个与同相输入端串联的电阻 R，然后重做练习 14.18。

答案：(a) $v_o(t) = -1\ \text{mV}$；(b) $v_o(t) = -1\ \text{mV}$。

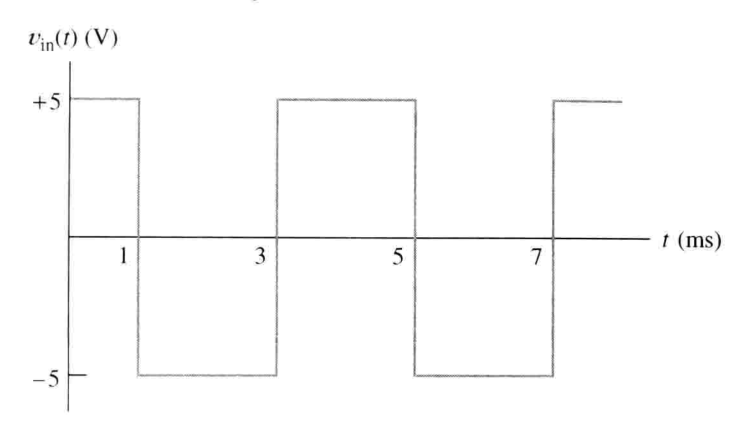


图 14.36　练习 14.17 的方波输入信号

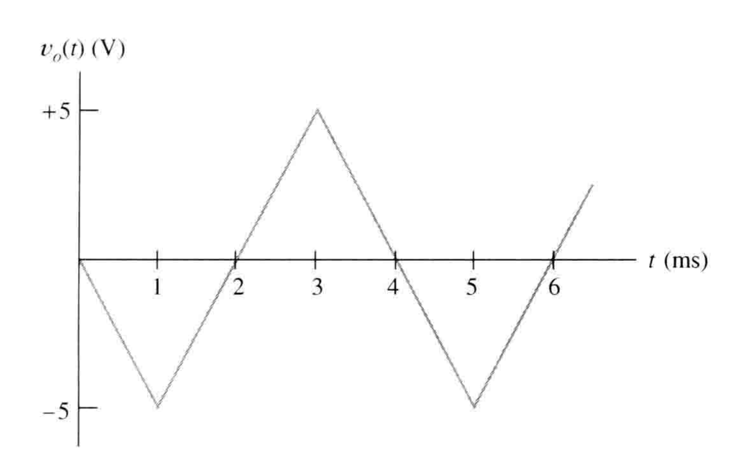


图 14.37　练习 14.17 的答案

14.9.1　微分器电路

图 14.38 所示是一个微分器，其输出电压是输入电压对时间求导数的倍数。用与分析积分器时相似的方法对电路进行分析，得到电路的输出电压为

$$v_O(t) = -RC\frac{dv_{in}}{dt} \tag{14.43}$$

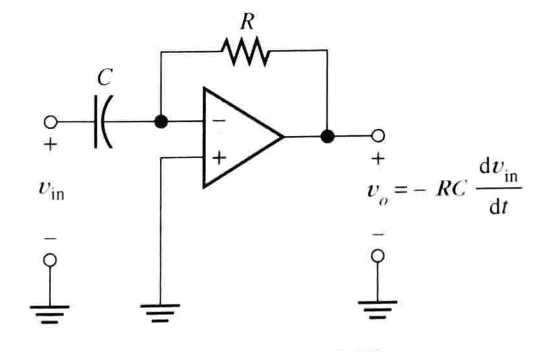


图 14.38　微分器

练习 14.20　推导式(14.43)。

14.10　有源滤波器

滤波器是一种让一定范围内的频率信号通过输入元件到输出而防止其他范围频率的信号通过的电路。例如，一个低通滤波器让低频信号通过输入组件到达输出而阻止高频信号通过。一个常见的滤波器应用是将一个感兴趣的信号从其他信号和噪声中分离出来。例如，一个心电图仪，我们需要一个滤波器使心脏的信号通过，该频率低于 100 Hz，并抑制其他由肌肉收缩引起的更高频率的噪声。我们可以使用一个低通滤波器去除历史留声机唱片的噪声。对于无线电接收器，滤波器则对不同接收站的信号加以区分。在数字仪表系统，需要低通滤波器来去除噪声

和高于采样频率一半以上的信号部分(可以避免在抽样和模数转换中称为混淆的一种失真)。

在6.2节和6.8节中，我们介绍了几个无源滤波器设计的例子。在本节中，我们将展示如何设计由电阻、电容和运放组成的低通滤波器，这类滤波器称为有源滤波器。相对于无源滤波器，有源滤波器在很多方面改善了性能。

有源滤波器的研究十分广泛，人们设计出了许多有用的电路。理想情况下，一个有源滤波器电路应该：

1. 包含很少的组件。
2. 有一个对元件误差不敏感的传递函数。
3. 对放大器的增益带宽积、输出阻抗、转换速率和其他的规范有精确的要求。
4. 调整简便。
5. 对元件值的扩展要求小。
6. 允许一个大范围的有用转移函数来实现。

前面已经介绍了许多不同程度满足这些要求的电路。目前，有许多专门介绍有源滤波器的书。在本节中，我们只关注用一个特定的却很实际的手段来实现低通滤波器。

14.10.1 巴特沃思传递函数

巴特沃思传递函数为

$$|H(f)| = \frac{H_0}{\sqrt{1+(f/f_B)^{2n}}} \tag{14.44}$$

其中，整数 n 是滤波器的阶数，f_B 为3 dB时的截止频率。使 $f=0$，于是有 $|H(0)|=H_0$，因此，H_0 是直流增益大小。传递函数如图14.39所示。需要注意的是，随着滤波器阶数的增加，传递函数接近于一个理想的低通滤波器。

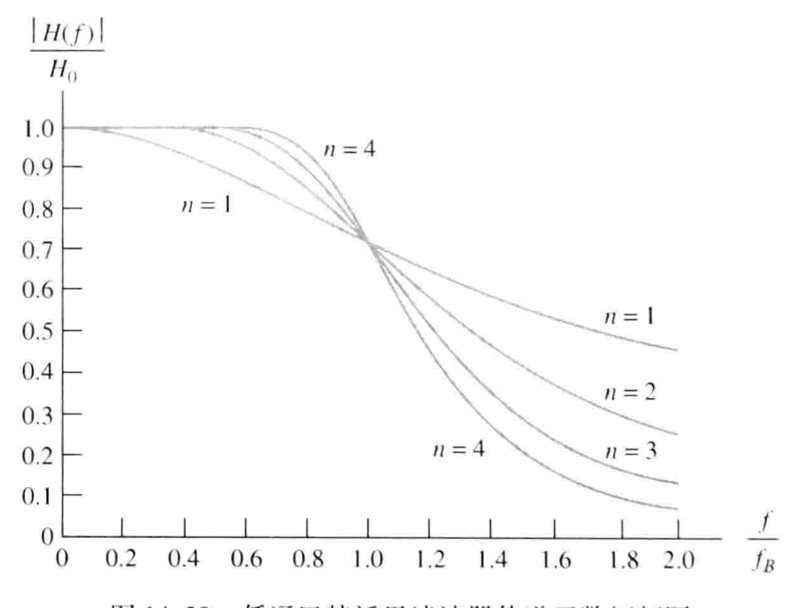


图14.39 低通巴特沃思滤波器传递函数幅频图

一个有源低通巴特沃思滤波器可以通过Sallen-Key电路的级联获得，其中一个如图14.40所示。在这个Sallen-Key电路中，电阻 R 均相等，同样，电容 C 也都相等。有用的电路可能采用有不相同的组件，但采用相同的组件更为方便。

如图 14.40 所示的 Sallen-Key 电路是一个二阶低通滤波器。为了获得一个 n 阶滤波器，必须级联 $n/2$ 电路。(我们假设 n 是偶数。)

整个滤波器 3 dB 截止频率与 R 和 C 的关系为

$$f_B = \frac{1}{2\pi RC} \tag{14.45}$$

通常，我们希望设计一个给定的截止频率。我们试图选择小电容值，因为这将降低物理尺寸和成本。然而，式(14.45)表明，随着电容的减小，电阻会变得更大(对于给定的截止频率)。如果电容选得太小，电阻将变得不切实际地大。此外，线路杂散电容可以很容易地影响高阻抗电路。因此，我们选择一个小电容值，但不是太小(不小于 1000 pF)。

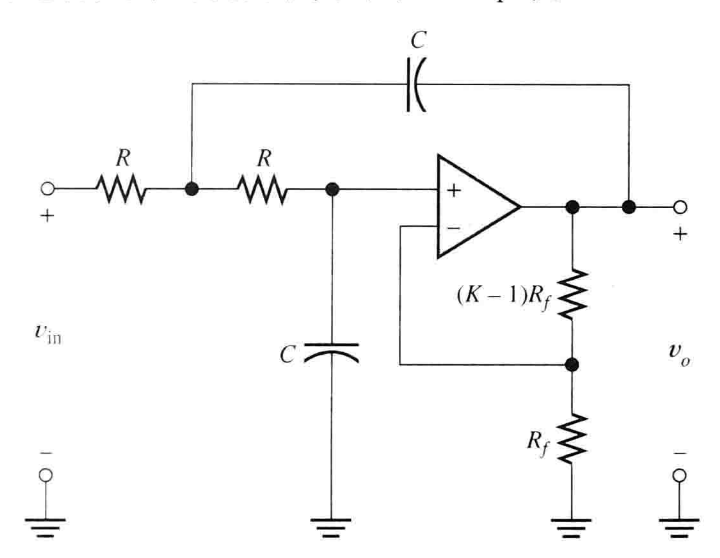


图 14.40　相同组件的 Sallen-Key 低通有源滤波器电路

在选择电容器时，我们应该选择一个满足误差要求的值。然后，使用式(14.45)计算电阻。先选择电容再计算电阻非常有用，因为电阻值比起电容值通常可以在更大范围内进行选择。也许，我们无法找到 R 和 C 的标称值以精确地获得截止频率，然而必须将截止频率精确限制在非常小的百分比中的情况很少。因此，1% 变化范围的电阻通常就可以得到足够接近的值。

注意，图 14.40 所示的电路中，运算放大器、反馈电阻 R_f 以及 $(K-1)R_f$ 形成一个同相放大器，其增益为 K 。在直流时，电容器相当于开路。然后，与同相放大器输入端串联在一起的电阻 R 对增益没有影响。因此，电路的直流增益值为 K。随着 K 从 0 到 3 变化，传递函数有越来越多的峰值(例如，增益值随着频率而增大，并在下降前达到峰值)。对 $K=3$，将出现无限的峰值。从而证明，当 K 大于 3 时，电路是不稳定的，也就是电路出现振荡。

在选择反馈电阻 R_f 以及 $(K-1)R_f$ 时，最关键的问题是它们的比率。如果需要的话，一个精确的比率可以通过一个电位计来实现，通过调整它使每一部分的直流增益满足要求。为了将偏置电流的影响最小化，我们应该选择 R_f 以及 $(K-1)R_f$ 的并联值等于 $2R$。然而，使用场效应晶体管输入放大器，其输入偏置电流通常非常小，因此这种选择就没有必要了。

一个 n 阶巴特沃思低通滤波器是通过级联 $n/2$ 个有适当 K 值的低通滤波器得到的。(在这里，我们假设 n 是偶数。)表 14.1 显示了各阶滤波器所需的 K 值。整体滤波器的直流增益 H_0 是各级 K 值的乘积。

例 14.8　低通有源滤波器的设计。

设计一个四阶巴特沃思低通滤波器，其截止频率为 100 Hz。

解：我们任意选择电容的值为 $C=0.1\ \mu F$。这是一个标准值而且不是特别大。(也许我们可以利用 0.01 μF 的值实现一个同样好的设计。然而，正如前面所提到的，C 的实际大小有所限制。)

接下来，我们利用式(14.45)求解 R 值。代入 $f_B=100$ Hz 和 $C=0.1\ \mu F$，得到 $R=15.92\ k\Omega$。实际上，我们将选择一个精度为 1% 的 15.8 kΩ 的电阻器，这将导致标称的截止频率略高于设计目的。

表 14.1

阶　数	K
2	1.586
4	1.152
	2.235
6	1.068
	1.586
	2.483
8	1.038
	1.337
	1.889
	2.610

参考表 14.1，我们发现一个四阶滤波器需要两个部分，增益分别为 $K=1.152$ 和 2.235。这个结果导致整体滤波器的直流增益 $H_0=1.152\times2.235=2.575$。我们对两部分都任意选择 $R_f=10\ k\Omega$。完整的电路图如图 14.41 所示。电阻 R_3 和 R_{13} 由固定电阻器串联小的可调电阻器组成，以获得每部分电路要求的增益。

例 14.8 中设计的滤波器总增益的伯德图如图 14.42 所示。它可以证实直流增益是 $20\log H_0=8.2$ dB。如所期望的那样，3 dB 截止频率非常接近 100 Hz。

图 14.43 显示了其直流增益每个部分的增益。这个数字也显示了归一化总增益。当然，总增益是各个阶段归一化增益的乘积。(注意，增益是以比率而不是以分贝数绘制的)。第一(运放)部分的传递函数(即低增益阶段)没有峰值。峰值产生在第二部分电路。正是这种峰值提升了整体的传输特性。

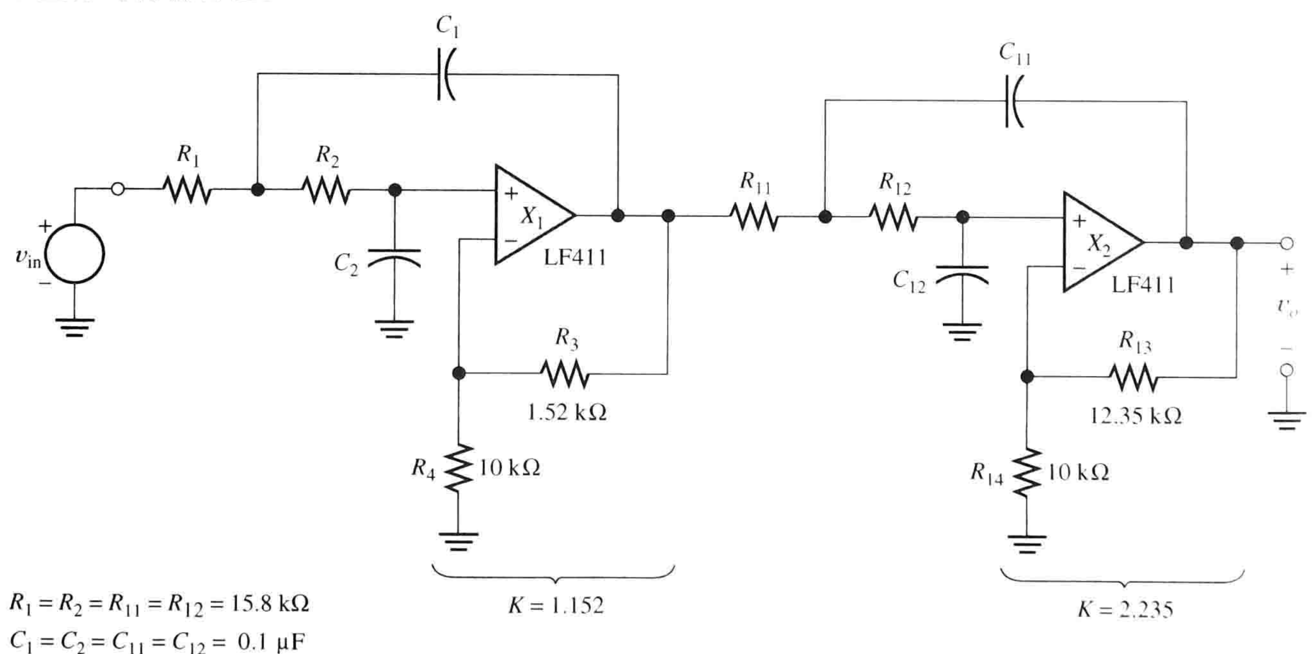


图 14.41　例 14.8 中所设计的四阶巴特沃思低通滤波器

练习 14.21　对于远大于 f_B 的频率，证明在式(14.44)中的巴特沃思低通滤波器的传递函数值以 $20\times n$ 分贝/十倍频斜率减小。

练习 14.22　设计一个六阶巴特沃思低通滤波器，截止频率为 5 kHz。

答案：有多种可能的答案。对于一个六阶滤波器，可以使用像图 14.40 那样的滤波器进行三级级联。一个不错的选择是使用范围从 1000 pF 到 0.01 μF 的电容。当 $C=0.01\ \mu F$ 时，则需要 $R=3.183\ k\Omega$，$R_f=10\ k\Omega$。从表 14.1 中，我们发现增益值是 1.068、1.586 和 2.483。

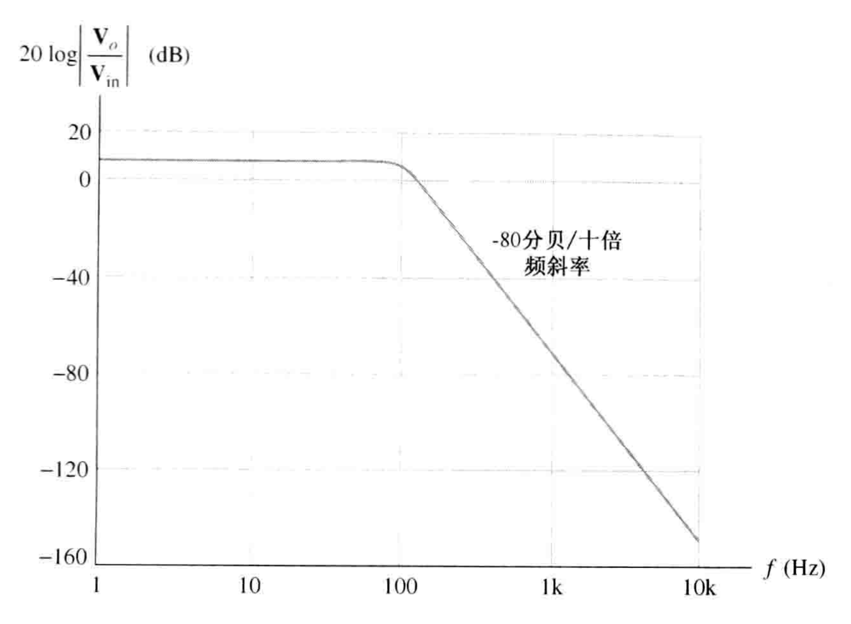


图 14.42　例 14.8 四阶巴特沃思低通滤波器增益伯德图

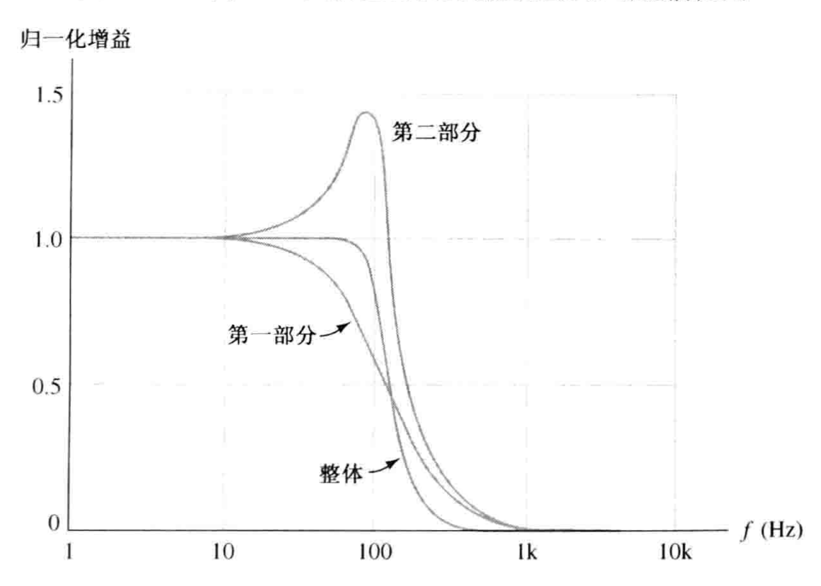


图 14.43　例 14.8 四阶低通滤波器各部分相对频率的增益对比

本章小结

1. 如果一个差分放大器的输入电压为 v_1 和 v_2，则其共模输入电压为 $v_{icm} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$，差分输入信号为 $v_{id} = v_1 - v_2$。
2. 一个理想运放的输入阻抗为无穷大，差模增益为无穷大，共模增益为零，输出阻抗为零，而且带宽为无穷大。
3. 在一个具有负反馈的放大器电路中，输出信号的一部分返回到输入端，而且反馈信号与输入信号的极性相反。
4. 为分析具有负反馈的理想放大器电路，可假定运放的差模输入电压和输入电流为零(即节点约束条件)，并应用此条件分析运放电路。
5. 基本反相放大器的结构如图 14.4 所示，其闭环电压增益为 $A_v = -R_2/R_1$。
6. 基本同相放大器的结构如图 14.11 所示，其闭环电压增益为 $A_v = 1 + R_2/R_1$。

7. 许多有用的放大电路可以采用运算放大器来设计。首先，选择一个合理的电路结构；然后，确定电阻值以满足需要的增益值。
8. 在设计运放电路时，采用非常大的电阻是不合适的，因为这样的电阻不稳定。而且高阻抗电路的分布电容容易引入噪声。选择极小的电阻也不合适，因为会产生大电流流过这些电阻，从而增大了功率损耗。
9. 在运放的线性工作区内，实际运算放大器的性能指标并不完美。例如，有限的输入阻抗，不为零的输出阻抗，有限的开环增益，而且随着频率的增加而下降。
10. 负反馈减小了增益幅值，扩展了带宽。对于同相放大器，其直流增益幅值与带宽的乘积是常数。
11. 任何运放的输出电压和输出电流值是有限的。如果输出波形达到(或者即将超过)这些最大值，则发生削波。
12. 任何运放的输出电压的变化率是有限的，称为转换速率限制。全功率带宽是指运放能够正常传递正弦信号的最大频率值。
13. 运放的直流特性缺陷在于偏置电流、失调电流和失调电压的存在，这些效应可以由图14.29中对电源部分的电路模型来加以说明。直流特性缺陷是因为不希望产生的直流信号叠加至输出信号。
14. 一个单一的运算放大器可用作如图14.33所示的差分放大器。但是，与之相比，图14.34给出的精密仪器放大器具有更好的性能。
15. 图14.35所示为积分器，产生的输出电压与输入电压的时间积分成正比。图14.38所示为微分器。

习题

14.1节 理想运算放大器

P14.1 一个理想运放具有什么特性?

P14.2 一个实际运放有5个端子，请按功能为每个端子命名。

P14.3 一个差分放大器的输入为 v_1 和 v_2，试给出差分输入电压和共模输入电压的定义。

*P14.4 一个差分放大器的输入电压为 $v_1(t) = 0.5\cos(2000\pi t) + 20\cos(120\pi t)$，$v_2(t) = -0.5\cos(2000\pi t) + 20\cos(120\pi t)$，试分别计算共模输入信号和差模输入信号的表达式。

P14.5 试讨论开环增益和闭环增益的区别。

14.2节 反相放大器

*P14.6 试阐述含理想运放的放大电路的分析步骤。

P14.7 节点约束是什么意思? 正反馈时能否使用?

P14.8 试画出基本的反相放大器电路。假设在采用理想运放的情况下，写出闭环增益、输入和输出阻抗的表达式。

P14.9 如图P14.9电路，若运放为理想的，试画出输入信号 $v_{in}(t)$ 和输出 $v_o(t)$ 的波形。

*P14.10 如图P14.10所示电路，若运放为理想的，试计算电路的闭环电压增益。

P14.11 如图P14.11所示电路，若运放为理想的，试计算电路的闭环电压增益。

P14.12 如图P14.12所示反相放大电路，若运放为理想的，v_{in} 为正，二极管电流 $i_D = I_s\exp(v_D/nV_T)$ [见式(10.4)]。由 v_{in}，R，I_s，n 和 V_T 推导 v_o 的表达式。

图 P14.9　　图 P14.10

图 P14.11　　图 P14.12

P14.13　交换电阻与二极管的位置，二极管阴极向右，重复习题 P14.12。

P14.14　如图 P14.12 所示电路，$i_D = Kv_D^3$，由 v_{in}，R 和 K 推导 v_o 的表达式。

P14.15　如图 P14.15 所示电路，运放为理想的，但是输出电压不能超过 ±10 V。试计算电路的输出电压值(提示：该电路为正反馈连接)。

P14.16　反相放大电路如图 P14.16 所示，假设为理想运放，给出电压和电流的表达式。根据基尔霍夫电流定律，流入闭合面内的电流之和等于流出的电流之和。试解释当一个闭合面内包含一个实际运放时，如何满足该定律。

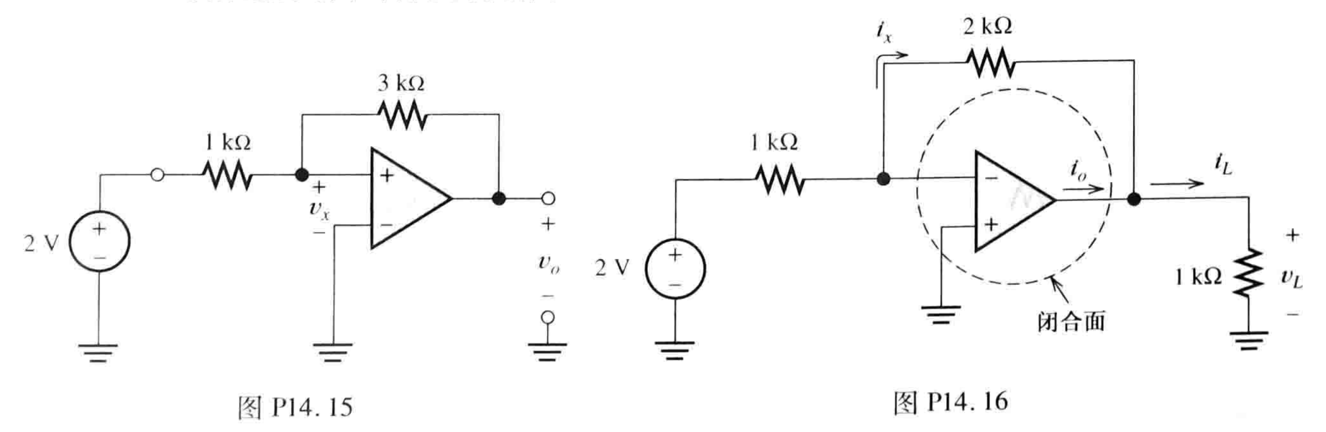


图 P14.15　　图 P14.16

14.3 节　同相放大器

*P14.17　试画出电压跟随器的电路。其电压的增益、输入和输出阻抗是多少？

*P14.18　如图 14.12 所示的电压跟随器，具有单位增益，因此 $v_o = v_{in}$。为什么不直接去掉运放，将负载直接连接到信号源上？试给出采用运放比直接连接更好的一个实例。

P14.19　试画出基本的同相放大器电路。假设采用理想运放，写出闭环增益、输入和输出阻抗的表达式。

P14.20　如图 P14.20 所示电路，若运放为理想的，试求解每个电路的输出电压 v_o。提示：由于每个电路都引入了负反馈结构，因此可采用节点约束条件来分析。

图 P14.20

P14.21 如图 P14.21 所示电路，若运放为理想的，试求解输出电压 v_o 与输入 v_A、v_B 以及电阻的关系。

P14.22 如图 P14.22 所示电路，$v_{in}(t)=2+3\cos(2000\pi t)$，试求使 v_o 直流分量为 0 的 R_2 值，以及输出电压。

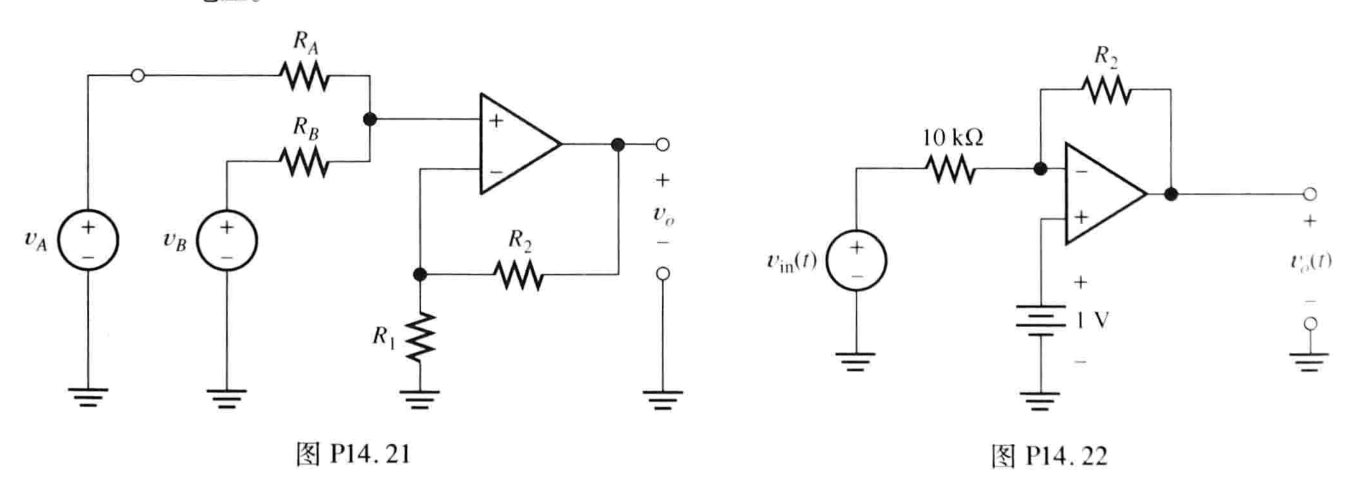


图 P14.21　　　　图 P14.22

P14.23 如图 P14.23 所示电路，若运放为理想的，试求解各电路的输出电路 i_o。问：每个电路的输出阻抗值如何？为什么？（提示：图(b)中输入电压源的末端未接地，这样的电源称为浮地。

*P14.24 如图 P14.24 所示电路，若运放为理想的，(a)求解输出电压由源电流和电阻表示的表达式；(b)电路的输出阻抗值如何？(c)电路的输入阻抗值如何？(d)电路可视为何种类型的理想放大器？（详见11.6 节关于不同类型放大器的内容。）

P14.25 如图 P14.25 所示电路，重做习题 P14.24。

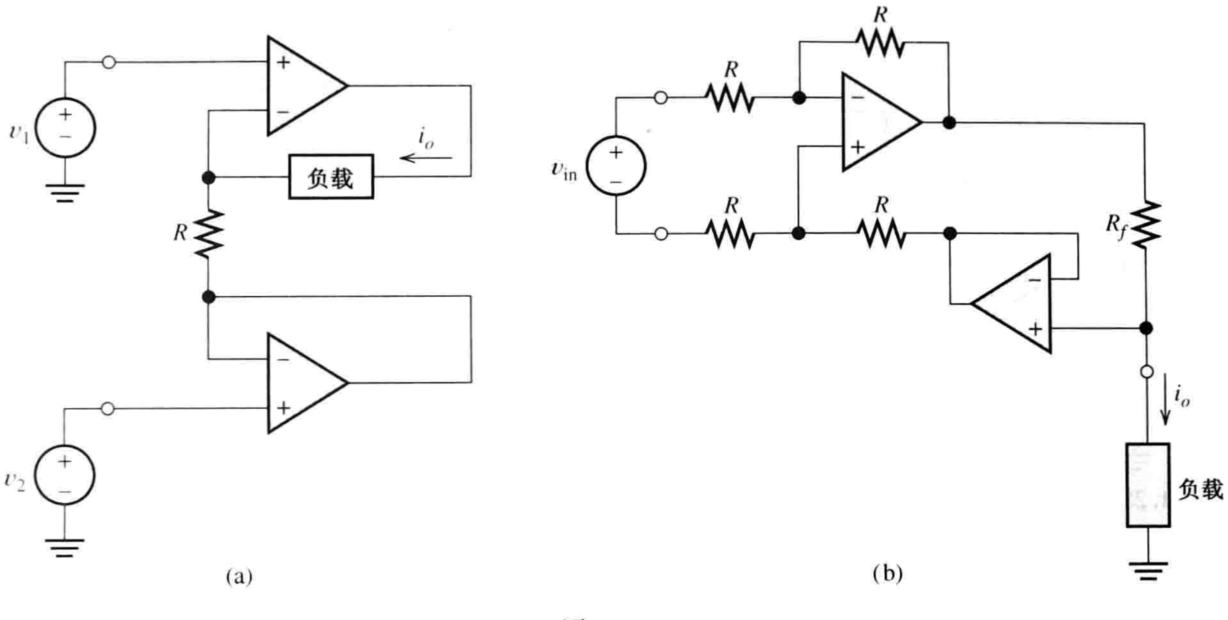


图 P14.23

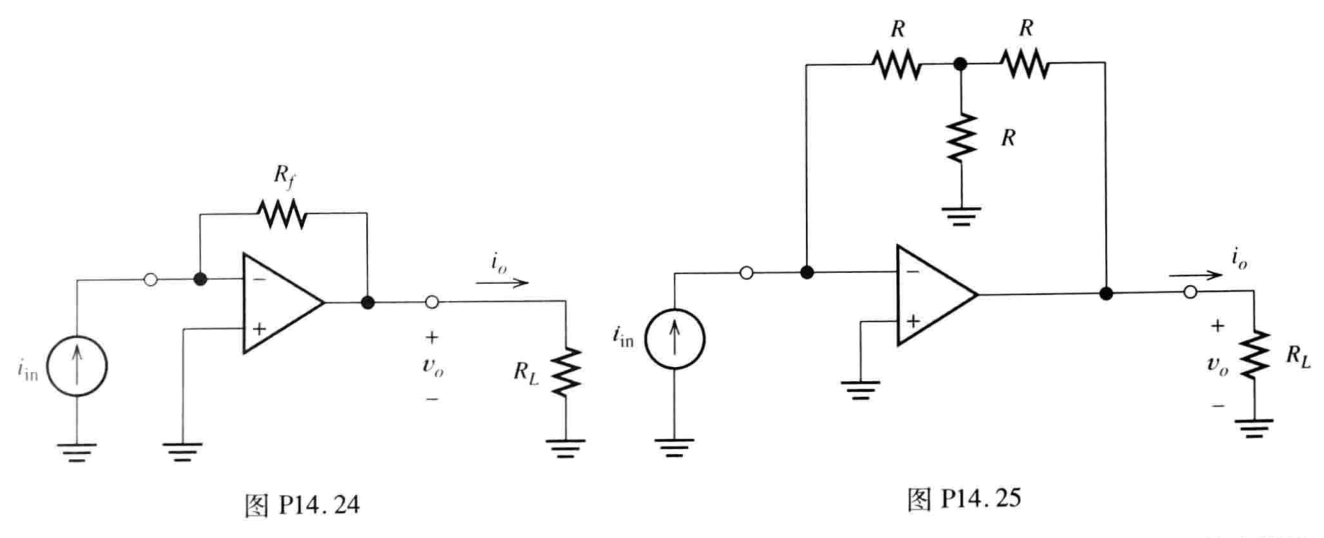


图 P14.24

图 P14.25

P14.26　如图 P14.26 所示电路，(a)求解输出电流由电压源和电阻表示的表达式；(b)电路的输出阻抗值如何？(c)电路的输入阻抗值如何？(d)电路可视为何种类型的理想放大器？（详见 11.6 节关于不同类型放大器的内容。）

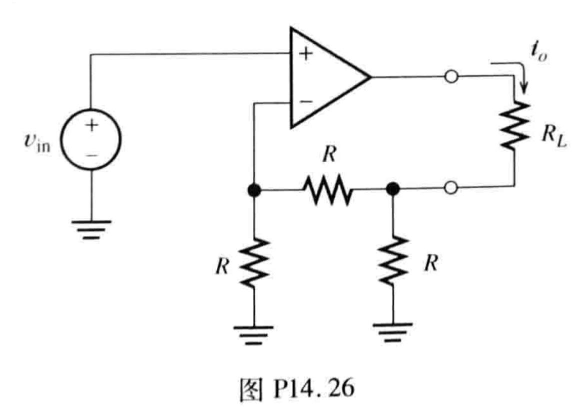


图 P14.26

P14.27　如图 P14.27 所示电路，若运放为理想的，放大器的功率增益 G 被定义为负载 R_L 达到的功率除以电源 v_s 提供的功率。试列写各电路的功率增益表达式；哪个电路的功率增益更大？

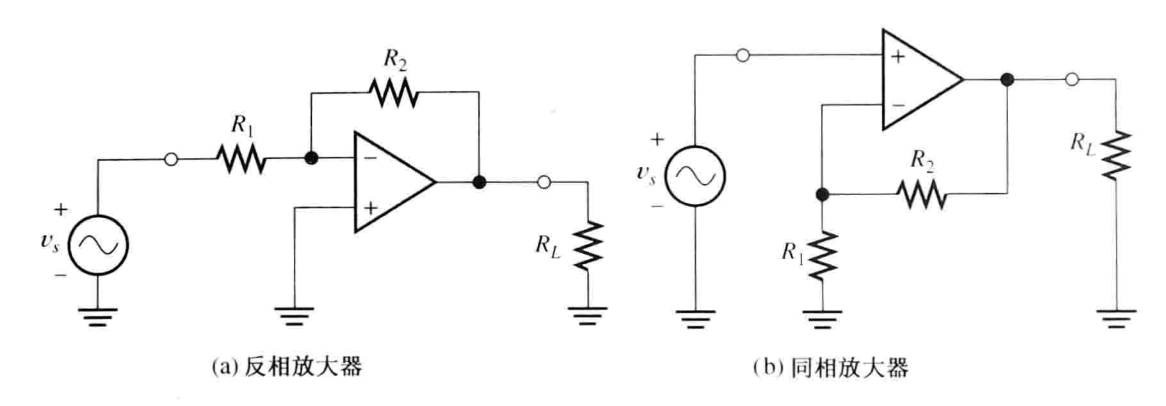


图 P14.27

*P14.28 如图 P14.28 所示电路，一个是负反馈电路，另一个是正反馈电路。假设为理想运放，希望输出极值为 ±5 V。输入电压波形如图 P14.28(c)所示，请画出输出电压的波形。

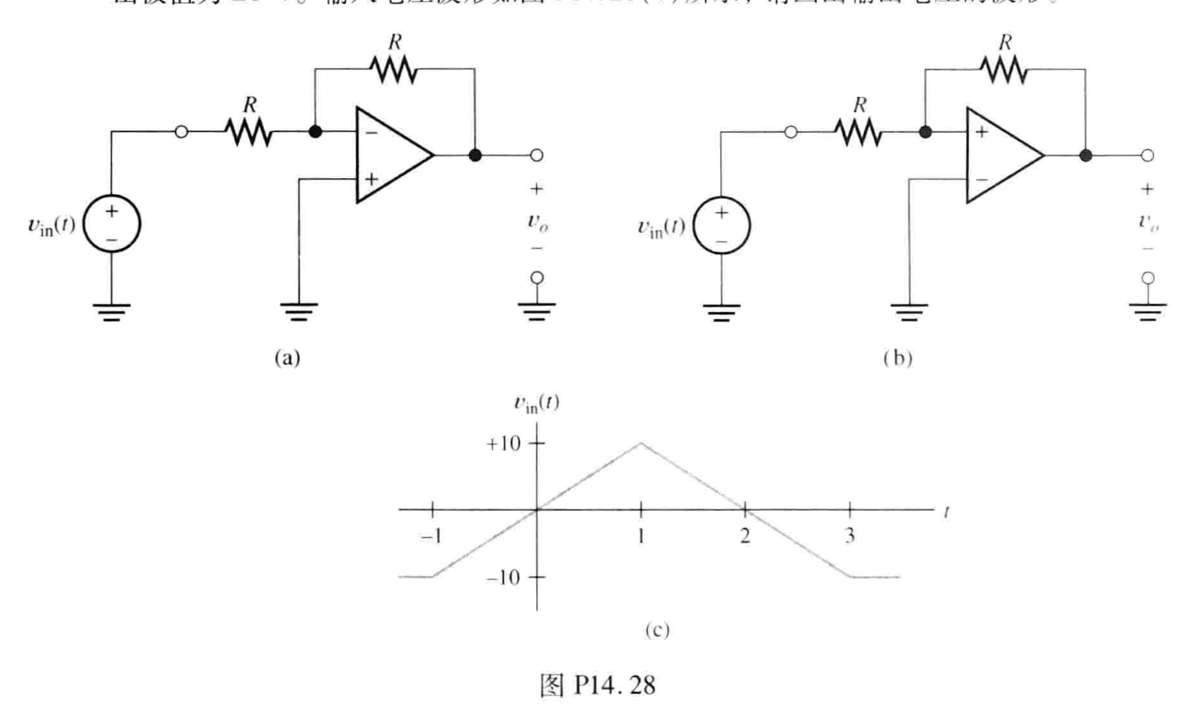


图 P14.28

P14.29 如图 P14.29 所示电路，重做习题 P14.28(输入电压波形如图 P14.28(c)所示)。

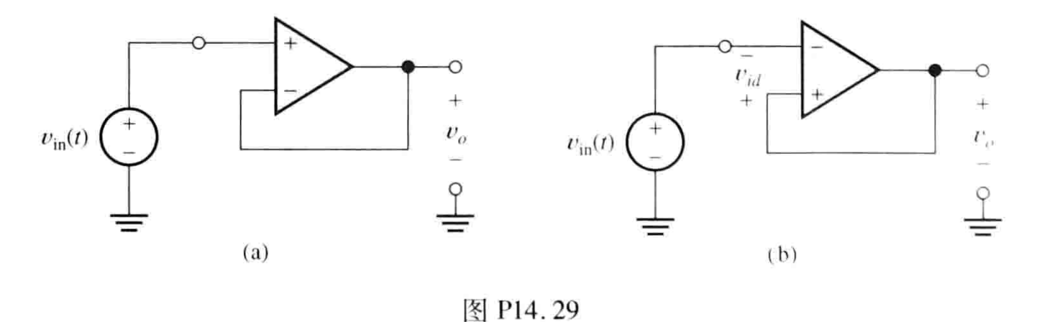


图 P14.29

P14.30 应用精度为 5% 的电阻和理想运放设计反相放大器，运放的增益为 −2。假设在规定的电阻精度下，增益的极值是多少？增益的精度是多少？

P14.31 设计增益为 2 的同相反大器，重做习题 P14.30。

*P14.32 如图 P14.32 所示电路，若运放为理想的，试求解输出电流 i_o 的表达式。问：电路的输入阻抗是多少？从负载 R_L 看进去的输出阻抗多大？

P14.33　如图 P14.33 所示电路，若运放为理想的，试求解电压增益与 T 的关系式。（T 值为 0 ~ 1，具体取决于电位器的位置。）

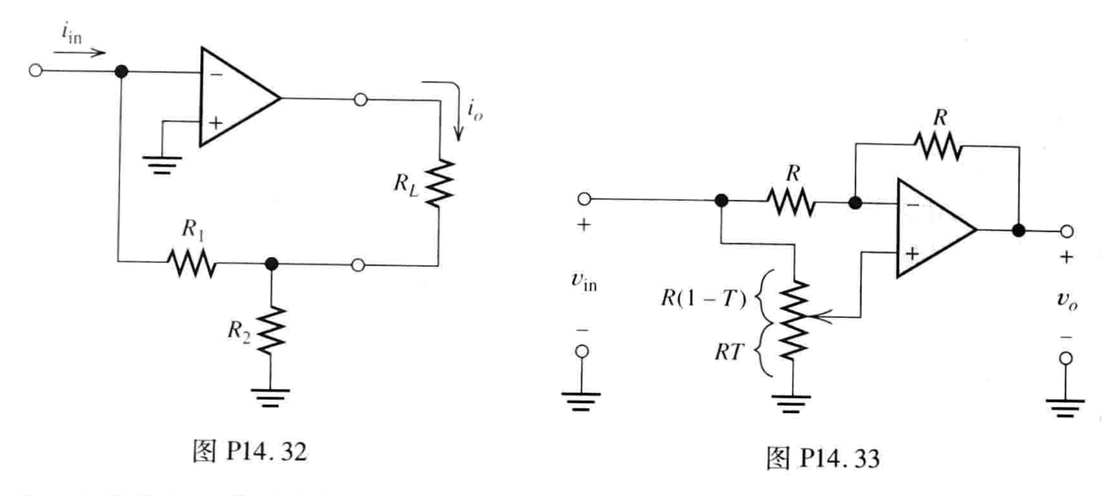


图 P14.32　　　　图 P14.33

P14.34　如图 P14.34 所示含有负反馈的电路，若运放为理想的，试采用节点约束条件推导电压增益 $A_1 = v_{o1}/v_{in}$ 和 $A_2 = v_{o2}/v_{in}$ 的表达式。

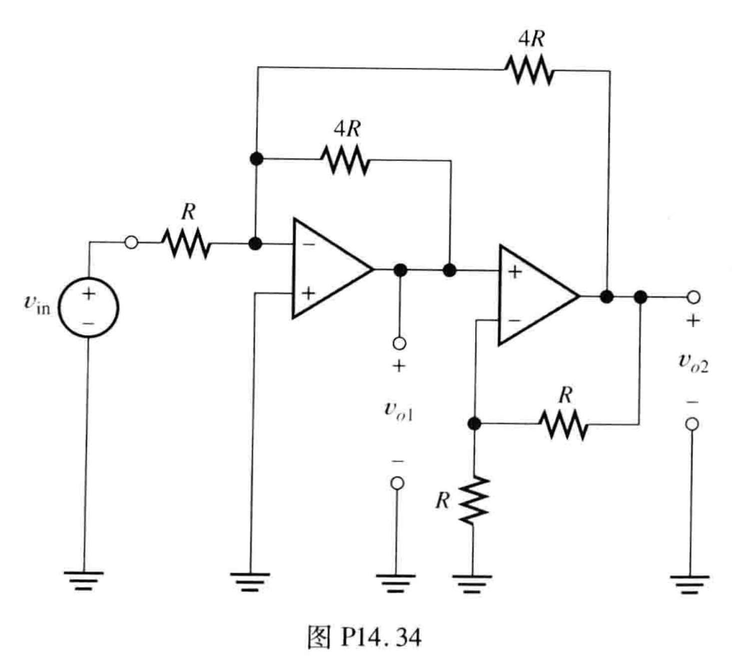


图 P14.34

14.4 节　简单放大器的设计

P14.35　假设我们正在使用一个运算放大器设计一个放大器。使用非常小的反馈电阻将会产生什么问题？使用非常大的反馈电阻又会产生什么问题？

P14.36　利用表 P14.36 中的元件设计一个放大器，其电压增益为 −10 ± 20%。输入阻抗要尽可能大（理想情况下为开路）。记住：要使用实际的电阻值。（提示：用同相阶和反相阶级联。）

表 P14.36　设计问题可用的元件

标准 5% 精度的电阻（见附录 B）
标准 1% 精度的电阻（如果 5% 精度的电阻可行的话，就不用 1% 精度的，因为它的价格更贵）
理想运算放大器
可调电阻其最大值范围从 100 Ω 到 1 mΩ，且按 1-2-5 连续（如 100 Ω，200 Ω，500 Ω，1 kΩ 等）。如果固定电阻能够满足应用，就不要使用可调电阻

* P14.37 见例 14.4，可以使用一个运算放大器设计。找到一个合适的电路配置和电阻值。对于这个问题，增益误差为 ±5%。

P14.38 使用表 P14.36 中的组件设计一个放大器，其输入阻抗至少为 10 kΩ，电压增益为：(a) −10 ± 20%；(b) −10 ±5%；(c) −10 ±0.5%。

P14.39 设计一个放大器，其电压增益为 +10 ±3%，输入阻抗为 1 kΩ ±1%，使用表 P14.36 中的组件。

P14.40 使用表 P14.36 中的组件设计一个电路，其输出电压是 $v_o = A_1 v_1 + A_2 v_2$。电压 v_1 和 v_2 是输入电压。设计实现 $A_1 = 5 \pm 5\%$ 和 $A_2 = -10 \pm 5\%$。输入阻抗没有限制。

P14.41 如果输入阻抗要求尽可能大(理想情况下为开路)，重做习题 P14.40。

P14.42 两个信号源的内部电压分别为 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$。电源的内阻(即戴维南阻抗)总是小于 2 kΩ，但确切的值不知道而且很可能随时间改变。使用表 P14.36 中的组件设计一个电路，其输出电压是 $v_o = A_1 v_1 + A_2 v_2$。电压 v_1 和 v_2 是输入电压。设计实现 $A_1 = -10 \pm 1\%$ 和 $A_2 = 3 \pm 1\%$。

P14.43 假设有一个信号源的内阻(即戴维南阻抗)总是小于 1 kΩ，但是变量随时间变化。使用表 P14.36 中的组件设计一个放大器，对内部电压源进行放大。电压增益应为 −20 ±5%。

14.5 节 运算放大器线性工作的缺陷

P14.44 对实际放大器在其线性范围操作的缺点进行列表说明。

P14.45 某运放单位增益带宽为 15 MHz。如果这个运算放大器用在一个同相放大器之中，后者的闭环直流增益的 $A_{0CL} = 10$，确定闭环截止频率 f_{BCL}。当直流增益为 100 时重复上述问题。

P14.46 某运算放大器的开环直流增益为 $A_{0OL} = 200\ 000$，开环 3 dB 带宽为 $f_{BOL} = 5$ MHz。确定频率为 (a) 100 Hz，(b) 1000 Hz，(c) 1 MHz 时的开环增益。

P14.47 此题的目的是调查电压跟随器上的运放有限的开环增益、有限的输入阻抗和非零的输出阻抗的影响。这个电路包括运算放大器模型，如图 PA14.47 所示。(a) 推导电路电压增益 v_o/v_s 的表达式。计算当 $A_{OL} = 10^5$，$R_{in} = 1$ MΩ 和 $R_o = 25$ Ω 时电压增益的值。将这个结果与一个理想运算放大器的增益相比较。(b) 推导电路输入阻抗 $Z_{in} = v_s/i_s$ 的表达式。计算当 $A_{OL} = 10^5$，$R_{in} =$ 1 MΩ 和 $R_O = 25$ Ω 时输入阻抗的值。将这个结果与一个理想运算放大器的输入阻抗相比较。(c) 推导电路输出阻抗 Z_o 的表达式。计算当 $A_{OL} = 10^5$，$R_{in} = 1$ MΩ 和 $R_o = 25$ Ω 时输出阻抗的值。将这个结果与一个理想运算放大器的输出阻抗相比较。

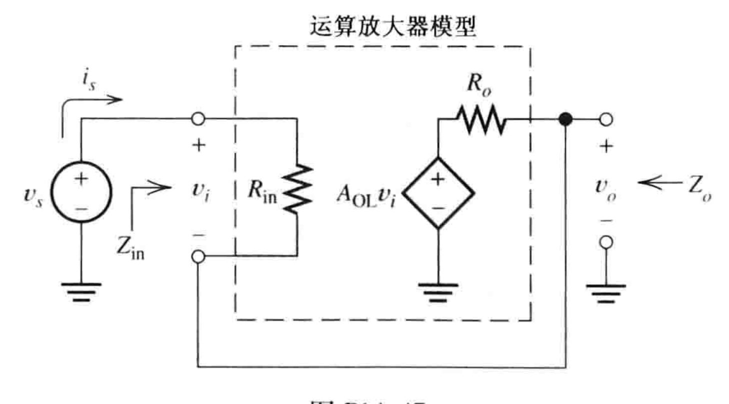


图 P14.47

P14.48 此题的目的是调查反相放大器上的运放有限的开环增益、有限的输入阻抗和非零的输出阻抗的影响。这个电路包括运算放大器模型，如图 PA14.48 所示。(a) 推导电路电压增益 v_o/v_s 的表达式。计算当 $A_{OL} = 10^5$，$R_{in} = 1$ MΩ 和 $R_o = 25$ Ω 时电压增益的值。将这个结果与一个理想运算放大器的增益相比较。(b) 推导电路输入阻抗 $Z_{in} = v_s/i_s$ 的表达式。计算当 $A_{OL} = 10^5$，$R_{in} =$ 1 MΩ和 $R_o = 25$ Ω 时输入阻抗的值。将这个结果与一个理想运算放大器的输入阻抗相比较。(c) 推导电路输出阻抗 Z_o 的表达式。计算当 $A_{OL} = 10^5$，$R_{in} = 1$ MΩ 和 $R_o = 25$ Ω 时输出阻抗的值。将这个结果与一个理想运算放大器的输出阻抗相比较。

P14.49　假设需要一个直流增益为 10 的同相放大器，增益大小在 10 kHz 时必须不少于 9。确定运算放大器要求的最小增益带宽。

P14.50　假设需要一个直流增益为 10 的同相放大器，其相移在 200 kHz 时必须不超过 10°。确定运算放大器要求的最小增益带宽。

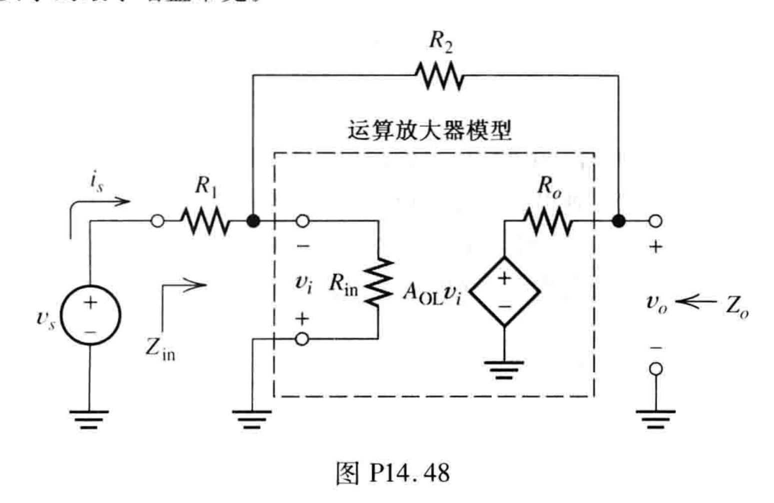


图 P14.48

P14.51　考虑两个设计拥有直流增益 100 的放大器的替代方案。第一个替代方案是使用一个同相阶，增益为 100。第二个方案是级联两个非反相阶，其增益均为 10。放大器的增益带宽为 10^6。推导一个以频率的函数表示的增益表达式，为每种方案确定一个 3 dB 的带宽。

P14.52　一个特定的运算放大器有一个开环直流增益 A_{0OL} = 200 000 和一个开环 3 dB 带宽(f_{BOL} = 5 Hz)。画出开环增益大小的伯德图。如果这个运算放大器是用于闭环直流增益为 100 的同相放大器，画出闭环增益大小的伯德图。当闭环直流增益为 10 时重复上述问题。

14.6 节　非线性限制

P14.53　列出实际运放非线性的局限性。

P14.54　定义功率带宽。

P14.55　如果为理想的输出，采用正弦输入信号会大大超过功率带宽，输出信号的波形是怎样的？在这种情况下，如果运算放大器的回转率为 10 V/μs 且频率输入是 1 MHz，输出信号的峰-峰值是多少？

P14.56　假设要设计一个放大器，它可以产生一个 100 kHz 的正弦波，输出一个 5 V 的峰值电压。该运算放大器的最小允许回转率为多少？

P14.57　假设有一个运算放大器，其最大输出电压范围为 -10 ~ 10 V。最大输出电流强度为 20 mA。回转率极限为 SR = 10 V/μs。这个运算放大器用于图 14.28 所示的电路。(a)确定运算放大器的带宽。(b)频率为 1 kHz 和 R_L = 1 kΩ 时，输出电压峰值是否会失真？(c)对于频率 1 kHz 和 R_L = 100 Ω，输出电压峰值是否会失真？(d)对于频率 1 MHz 和 R_L = 1 kΩ，输出电压峰值是否会失真？(e)如果 R_L = 1 kΩ 和 $v_s(t) = 5\sin(2\pi 10^6 t)$，画出稳定输出波形随时间的变化图。

P14.58　假设需要一个同相放大器，其直流增益为 10 以放大一个给定的输入信号：

$$\begin{aligned} v_{in}(t) &= 0 \quad t \leqslant 0 \\ &= t\exp(-t) \quad t \geqslant 0 \end{aligned}$$

其中 t 以 μs 计。确定避免运放失真的最小回转率。

P14.59　假设需要一个电压跟随器来放大以下给定电压：

$$\begin{aligned} v_{in}(t) &= 0 \quad t \leqslant 0 \\ &= t^2 \quad 0 \leqslant t \leqslant 3 \\ &= 9 \quad 3 \leqslant t \end{aligned}$$

其中 t 以 μs 计。确定避免运放失真的最小回转率。

*P14.60 一种测量运算放大器回转率限制的方法是将正弦波(或方波)作为放大器的输入，然后提高频率，直到输出波形变成三角形为止。假设一个 1 MHz 的输入信号产生一个三角形输出波形，其峰-峰值为 4 V。确定这个运算放大器的回转率。

P14.61 一个运算放大器的最大输出电压范围为 -10 ~ +10 V，最大输出电流大小是 25 mA。回转率限制为 1 V/μs。将运算放大器应用于一个放大器中，如图 P14.61 所示。(a)确定该运放的带宽。(b)当频率为 5 kHz，$R_L=100\ \Omega$ 时，输出电压峰值是否失真？(c)当频率为 5 kHz，$R_L=10\ \text{k}\Omega$ 时，输出电压峰值是否失真？(d)当频率为 100 kHz，$R_L=10\ \text{k}\Omega$ 时，输出电压峰值是否失真？

P14.62 考查图 P14.62 所示的桥型电路。(a)假设运放是理想的，推导电压增益 v_o/v_s 的表达式。(b)如果 $v_s(t)=3\sin(\omega t)$，画出 $v_1(t)$，$v_2(t)$ 和 $v_o(t)$ 随时间变化的曲线。(c)如果运放由 ±15 V 供电，输出钳位在 ±14 V，当恰好处于钳位阈值时，$v_o(t)$ 的峰值为多少？(评论：如果一个峰值输出电压比供电电压更大，则该电路可以是有用的。)

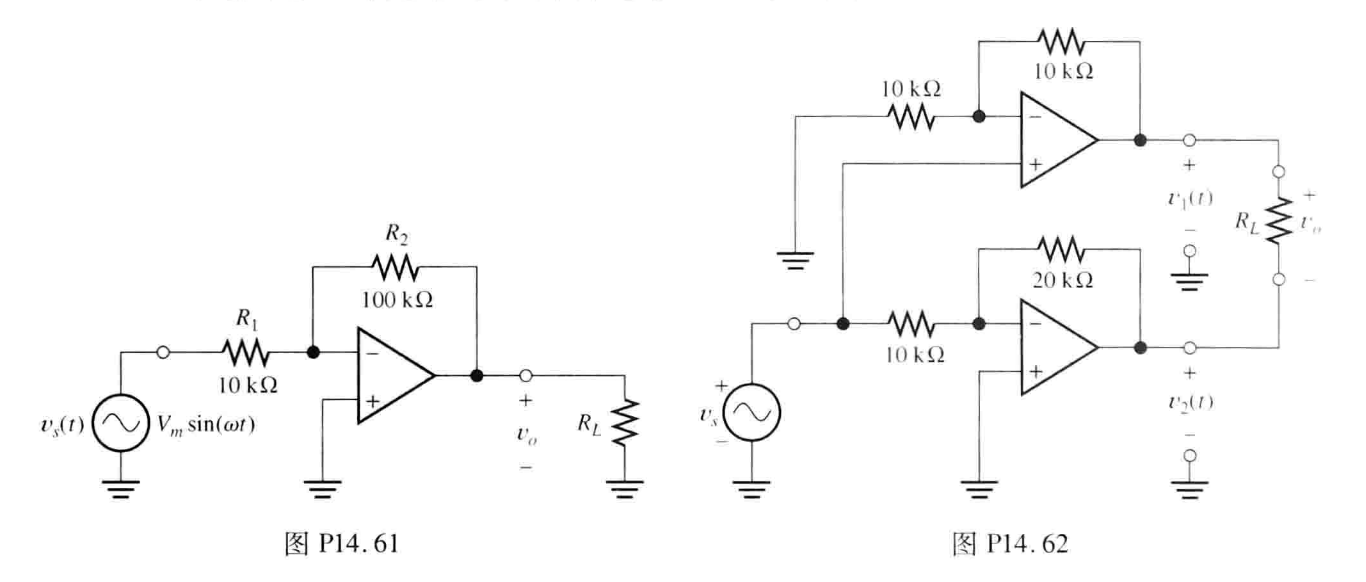


图 P14.61　　图 P14.62

14.7 节　直流缺陷

*P14.63 考虑到直流缺陷在其中增加电源的情况下，画出运放的电路标志。

P14.64 对运放的直流缺陷进行定义，这些缺陷会带来什么影响？

P14.65 场效应晶体管运算放大器与晶体管运放相比有什么优势？

*P14.66 当 $v_{in}=0$ 时，确定图 14.30(a)所示反相放大器输出电压的最坏情况。偏置电流的范围为 100 ~200 nA，最大偏移电流是 50 nA，最大偏移电压大小是 4 mV。

P14.67 有时需要交流耦合放大器。如图 P14.67 所示电路是一个实现交流耦合的不好的方式。解释为什么。(提示：考虑偏置电流的影响。)展示如何添加一个组件(包括它的值)，以便使偏置电流不影响电路的输出电压。

P14.68 考查图 P14.61 所示的放大器。信号源输入电压为 0，要求输出电压不超过 100 mV。(a)忽略直流缺陷，运放允许的最大偏置电压为多少？(b)忽略直流缺陷，运放允许的最大偏置电流为多少？(c)展示如何添加一个组件(包括它的值)，以使偏置电流对电路没有影响。(d)假设(c)的电阻已经设置，忽略偏置电压，运放允许的最大偏置电流为多少？

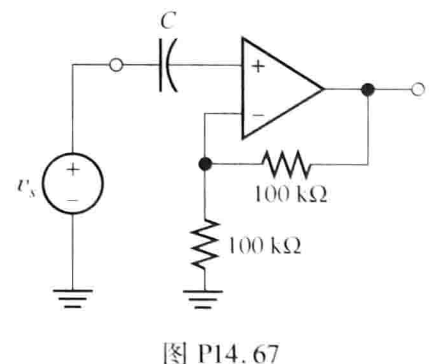


图 P14.67

14.8 节　差分放大器和仪用放大器

P14.69 以信号的差分和共模形式表达，差分放大器的函数为多少？

*P14.70 利用表 P14.36 中的组件设计一个单运放的差分放大器，其差分增益为 10。

P14.71　利用图 P14.34 精密仪用电路，重复习题 P14.70 的问题。

P14.72　如图 P14.34 所示为精密放大电路，若运放为理想的，$R_1 = 1\ \mathrm{k\Omega}$，$R_2 = 9\ \mathrm{k\Omega}$，$R = 10\ \mathrm{k\Omega}$，输入信号如下：

$$v_1(t) = 0.5\cos(2000\pi t) + 2\cos(120\pi t)$$
$$v_2(t) = -0.5\cos(2000\pi t) + 2\cos(120\pi t)$$

(a)求解差模输入信号和共模输入信号的表达式；(b)推导输出端电压 X_1 和 X_2 的表达式；(c)推导输出电压 v_o 的表达式。

14.9 节　积分器和微分器

P14.73　时间的积分是什么意思？

* P14.74　如图 P14.74 所示电路，若运放为理想的，试画出输出电压的波形图。有时，积分器也用作一个(简易)脉冲计数器。假设运放的输出电压为 -10 V，问：已经施加了多少个输入脉冲(假设其输入电压为 5 V，脉宽为 5 ms)至运算放大器？

* P14.75　如图 P14.75 所示电路，若运放为理想的，试画出输出电压的波形图。

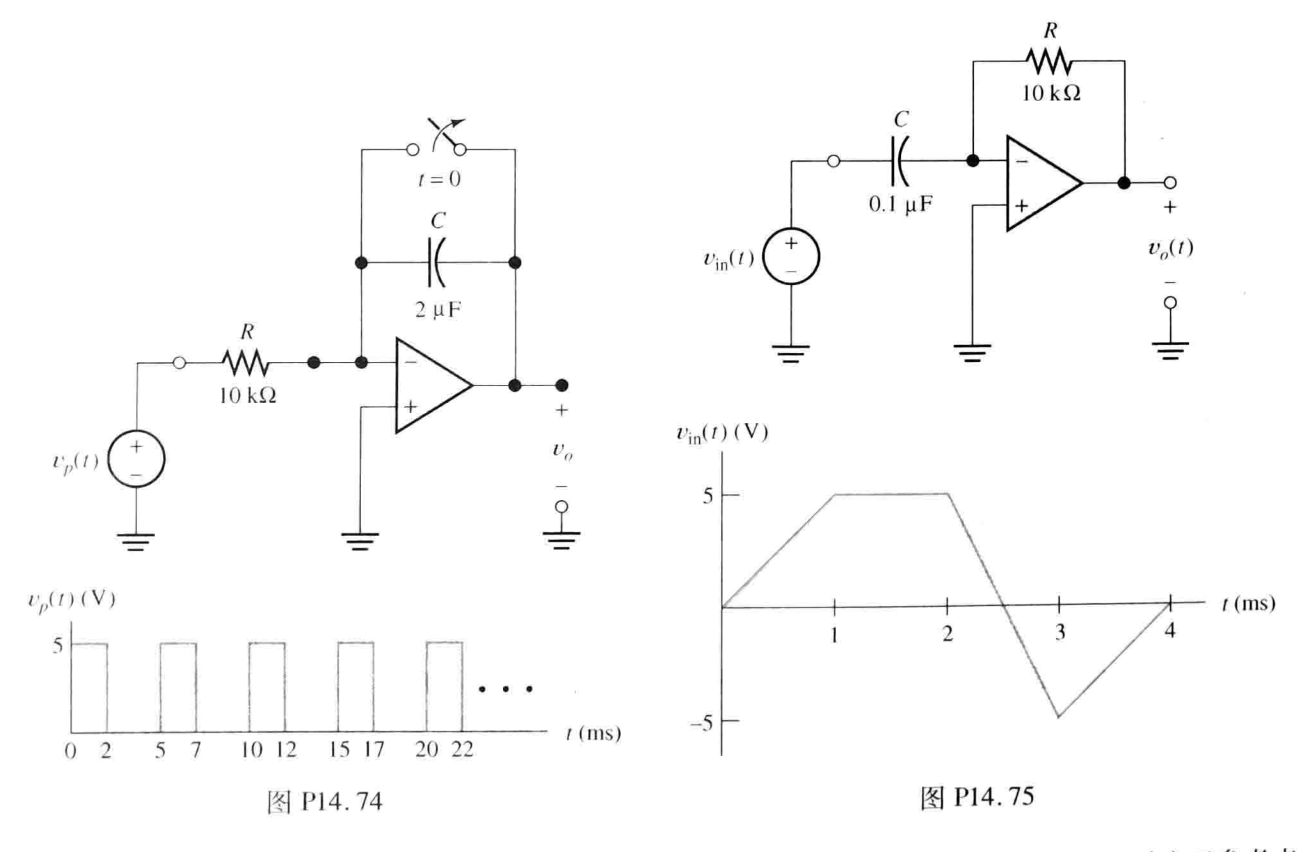


图 P14.74　　图 P14.75

P14.76　一个机器手在给定方向上的位移用电压 $v_{in}(t)$ 来表示。电压与位移成正比，1 V 对应于参考点 10 mm 的位移。设计一个电路，其产生的电压 $v_1(t)$ 正比于机器手的速度，1 V 对应 1 m/s。设计另一个电路，其产生的电压 $v_2(t)$ 正比于机器手的加速度，1 V 对应 1 m/s^2，使用表 P14.36 中所列的元件。

14.10 节　有源滤波器

P14.77　滤波器的函数指什么？滤波器有什么典型的应用？什么是有源滤波器？

* P14.78　推导如图 P14.78 所示电路电压传递比的表达式，同时画出其伯德图。假设运放是理想运放。

P14.79　阐明积分器可以被视为一个滤波器。推导如图 P14.74 所示的积分器的传递函数，画出其伯德图。

P14.80　如图 P14.75 所示的差分电路，重做习题 P14.79。

(a)

(b)

(c)

图 P14.78

测试题

这里有一组测试题，可以帮助你检查是否理解了本章的内容。答案在附录 E 中。完整的解决方法包括在学生资源文件之中。更多信息请参阅附录 F，以获取学生资源。

T14.1 绘制以下放大器的线路图。标明运算放大器输入端和任何需要的电阻。同时，给出图中的电阻描述的电压增益的表达式。(a)基本的反相器。(b)同相放大器。(c)电压跟随器。

T14.2 推导如图 T14.2 所示电路的电压增益 $A_v = v_o/v_{in}$ 的表达式，假设所有约束节点均被用到。(电路存在正面和负面的反馈路径，但电阻被精心挑选，所以电路只有负反馈和加法点约束还适用。)

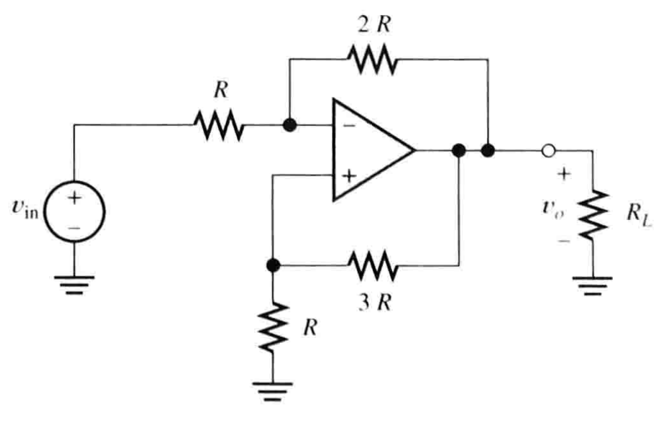


图 T14.2

T14.3　一个特定的运算放大器的开环直流增益为 $A_{0OL}=200\ 000$，开环 3 dB 的带宽为 $f_{BOL}=5$ Hz。这个运算放大器被用于闭环直流增益 $A_{0CL}=100$ 的同相放大器中。(a)确定闭环截止频率 f_{BCL}。(b)给定同相放大器的输入电压 $v_{in}(t)=0.05\cos(2\pi\times105t)$ V，给出输出电压的表达式。

T14.4　有一个运算放大器，最大输出电压范围为 $-4.5\sim+4.5$ V。最大的输出电流大小是5 mA。回转率限制是 SR = 20 V/μs。该运放应用于图 14.28 中的电路。(a)确定运算放大器的功率带宽。(b)当频率为 1 kHz 和 $R_L=200\ \Omega$ 时，最大输出电压 V_{om} 是否失真？(c)当确定频率1 kHz 和 $R_L=10\ \text{k}\Omega$ 时，最大输出电压 V_{om} 是否失真？(d)当频率为 5 MHz 和 $R_L=10\ \text{k}\Omega$ 时，最大输出电压 V_{om} 是否失真？

T14.5　画一个运算放大器的符号，包括补偿电压、补偿电流和偏置电流源。这些电源在运放电路中的主要影响是什么？

T14.6　用一个运放和需要的电阻绘制差分放大器电路图。以输入电压和阻抗表示输出电压。

T14.7　用一个运放和需要的电阻绘制积分放大器电路图。以输入电压和阻抗表示输出电压。

T14.8　什么是滤波器？什么是有源滤波器？给出一个有源滤波器的应用。

第 15 章　磁路和变压器

本章学习目标

- 理解磁场及其与运动电荷的相互作用
- 使用右手定则来确定载流导线或线圈周围磁场的方向
- 计算由磁场引起的移动电荷和载流导线的力
- 计算由线圈内磁通变化或导线穿过磁场引起的感应电压
- 利用楞次定律决定感应电压的极性
- 应用磁路的概念来确定实际设备的磁场
- 在给定的物理参数的条件下确定线圈的电感和互感
- 理解滞后、饱和度、铁损，以及诸如铁之类材料的涡流
- 理解理想变压器和处理包括变压器的电路
- 用实际电路的等效电路确定其规则和功率效率

本章介绍

在描述相互作用的时候，我们经常使用场的概念。例如，万物都被引力所吸引。我们设想一个物体产生的力场，然后通过这些场与其他物体产生相互作用。另一个例子是固定电荷。同性相斥，异性相吸。理论上讲，每个电荷产生电场，其他电荷与之相互作用，产生一个电场力。

在本章和接下来的两章，我们学习一些由移动电荷引起磁场的重要的工程应用。在磁场中移动电荷产生力。此外，改变磁场使在附近的导体产生电压。

在这一章，我们首先回顾基本的磁场概念。然后，考虑磁场和电感(包括互感)之间的关系。接下来，我们研究大大促进了电力分布的变压器。

磁场也构成了大多数将电能和机械能相互转化的实际设备的基础。在接下来的几章将讨论研究几种类型的旋转能量转换装置的基本工作原理，统称为电动机和发电机。

15.1　磁场

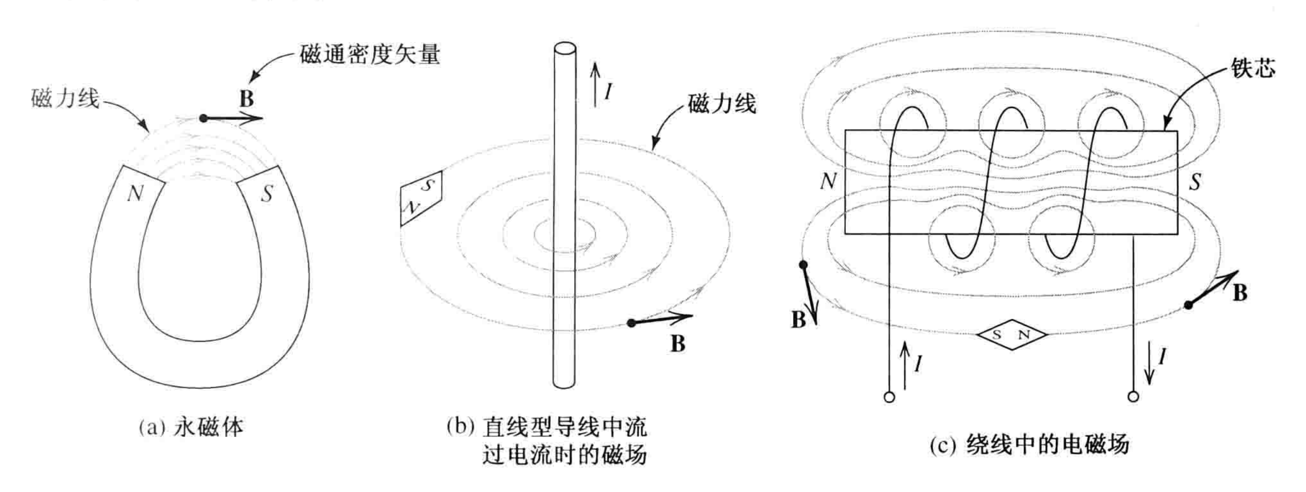
磁场存在于永磁体和载流导线周围的空间。在这两种情况下，磁场的来源都是电荷的运动。在一个永磁铁中，磁场由原子中电子的自旋产生。这些场相互作用，产生了我们观察到的外部磁场。(在大多数其他材料中，一个电荷的磁场倾向于终止另一个电荷的磁场。)如果一根载流导线绕成了一个多圈的线圈，其磁场将大大增强，特别是在线圈围绕着一个铁芯的情况下。

我们可以想象一个磁通形成的封闭的线性路径。这些磁力线更靠近磁场强的区域而远离磁场弱的区域，如图 15.1 所示。磁通的单位是韦伯(Wb)。

地球有一个自然磁场，但与典型的变压器、电动机或发电机中的磁场相比很弱。由于这些磁场的相互作用，磁铁往往沿着地球磁场的方向。因此，一个磁铁有北极(N)和南极(S)。异性磁极相互吸引。通常，磁力线离开 N 极进入 S 极。可以用指南针来确定磁力线的方向。指南针可以表明向北的磁通量(即指南针指向的相反方向就是磁铁的 S 极)。(注意到地球的磁力线是

从南到北的。因此，如果像在磁铁上那样把 N、S 标志在地球上，S 极将出现在地理上的北极，因为磁力线由此进入地球。）

在公式中，我们定义磁通密度为向量 **B**。（在我们的讨论中，用黑体表示向量。相应的细体的斜体符号代表向量的大小。因此，B 代表向量 **B** 的大小。我们也用黑体表示相量。读者可从上下文明确哪些是空间向量，哪些是相量。）此外，我们使用国际单位制（SI），其中，**B** 的单位是韦伯每平方米（Wb/m^2），相当于特斯拉（T）。这个通量密度向量的方向为磁力线的切线，如图 15.1 所示。

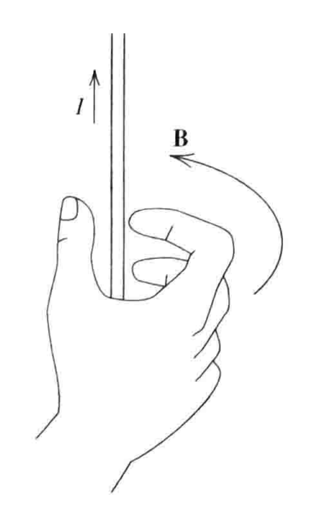


(a) 永磁体　(b) 直线型导线中流过电流时的磁场　(c) 绕线中的电磁场

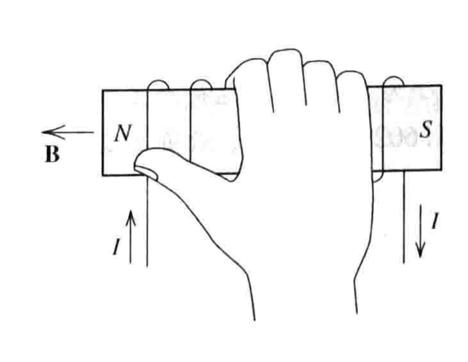
图 15.1　磁场可以等效为一个闭合路径的磁通线形式。通过指南针，我们可以判断磁场在任何情况下的方向。需要注意的是磁感应强度**B**和磁通线是相互垂直的

15.1.1　右手定则

由电流引起的磁场方向可以通过右手定则确定，以下有几点关于它的说明。例如，如图 15.2 所示，如果有一根导线，拇指指向电流方向，四指环绕导线指出的方向就是磁场方向。此外，如图 15.2(b)所示，如果四指围绕线圈的电流流动方向，大拇指指向的就是线圈产生的磁场方向。



(a) 如果有一根导线，拇指指向电流方向，则四指环绕导线指出的方向就是磁场方向



(b) 如果四指围绕线圈的电流流动方向，大拇指指向的就是线圈产生的磁场方向

图 15.2　右手定则

练习 15.1 一根朝北的平行于地面的带电导线(忽视地球的磁场)。(a)导线上方磁场的方向如何?(b)导线下方磁场的方向如何?

答案:(a)向西;(b)向东。

练习 15.2 一个线圈沿时钟外沿弯曲。如果电流顺时针流动,时钟表面中心的磁场 **B** 是什么方向?

答案:进入时钟表面。

15.1.2 磁场中运动电荷产生的力

电荷 q 以速度 **u** 通过磁场 **B**,将产生如图 15.3 所示的力 **f**。这个力可以由以下公式计算:

$$\mathbf{f} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \tag{15.1}$$

其中,× 代表向量穿过物体。注意穿过物体的定义,力的方向与磁通量 **B** 和速度 **u** 所在平面相垂直。进而,力的大小可以由如下公式得到:

$$f = quB\sin(\theta) \tag{15.2}$$

如图所示,其中,θ 为速度 **u** 和磁感应强度 **B** 的夹角。

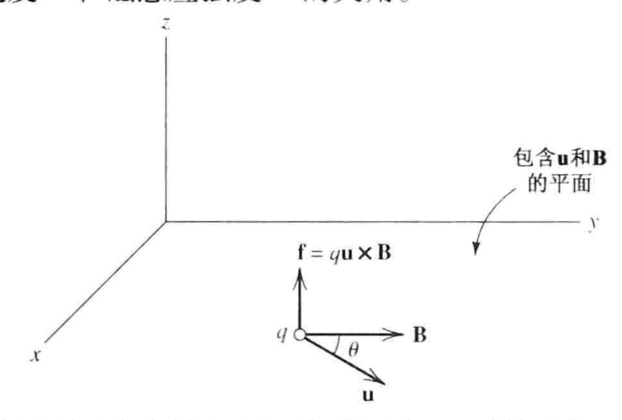


图 15.3 磁场中运动电荷所受到的磁场作用力跟移动的速度和磁感应强度有关

在国际单位制中,力向量 **f** 单位为牛顿(N),电荷单位是库仑(C),速度向量 **u** 的单位是米/秒(m/s)。因此,对于单位一致的式(15.1)和式(15.2),磁通密度 **B** 的单位必须以牛顿秒每库仑计(Ns/厘米),即等效于特斯拉(T)。

练习 15.3 一个电子($q = -1.602\times10^{-19}$ C),以 10^5 m/s 的速度沿正 x 轴方向运行。磁通密度是正 y 方向,大小为 1 T。计算电荷产生力的大小和方向。(假定为右坐标系统,如图 15.3 所示。)

答案:$f = 1.602\times10^{-14}$ N,沿负 z 方向。

15.1.3 载流导线产生的力

电流在由运动电荷(通常是电子)组成的导体中流动,于是力就出现在一个充满磁场的载流导线中。力在导线一小段增量上的大小为

$$\mathrm{d}\mathbf{f} = i\,\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{15.3}$$

其中,**l** 的方向与电流方向一致。对于一根长度为 l 的直导线和恒定磁场而言,有

$$f = ilB\sin(\theta) \tag{15.4}$$

其中,θ 是导线和磁场的夹角。注意,如果磁场的方向垂直于导线,力将最大。

练习 15.4　一根长度 $l=1\ \mathrm{m}$ 的导线携带垂直于磁场的 10 A 电流，$B=0.5\ \mathrm{T}$。计算导线上力的大小

答案：$f=5\ \mathrm{N}$。

15.1.4　磁通量和法拉第定律

流过一个表面积为 A 的磁通量是给定曲面的积分：

$$\phi=\int_A \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} \tag{15.5}$$

其中，d**A** 是表面的增量。d**A** 的方向垂直于表面。如果磁通量恒定且垂直于表面，则由式(15.5)可推出：

$$\phi=BA \tag{15.6}$$

我们认为磁通量由多匝线圈的表面所限定。如果线圈有 N 匝，那么总的磁链为

$$\lambda=N\phi \tag{15.7}$$

在这里，我们假设每一匝线圈有相同的磁通。这是一个在线圈绕铁芯联系很紧密时很好的假设，这种情况通常出现在变压器和电机中。

根据法拉第电磁感应定律，感应电压为

$$e=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} \tag{15.8}$$

该公式的使用条件为磁链正在变化。这有可能发生在磁场随时间变化或因为线圈与磁场有相对运动时。

楞次定律指出，极性的感应电压方向是这样的：电压将产生电流(通过一个外部阻力)，阻止原来磁链的变化。(假设感应电压作为一个电压源。)例如，假定磁场连接线圈，如图 15.4 所示，方向指向页面且不断增大。(这个磁场是由一个图中未显示的线圈或永磁铁产生的。)然后，线圈中的感应电压产生一个逆时针方向的电流。根据右手定则，这个电流产生的磁场方向为离开页面，与初始磁场的改变方向相反。

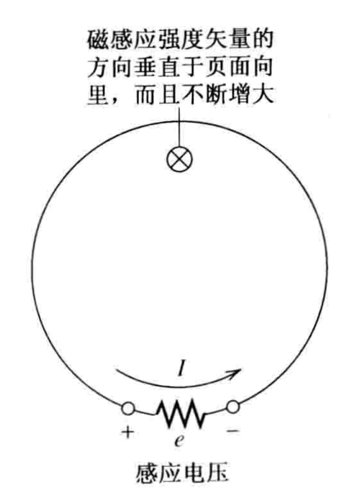


图 15.4　当链接线圈的磁通产生变化时，线圈中就会产生感应电动势，并且感应电动势的变化趋势为阻碍电压的变化

15.1.5　由导体切割磁场产生的电压

电压也由导体切割磁场产生。例如，如图 15.5 所示有一个指向页面的均匀磁场。滑动导体，固定将路径形成一个圈，该区域的大小 $A=lx$。磁链大小为

$$\lambda=BA=Blx$$

根据法拉第定律，线圈产生的感应电势为

$$e=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=Bl\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

同时，$u = dx/dt$ 为移动导体的速度，则

$$e = Blu \tag{15.9}$$

式(15.9)可以用来计算直导线在均匀磁场移动且速度已知并与磁场方向相互垂直时的感应电压。

例如，一个导体在典型的额定功率为 1 kW 的直流发电机中，其长度为0.2 m，速度为12 m/s，切割一个 0.5 T 的磁场。感应电压为 1.2 V。(如若许多段导体相连接，将产生更大的感应电压。)

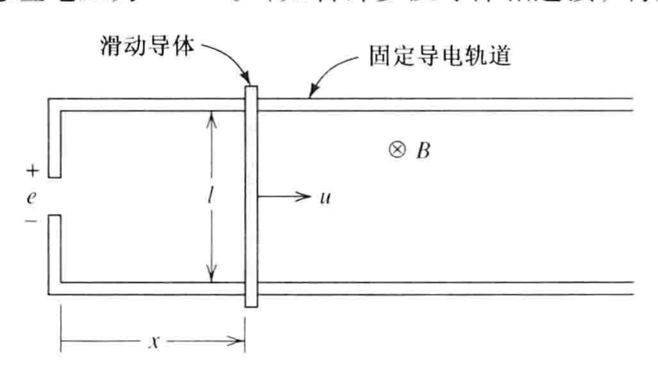


图 15.5 导体切割磁力线时产生感应电压

练习 15.5 (a)一个 10 匝的圆形线圈半径为 5 cm。磁通密度为 0.5 T 的磁场垂直于线圈平面。计算连接线圈的磁通量和磁链。(b)假设磁通量在 1 ms 内均匀减少到零。确定线圈中的感应电压。

答案: (a) $\phi = 3.927$ mWb, $\lambda = 39.27$ mWb; (b) $e = 39.27$ V。

15.1.6 磁场强度和安培定律

到目前为止，我们已经考虑了磁通密度 **B** 和它的影响。总结一下，**B** 在移动电荷和载流导体中将产生力。如果磁通量随时间变化，它还将在线圈中引起感应电压。此外，移动的导体切割磁感线时也产生感应电压。

现在，我们将介绍另一个场矢量(称为磁场强度 **H**)，并考虑如何建立磁场。一般来说，磁场在运动电荷中建立。在大多数我们考虑到的应用中，磁场是由线圈电流建立的。我们将看到，**H** 取决于电流和线圈的布置。此外，我们将会看到磁通密度 **B** 依赖于 **H**，以及填充线圈空间的材料的特性。

磁场强度 **H** 和磁通密度 **B** 的关系如下:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{15.10}$$

其中，μ 是材料的磁导率。**H** 的单位是安培每米(A/m)，μ 的单位是韦伯每安米(Wb/Am)。

对于真空，有

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/Am} \tag{15.11}$$

一些材料(最明显的是铁和某些稀土合金)有一个比真空磁导率高得多的磁导率。相对磁导率定义为其磁导率与真空磁导率的比值:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \tag{15.12}$$

对于铁和某些稀土合金，μ_r的取值范围从几百到 100 万不等。运用在典型的变压器、电动机和发电机中的铁，相对磁导率为几千。

安培定律指出磁场强度绕封闭路径的线积分等于电流流过该封闭路径区域的代数和，其方程形式为

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum i \tag{15.13}$$

这里，dl 是一个长度矢量元素，其方向为路径的切线方向。回想一下矢量点乘：

$$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H\, dl \cos(\theta) \tag{15.14}$$

其中，θ 是 **H** 和 **dl** 的夹角。

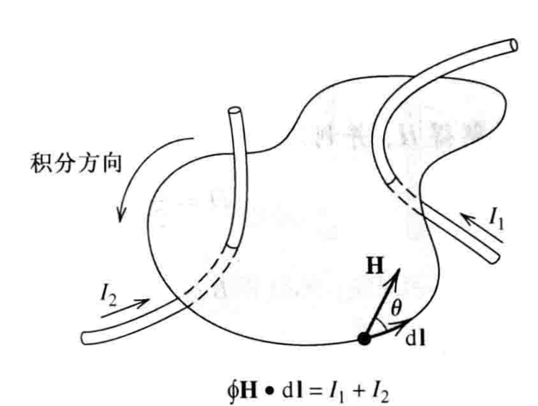


图 15.6　安培定律表明，磁场强度沿任一闭合路径的线积分等于这个范围内流过的电流总和

根据其参考方向，式(15.13)中的电流既可为正又可为负。如果电流的参考方向与右手定则方向一致，则它为正。(根据右手定则，如果把你的右手拇指放在导线指向的参考方向，其他四指环绕导线。)式(15.13)中的电流在相反方向将为负极性。安培定律可以通过图 15.6 所示的例子加以说明。在这种情况下，电流的参考方向与右手定则指出的方向一致。

如果磁场强度大小恒定，方向总是和路径上增量长度 dl 的方向相同，则安培定律可简化为

$$Hl = \sum i \tag{15.15}$$

其中 l 为路径长度。

在一些情况下，我们可以利用安培定律确定载流导线或线圈的磁场公式。

例 15.1　长直线的磁场。

考虑一根长直导线，其流过的电流 I 方向为离开[①]页面，如图 15.7 所示。给出导线周围磁场强度和磁通密度的表达式。假定导线周围材料的磁导率为 μ。

解：通过对称和右手定则，可以得出结论，**B** 和 **H** 位于一个垂直于导线的平面(即纸平面)，并与圆相切，导线位于圆环中心，如图 15.7 所示。此外，半径 r 给定时，H 是常数。对如图所示的圆环路径应用安培定律[式(15.15)]，则有

$$Hl = H2\pi r = I$$

计算磁场强度，得

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

利用式(15.10)得到磁通密度：

$$B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

图 15.7　考虑对称情况下，通电导线周围的磁场可用安培定律确定

例 15.2　环形铁芯中的磁通密度。

① 离开指向外，指向页面为向里。——译者注

考虑图 15.8 中的环形铁芯。依据匝数为 N，电流为 I，铁芯磁导率为 μ，以及物理尺寸数据。求出线圈中铁芯磁通密度 B 的表达式，然后，假设通过铁芯的磁通密度恒定(这是在 $R \gg r$ 情况下的近似)，给出总磁通量和磁链的表达式。

解：根据对称性，沿如图所示的虚线圆中心线的磁场强度为常数。(我们假设线圈对称地环绕整个环形铁芯。为了清晰起见，只有部分线圈在图中显示。)对虚线路径应用安培定律，可得

$$Hl = H2\pi R = NI$$

解得 H，并利用式(15.10)计算 B，则

$$H = \frac{NI}{2\pi R} \tag{15.16}$$

$$B = \frac{\mu NI}{2\pi R} \tag{15.17}$$

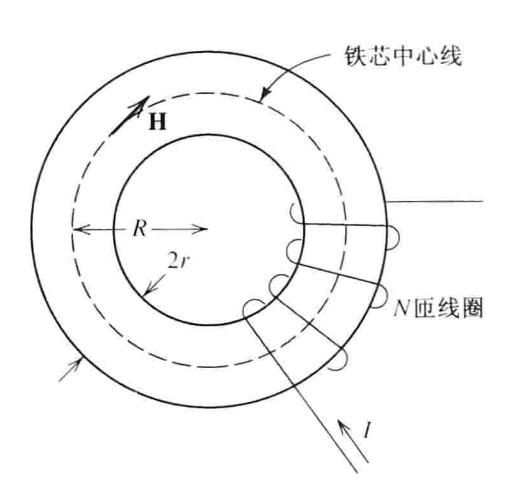


图 15.8 例 15.2、15.3 和 15.4 分析的环形线圈

假设 R 远远大于 r，磁通密度沿铁芯截面几乎恒定。然后，根据式(15.6)，磁通量等于磁通密度与区域的横截面的乘积：

$$\phi = BA = \frac{\mu NI}{2\pi R}\pi r^2 = \frac{\mu NIr^2}{2R} \tag{15.18}$$

最终，得到线圈的磁链：

$$\lambda = N\phi = \frac{\mu N^2 Ir^2}{2R} \tag{15.19}$$

例 15.3 环形铁芯的磁通量和磁链。

假设有一个 $\mu_r = 5000$，$R = 10$ cm，$r = 2$ cm 以及 $N = 100$ 的环形铁芯，电流为

$$i(t) = 2\sin(200\pi t)$$

计算磁通量和磁链。然后利用法拉第定律确定线圈的感应电压。

解：首先，铁芯材料的磁导率为

$$\mu = \mu_r \mu_0 = 5000 \times 4\pi \times 10^{-7}$$

利用式(15.18)，计算得到磁通量为

$$\phi = \frac{\mu NIr^2}{2R} = \frac{5000 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 100 \times 2\sin(200\pi t) \times (2 \times 10^{-2})^2}{2 \times 10 \times 10^{-2}}$$
$$= (2.513 \times 10^{-3})\sin(200\pi t) \text{ 韦伯}$$

磁链为

$$\lambda = N\phi$$
$$= 100 \times (2.513 \times 10^{-3})\sin(200\pi t)$$
$$= 0.2513\sin(200\pi t) \text{ 韦伯}$$

最后，利用法拉第定律[式(15.8)]，可以得到线圈的感应电压：

$$e = \frac{d\lambda}{dt} = 0.2513 \times 200\pi\cos(200\pi t)$$
$$= 157.9\cos(200\pi t) \text{ V}$$

练习 15.6 长直导线周围空气的 $\mu_r \approx 1$，其电流为 20 A。计算距导线 1 cm 处的磁通密度。
答案：4×10^{-4} T。

练习 15.7 图 15.9 显示了两根载有大小相等、方向相反电流的导线，计算如图所示所有

路径的下列值：

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

答案：路径 1，10 A；路径 2，0 A；路径 3，－10 A。

练习 15.8　如图 15.9 所示，导线长度为 1 m，间距为 10 cm，给出力的大小，并判断这个力是引力还是斥力？

答案：$f = 2 \times 10^{-4}$ N；斥力。

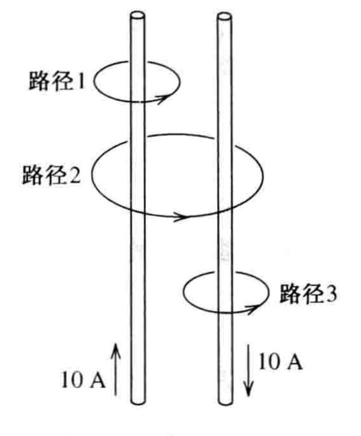


图 15.9　参见练习 15.7 和练习 15.8

15.2　磁路

我们将看到，许多有用的设备(如变压器、电动机和发电机)包含铁芯。在本节中，我们将学习如何计算这些设备中的磁场。一个简单的例子如前一节所述，如图 15.8 和例 15.2 中的环形线圈。这个圆环面拥有足够的对称性，我们很容易利用安培定律来找到磁场强度的表达式。然而，在许多工程应用中，我们需要分析更多复杂的结构(如不对称铁芯和多线圈铁芯)，直接应用安培定律是不可行的。相反，我们可以利用磁路的概念，这与分析电路相类似。

一个 N 匝载流线圈的磁动势(mmf)如下：

$$\mathcal{F} = Ni \tag{15.20}$$

载流线圈在磁路中类似于电路中的电压源，磁动势类似于电源电压。通常，我们定义磁动势的单位为 A · 匝。然而，匝数实际上是一个纯粹的数字而没有物理单位。

如图 15.10 给出的铁棒所示，磁阻为

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A} \tag{15.21}$$

其中 l 是路径的长度(沿着磁通的方向)，A 是截面面积，μ 是材料的磁导率。磁阻类似于电路中的电阻。当铁棒不直的时候，路径的长度不确定，我们沿着中心线估计其长度。因此，l 有时被称为路径的平均长度。

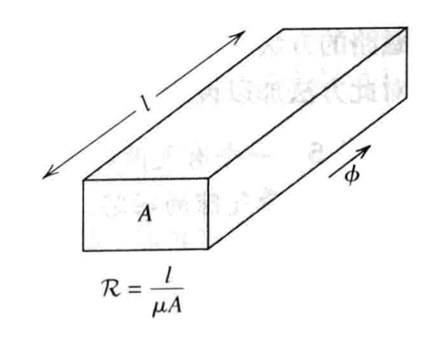


图 15.10　磁阻与平均长度 l，截面面积 A 和磁导率 μ 有关

磁通 ϕ 在磁路中类似于电路中的电流。磁通、磁阻和磁动势的相互关系如下：

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}\phi \tag{15.22}$$

这与欧姆定律($V = Ri$)相对应，磁阻的单位为 A · 匝/Wb。

例 15.4　环形线圈的等效磁路。

利用磁路的概念，分析如图 15.8 所示的环形线圈，给出磁通的表达式。

解：如图 15.11 所示，环形线圈的磁路类似于一个电阻与电压源组成的简单电路。

磁路的平均长度为

$$l = 2\pi R$$

线圈截面半径为 r。因此，截面面积为

$$A = \pi r^2$$

代入式(15.21)，磁阻为

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A} = \frac{2\pi R}{\mu \pi r^2} = \frac{2R}{\mu r^2}$$

磁动势为

$$\mathcal{F} = NI$$

求解关于磁通量的式(15.22)，得到

$$\phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}}$$

代入之前 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{R}$ 的表达式，则

$$\phi = \frac{\mu N r^2 I}{2R}$$

这与在例 15.2 和例 15.3 中通过应用安培定律得到的表达式一样。

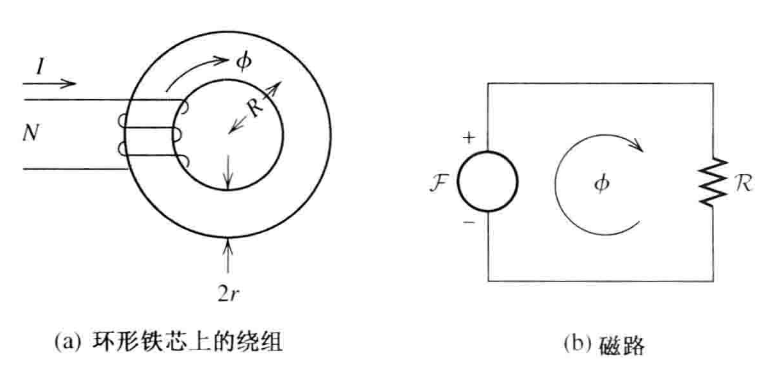


图 15.11 环形绕组上的磁路

15.2.1 利用磁路方法的优点

利用磁路方法的优点是：磁路的方法可以应用于不对称的多线圈带磁性铁芯。线圈是磁动势的来源，正如电路中的电压源一样。磁阻可以像电阻那样串联或并联。磁通量类似于电流。利用磁路的方法不能准确地测定磁场，但这对许多工程应用来说已经足够准确。我们将用几个例子对此方法加以说明。

例 15.5 一个有气隙的磁路。

考虑一个带气隙的磁芯，如图 15.12(a)所示。铁芯材料的磁导率为 6000，而且有一个边长为2 cm 和 3 cm 矩形截面。线圈有 500 匝。要使气隙中磁通密度 $B_{gap} = 0.25$ T，确定电流。

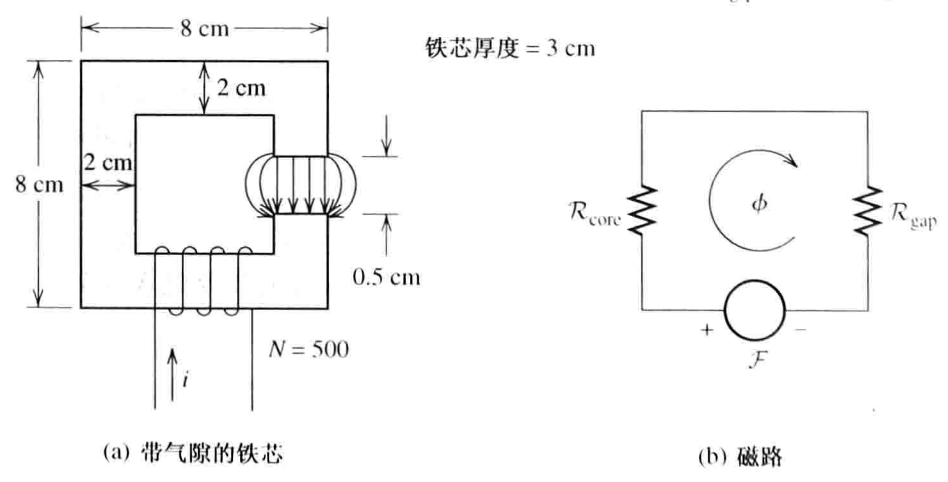


图 15.12 例 15.5 的磁路

解： 如图 15.12(b)所示，这种磁路类似于一个电压源和两个电阻串联的电路。首先，我们计算铁芯的磁阻。注意，磁通量路径的中心是一个边长为 6 cm 的正方形。因此，铁芯的平均长度为

$$l_{core} = 4 \times 6 - 0.5 = 23.5 \text{ cm}$$

铁芯截面面积为

$$A_{core} = 2 \text{ cm } \times 3 \text{ cm } = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

铁芯磁导率为

$$\mu_{core} = \mu_r \mu_0 = 6000 \times 4\pi \times 10^{-7} = 7.540 \times 10^{-3}$$

于是，铁芯磁阻为

$$\mathcal{R}_{core} = \frac{l_{core}}{\mu_{core} A_{core}} = \frac{23.5 \times 10^{-2}}{7.540 \times 10^{-3} \times 6 \times 10^{-4}}$$
$$= 5.195 \times 10^4 \text{ A·匝/Wb}$$

现在计算气隙的磁阻，如图 15.12(a)所示，磁力线趋于离开气隙，这被称为边缘场。因此，气隙的有效面积大于铁芯截面。通常我们考虑增加气隙截面的面积。因此，气隙的有效面积为

$$A_{gap} = (2 \text{ cm } + 0.5 \text{ cm}) \times (3 \text{ cm } + 0.5 \text{ cm}) = 8.75 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

空气磁导率近似于真空：

$$\mu_{gap} \approx \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

于是，气隙磁阻为

$$\mathcal{R}_{gap} = \frac{l_{gap}}{\mu_{gap} A_{gap}} = \frac{0.5 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \times 8.75 \times 10^{-4}}$$
$$= 4.547 \times 10^6 \text{ A·匝/Wb}$$

总的磁阻等于气隙磁阻与铁芯磁阻之和：

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{gap} + \mathcal{R}_{core} = 4.547 \times 10^6 + 5.195 \times 10^4 = 4.600 \times 10^6$$

虽然气隙比铁芯短很多，但气隙的磁阻却比铁芯磁阻大，这是因为其磁导率远大于铁芯磁导率。大部分磁动势降落在气隙上(这类似于电压大部分降落在串联电路的最大电阻上)。

现在，可以计算磁通量：

$$\phi = B_{gap} A_{gap} = 0.25 \times 8.75 \times 10^{-4} = 2.188 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

铁芯磁通量与气隙相等。然而，铁芯中的磁通密度却更大，这是因为其面积更小。磁动势为

$$\mathcal{F} = \phi \mathcal{R} = 4.600 \times 10^6 \times 2.188 \times 10^{-4} = 1006 \text{ A·匝}$$

根据式(15.20)，可以得到

$$\mathcal{F} = Ni$$

解出电流并代入数值，则

$$i = \frac{\mathcal{F}}{N} = \frac{1006}{500} = 2.012 \text{ A}$$

例 15.6　一个带串/并联磁阻的磁路。

铁芯如图 15.13(a)所示，截面为 2 cm×2 cm，相对磁导率为 1000。线圈有 500 匝，电流为2 A。

计算每一个气隙的磁通密度。

解： 磁路如图 15.13(b)所示。首先，我们计算 3 个路径的磁阻。对于中心路径，有

$$\mathcal{R}_c = \frac{l_c}{\mu_r\mu_0 A_{\text{core}}} = \frac{10\times10^{-2}}{1000\times4\pi\times10^{-7}\times4\times10^{-4}}$$
$$= 1.989\times10^5\ \text{A·匝/Wb}$$

对于左边的路径，总磁阻等于铁芯与气隙 a 的磁阻之和。在估算气隙的面积时，我们通过增加其宽度和深度来考虑其边缘情况。于是气隙 a 等效于 $A_a = 3\ \text{cm}\times3\ \text{cm} = 9\times10^{-4}\ \text{m}^2$。因此，左边路径的总磁阻为

$$\mathcal{R}_a = \mathcal{R}_{\text{gap}} + \mathcal{R}_{\text{core}}$$
$$= \frac{l_{\text{gap}}}{\mu_0 A_a} + \frac{l_{\text{core}}}{\mu_r\mu_0 A_{\text{core}}}$$
$$= \frac{1\times10^{-2}}{4\pi\times10^{-7}\times9\times10^{-4}} + \frac{29\times10^{-2}}{1000\times4\pi\times10^{-7}\times4\times10^{-4}}$$
$$= 8.842\times10^6 + 5.769\times10^5$$
$$= 9.420\times10^6\ \text{A·匝/Wb}$$

类似地，右边路径的总磁阻为

$$\mathcal{R}_b = \mathcal{R}_{\text{gap}} + \mathcal{R}_{\text{core}}$$
$$= \frac{l_{\text{gap}}}{\mu_0 A_b} + \frac{l_{\text{core}}}{\mu_r\mu_0 A_{\text{core}}}$$
$$= \frac{0.5\times10^{-2}}{4\pi\times10^{-7}\times6.25\times10^{-4}} + \frac{29.5\times10^{-2}}{1000\times4\pi\times10^{-7}\times4\times10^{-4}}$$
$$= 6.366\times10^6 + 5.869\times10^5$$
$$= 6.953\times10^6\ \text{A·匝/Wb}$$

接下来，考虑 $\mathcal{R}_a$ 和 $\mathcal{R}_b$ 的并联。于是总磁阻 $\mathcal{R}_c$ 为

$$\mathcal{R}_{\text{total}} = \mathcal{R}_c + \frac{1}{1/\mathcal{R}_a + 1/\mathcal{R}_b}$$
$$= 1.989\times10^5 + \frac{1}{1/(9.420\times10^6) + 1/(6.953\times10^6)}$$
$$= 4.199\times10^6\ \text{A·匝/Wb}$$

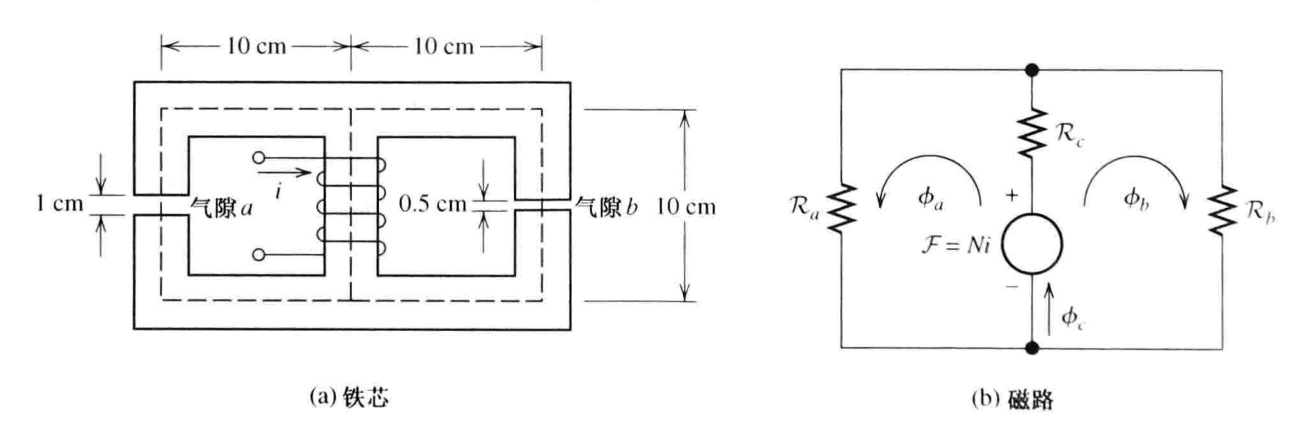


图 15.13 例 15.6 的磁路

现在，线圈中心的磁通量可以用磁动势除以总磁阻得到：

$$\phi_c = \frac{Ni}{\mathcal{R}_{\text{total}}} = \frac{500\times2}{4.199\times10^6} = 238.1\ \mu\text{Wb}$$

磁通量类似于电流。于是利用分流定律可分别确定左边路径和右边路径的磁通量。

$$\phi_a = \phi_c \frac{\mathcal{R}_b}{\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_b}$$

$$= 238.1 \times 10^{-6} \times \frac{6.953 \times 10^6}{6.953 \times 10^6 + 9.420 \times 10^6}$$

$$= 101.1\ \mu\text{Wb}$$

类似地，对于气隙 b 有

$$\phi_b = \phi_c \frac{\mathcal{R}_a}{\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_b}$$

$$= 238.1 \times 10^{-6} \frac{9.420 \times 10^6}{6.953 \times 10^6 + 9.420 \times 10^6}$$

$$= 137.0\ \mu\text{Wb}$$

可以利用 $\phi_c = \phi_a + \phi_b$ 对之前的计算加以检验。

现在，可以利用磁通量除以面积得到磁通密度：

$$B_a = \frac{\phi_a}{A_a} = \frac{101.1\ \mu\text{Wb}}{9 \times 10^{-4}\ \text{m}^2} = 0.1123\ \text{T}$$

$$B_b = \frac{\phi_b}{A_b} = \frac{137.0\ \mu\text{Wb}}{6.25 \times 10^{-4}\ \text{m}^2} = 0.2192\ \text{T}$$

通常，我们发现磁路由铁芯与气隙组成。铁芯的磁阻对结果的影响微乎其微。此外，我们通常得不到铁芯精确的磁导率。因此，假设铁芯磁导率为零的情况下，所进行的计算也常常足够精确了。这与电路中假设导线的电阻为零相对应。

练习 15.9　考虑如图 15.14 所示的磁路。确定电流 i，使气隙中的磁场强度为 0.5 T。

答案：$i = 4.03$ A。

练习 15.10　假设铁芯磁阻为零重复例 15.6。确定该例中磁通密度的百分比误差。

答案：$\phi_a = 113.1\ \mu\text{Wb}$，$B_a = 0.1257$ T，百分比误差为 11.9%；$\phi_b = 157.1\ \mu\text{Wb}$，$B_b = 0.2513$ T，百分比误差为 14.66%。

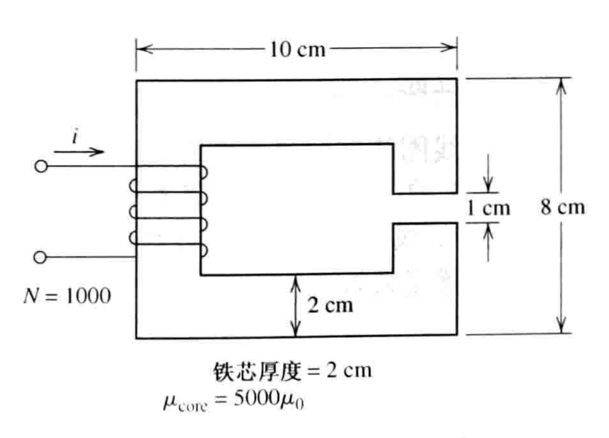


图 15.14　练习 15.9 的磁路

15.3　电感和互感

我们已经知道当一个线圈携带电流时，线圈中将产生磁通量。如果电流随时间变化，则磁通量也会发生变化。这是我们在 3.4 节中介绍的电感的物理基础。

下面介绍电感与线圈的物理参数之间的关系。

假设一个带电流 i 的线圈产生了 ϕ 的磁通量。电感可以定义为磁链除以电流：

$$L = \frac{\lambda}{i} \tag{15.23}$$

假设线圈中的磁通无泄漏，可以得到磁链 $\phi = Ni/\mathcal{R}$，则

$$L = \frac{N\phi}{i} \tag{15.24}$$

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} \tag{15.25}$$

于是，我们可以看出电感取决于线圈匝数、铁芯尺寸及铁芯材料。注意，电感与线圈匝数成正比。

根据法拉第定律，当磁链变化时产生的感应电压为

$$e = \frac{d\lambda}{dt} \tag{15.26}$$

联系式(15.23)，可得到$\lambda = Li$，替换式(15.26)中的λ，得

$$e = \frac{d(Li)}{dt} \tag{15.27}$$

对于绕在固定铁芯的线圈而言，电感恒定，式(15.27)可简化为

$$e = L\frac{di}{dt} \tag{15.28}$$

当然，这个方程与电压和电流有关，我们在第3~6章的分析中已经用到。

例15.7 电感的计算。

确定图15.12中500匝线圈的电感，分析见例15.5。

解： 在例15.5中，我们计算磁路的磁阻为

$$\mathcal{R} = 4.600 \times 10^6 \text{ A·匝/Wb}$$

代入式(15.25)，得

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{500^2}{4.6 \times 10^6} = 54.35 \text{ mH}$$

15.3.1 互感

若两个线圈绕在同一个铁芯上，一个线圈产生的磁通量链接到另一个线圈。我们将线圈2中由线圈1的电流产生的磁链表示为λ_{21}。相应地，线圈1中由其自身电流产生的磁链表示为λ_{11}。同样，线圈2中的电流在线圈2中产生的磁链为λ_{22}，在线圈1中产生的磁链为λ_{12}。

线圈自感定义为

$$L_1 = \frac{\lambda_{11}}{i_1} \tag{15.29}$$

$$L_2 = \frac{\lambda_{22}}{i_2} \tag{15.30}$$

两个线圈之间的互感为

$$M = \frac{\lambda_{21}}{i_1} = \frac{\lambda_{12}}{i_2} \tag{15.31}$$

两个线圈的总磁链为

$$\lambda_1 = \lambda_{11} \pm \lambda_{12} \tag{15.32}$$

$$\lambda_2 = \pm\lambda_{21} + \lambda_{22} \tag{15.33}$$

其中，磁通相互增强取“+”号；磁通相反削弱取“-”号。

15.3.2 同名端

同名端是一种标准规则，在每个线圈上分别标上一个点，以此确定磁通量的相互关系。

例如，如图 15.15 所示，通过标注了该点后，能够使流入同名端的电流产生相互增强的磁通。注意(根据右手定则)电流进入任一同名端产生的磁通量是沿线圈顺时针方向的。

因此，如果两个电流同时输入(或者同时离开)同名端，互磁链将增强自磁链。另一方面，如果一个电流进入同名端而另一个电流离开同名端，互磁链将削弱自磁链。

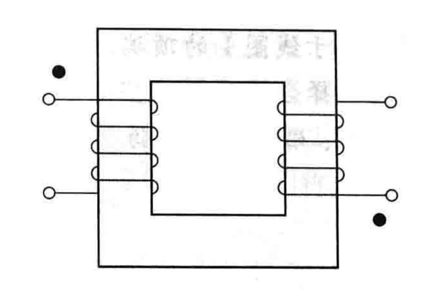


图 15.15　根据约定，流入同名端的电流产生相互增强的磁通

15.3.3　互感的电路等式

求解关于磁通量的式(15.29)~式(15.31)，代入式(15.32)和式(15.33)，可得

$$\lambda_1 = L_1 i_1 \pm M i_2 \tag{15.34}$$

$$\lambda_2 = \pm M i_1 + L_2 i_2 \tag{15.35}$$

应用法拉第电磁感应定律得到线圈的感应电压：

$$e_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \tag{15.36}$$

$$e_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \tag{15.37}$$

这里再一次假设线圈和铁芯固定，因此电感恒定，不随时间变化。这些是用于分析含互感电路的基本关系式。

例 15.8　计算电感和互感。

如图 15.16 所示，两个线圈绕在一个环形铁芯上。铁芯的磁阻为 10^7 A · 匝/Wb，确定线圈的自感和互感。假设磁通全限制在铁芯中，所以全部磁通链接两个线圈。

解： 自感可以通过计算式(15.25)得到。对线圈 1 有

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} = \frac{100^2}{10^7} = 1 \text{ mH}$$

类似地，对于线圈 2 有

$$L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}} = \frac{200^2}{10^7} = 4 \text{ mH}$$

为了计算互感，我们用磁通量除以 i_1：

$$\phi_1 = \frac{N_1 i_1}{\mathcal{R}} = \frac{100 i_1}{10^7} = 10^{-5} i_1$$

线圈 1 在线圈 2 中产生的磁链为

$$\lambda_{21} = N_2 \phi_1 = 200 \times 10^{-5} i_1$$

最终，得到互感为

$$M = \frac{\lambda_{21}}{i_1} = 2 \text{ mH}$$

练习 15.11　计算例 15.8 中的互感，其中互感系数 $M = \lambda_{12}/i_2$。

答案： $M = 2$ mH。注意，$M = \lambda_{21}/i_1$ 与 $M = \lambda_{12}/i_2$ 相等。

练习 15.12　在图 15.16 中，由 i_2 产生的磁通对 i_1 产生的磁通是增强还是削弱？如果一个

同名端位于线圈 1 的顶端，另一个同名端应位于线圈 2 的哪一端？写出 e_1 和 e_2 的表达式，注意为互感选择合适的极性。

答案： 磁通相互削弱。该同名端应位于线圈 2 的底部。所以正确的表达式为

$$e_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}, \qquad e_2 = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

练习 15.13 对于图 15.17 所示的线圈，3 条路径在 a，b 两点间的磁阻相等：

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_3 = 10^6\ (\text{A}\cdot\text{匝})/\text{Wb}$$

假设所有磁通都限制在铁芯中。(a)在路径 1，2，3 上 i_1 和 i_2 相互增强还是削弱？(b)确定 L_1，L_2 和 M 的值。(c)互感产生的电压(在式(15.36)和式(15.37)中)为正还是为负？

答案：(a)在路径 1 和路径 2 上磁通相互增强，在路径 3 上相互削弱，同名端应该位于线圈 2 的顶部。(b)$L_1 = 6.667$ mH，$L_2 = 60$ mH，$M = 10$ mH。(c)正极性。

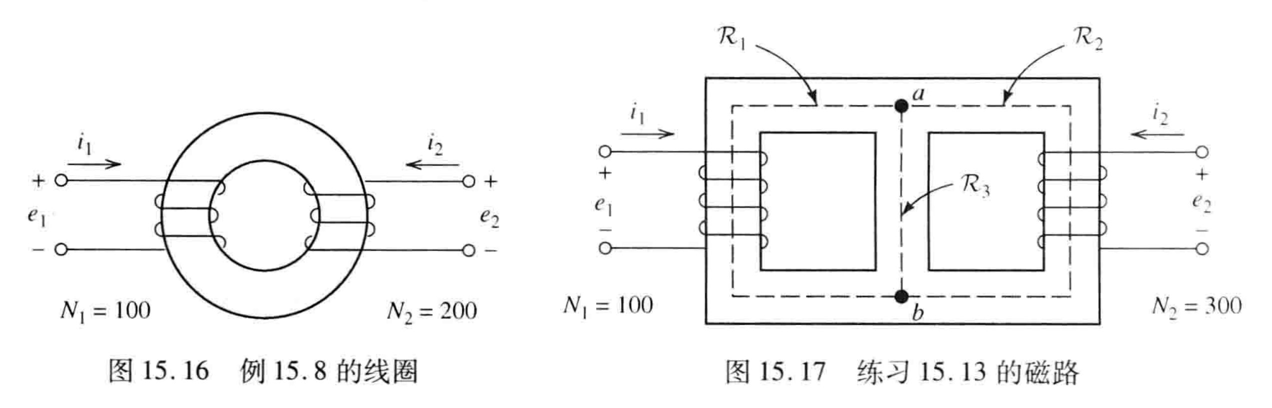


图 15.16 例 15.8 的线圈

图 15.17 练习 15.13 的磁路

15.4 磁性材料

迄今为止，我们已经假定 B 和 H 呈线性关系(即 $B = \mu H$)。实际上，对于应用在电动机、永磁铁和变压器中的铁合金而言，B 和 H 不是线性关系。

图 15.18(a)所示的一个线圈将磁场强度 H 施加到铁样品之上。假设一开始铁样品没有磁化。如果以微观的角度来观察材料，我们可以看到，原子的磁场在小区域内是一致的。然而，磁场方向在不同区域却是随机的，于是外部宏观磁场为零。这一点如图 15.18(b)所示。

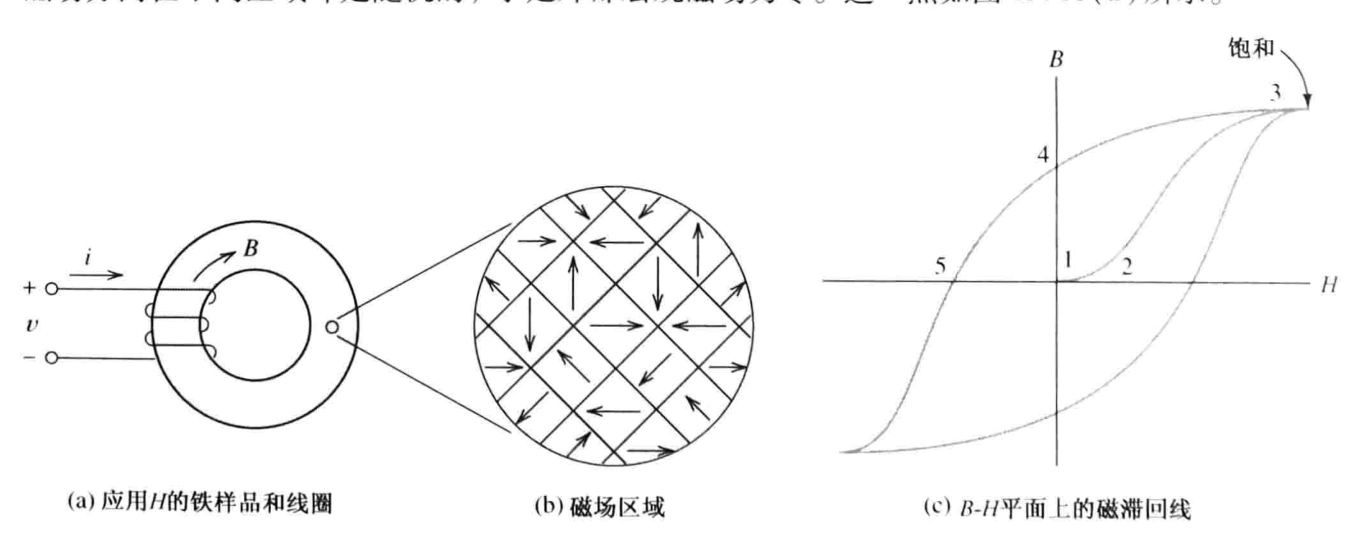


图 15.18 B-H 滞后和饱和度的关系曲线

图 15.18(c)所示为一个 B-H 图。在点 1，B 和 H 都是零。随着给线圈提供电流，H 增大，

各区域的磁场趋向于施加场方向一致。一开始(从点 1 到点 2)，这是一个可逆过程，如果施加的场减小到零，磁场区域将回到其最初的随机取向。然而，如果施加更大的磁场强度，磁域将与施加的场一致，这将导致即使施加的场减小到零，各磁域也会保持一致性(从点 2 到点 3)。最终，对于足够高的场强，所有磁域将与施加的场一致以及 B-H 曲线接近 μ_0。我们称之为材料饱和。对于典型的铁芯材料，饱和发生在 B 从 1 T 到 2 T 的范围。

如果从点 3 开始，施加的磁场 H 减小到零，铁芯将保持一个剩余的磁通密度 B(点 4)。这是因为磁域方向继续指向原来由施加磁场强加的方向。如果 H 沿相反方向继续增加，B 将减小到零(点 5)。最终，相反方向的饱和也会发生。如果一个交流电流施加于线圈，磁滞回线将出现在 B-H 平面上。

15.4.1　能源考虑

现在考虑如图 15.18(a)所示线圈的能量传递情况。我们假设线圈电阻为零。随着电流的增加，增加的磁感应强度将引起一个感应电压，从而导致能量流进线圈。进入线圈的能源 W 是功率的积分。因此得到：

$$W=\int_0^t vi\,\mathrm{d}t=\int_0^t N\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}i\,\mathrm{d}t=\int_0^\phi Ni\,\mathrm{d}\phi \tag{15.38}$$

这里，$Ni=Hl$，$\mathrm{d}\phi=A\mathrm{d}B$，$l$ 为平均路径长度，A 是截面面积。将式(15.38)右边进行替换：

$$W=\int_0^B AlH\,\mathrm{d}B \tag{15.39}$$

同时，截面面积 A 与 l 的乘积等于铁芯的体积。式(15.39)两端除以 Al 可得：

$$W_v=\frac{W}{Al}=\int_0^B H\,\mathrm{d}B \tag{15.40}$$

这里，W_v 代表铁芯每单位体积的能量。如图 15.19 所示，单位体积能量就是 B-H 曲线与 B 轴之间的区域面积。当 H 减小到 0 时，部分能量返还到线圈电路，部分能量存储在剩余的磁场中，另一部分能量在铁芯磁化过程中转化为了热量。

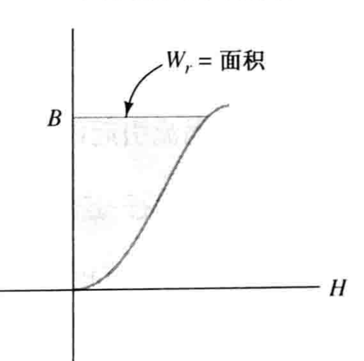


图 15.19　B-H 曲线和 B 轴间的面积表示提供给铁芯的单位体积能量

15.4.2　铁芯损耗

当交流电流施加到一个有铁芯的线圈中时，更多的能量在每个周期进入到线圈而不是返回给电路。部分能量在磁域方向改变过程中发热消耗掉了。这与我们不断弯曲一块金属而产生的热量相似。这个体积能量每个周期转换成的热量等于磁滞回线的面积，如图 15.20 所示。这种能量损失称为铁芯损耗。由于每个周期发热损失的能量固定，因此磁滞的功率损耗与频率成正比。

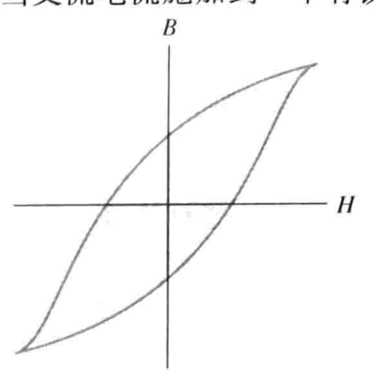


图 15.20　磁滞回线的面积为转换为每个周期能量的体积能量

在电动机、发电机、变压器中，能量转换成热量是不可取的。因此，我们将选择一个有窄磁滞回线的合金，如图 15.21(a)所示。另一方面，对于一个永磁铁，我们会选择一个有大剩磁的材料，如图 15.21(b)所示。

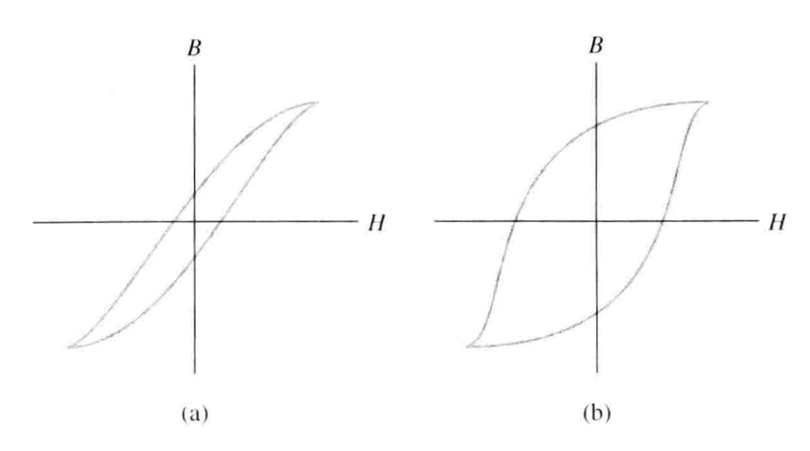


图 15.21 当想使铁芯损耗最小时(在变压器和电机中),选择具有窄磁滞回线 的材料;另一方面,对于永磁体,应该选择具有宽磁滞回线材料

15.4.3 涡流损耗

除了磁滞,在交流情况下,还有另一种现象导致铁芯损耗。首先,让我们考虑一个固态铁芯。当然,铁芯本身是一个导体,如同线圈匝间短路一样。随着磁场的变化,铁芯中会产生感应电压,从而产生电流,称为涡流,它在铁芯材料中环流。因此,铁芯中能量损耗为 $P = v^2/R$。

降低涡流损耗可以采用相互绝缘的薄片叠成铁芯的方案。选择薄片的方向以中断涡流,因此,对涡流阻碍越大,损耗就越小。另一种方法是采用绝缘黏合剂将铁粉制成铁芯。

对于在给定磁通密度峰值下的运行情况,线圈中的感应电压与频率成正比(因为法拉第定律)。因此,涡流引起能量损耗与频率的平方成正比(因为 $P = v^2/R$)。

15.4.4 存储在磁场中的能量

尽管许多铁芯材料没有线性的 B-H 磁化特性,我们也经常假设 $B = \mu H$ 来执行初始设计。铁芯材料的性质通常不能准确地知道,所以电动机或变压器设计的计算是近似的。只要铁芯低于饱和水平运行,这个线性近似就很方便且足够精确。

将 $H = B/\mu$ 代入方程(15.40)并整理,可得

$$W_v = \int_0^B \frac{B}{\mu}\,\mathrm{d}B = \frac{B^2}{2\mu} \tag{15.41}$$

注意到一旦磁通密度给定,磁场中体积能量密度就与磁导率成反比。

在有空气间隙的磁路中,铁芯和空气隙中的磁通密度大致相同。(由于边缘效应,铁芯中磁通密度稍小于气隙中)。铁芯中磁导率远远大于空气中(上千倍或更多)。因此,气隙的体积能量远远高于铁芯。在一个由铁芯和大量气隙组成的磁路中,几乎所有的存储能量都驻留在气隙中。

练习 15.14 考查一个绕在铁芯上的线圈。通以 60 Hz 的交流电,铁芯材料的磁滞回线区域面积为 40 J/m^3。铁芯的体积是 200 cm^3。计算因为磁滞引起的热能。

答案: 0.48 W。

练习 15.15 固定铁芯有一个气隙,有效面积为 2 cm × 3 cm,长 0.5 cm。磁动势是 1000 安培·匝,铁的磁阻可忽略不计。计算磁通密度和存储在气隙中的能量。

答案: $B = 0.2513$ T,$W = 0.0754$ J。

15.5　理想变压器

变压器通常由若干线圈绕在一个铁芯上，铁芯通常由叠片铁组成(减少涡流损失)。我们将介绍，变压器可以用来调整交流电压的值。一个电压可以通过变压器增大。例如，2400 V 可以升到 48 kV。变压器也可以用来降低电压，比如从 2400 V 降到 240 V。

变压器在电力分配中应用广泛。在电能的远距离中(比如从水力发电站到一个遥远的城市)，应该使用相对大的电压，一般数百千伏。回想一下交流电源的功率：

$$P = V_{\mathrm{rms}} I_{\mathrm{rms}} \cos(\theta) \tag{15.42}$$

对于固定的功率因素($\cos\theta$)，传播给定的功率可以采用多种电压、电流的组合方式。载流导线的电阻非零，因此在传输线中有功率损耗。

$$P_{\mathrm{loss}} = R_{\mathrm{line}} I_{\mathrm{rms}}^2 \tag{15.43}$$

这里 R_{line} 是输电线路的电阻。通过设计有一个很大的电压值和一个小的电流值的电力传输系统，线路损失可以减小到仅占功率输送的一小部分。因此，较大的电压也等效于电力系统传输的高效率。

由于安全性和其他原因，在电能使用的地方必须应用相对较小的电压。例如，在美国，住宅的电压额定值为 110 Vrms 或 220 Vrms。因此，变压器在电力传输系统中可以根据需要升高或降低电压。

15.5.1　电压比

一个变压器如图 15.22 所示。一个交流电压源连接到初级线圈，匝数为 N_1。电流流入初级侧，并在铁芯中产生一个交流磁通 $\phi(t)$。这个磁通在匝数为 N_2 的次级线圈上产生一个感应电压，后者为负载提供动力。根据匝数比 N_2/N_1，二次侧电压额定值可以大于或小于一次侧电压额定值。

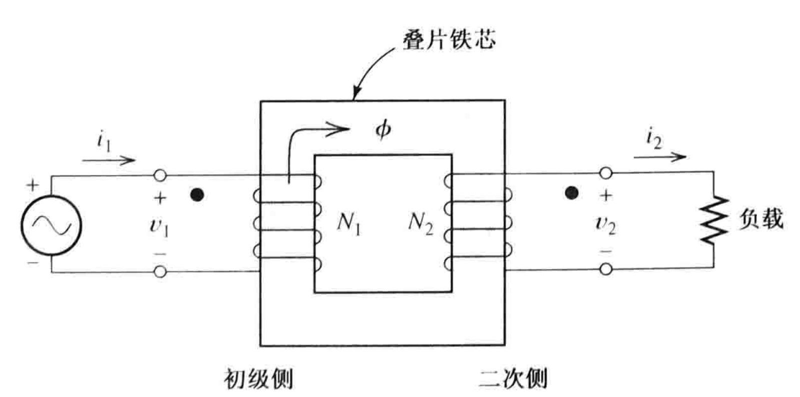


图 15.22　由 n 个绕在同一铁芯上的线圈组成的变压器

现在，我们忽视线圈阻抗和铁芯损耗。此外，我们假设铁芯的磁阻非常小，而且所有磁通链接两个线圈。

一次电压如下：

$$v_1(t) = V_{1m}\cos(\omega t) \tag{15.44}$$

根据法拉第定律，可得

$$v_1(t) = V_{im}\cos(\omega t) = N_1 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \tag{15.45}$$

重新整理可得

$$\phi(t)=\frac{V_{1m}}{N_1\omega}\sin(\omega t) \tag{15.46}$$

假设所有的磁链都通过绕组，则二次侧电压为

$$v_2(t)=N_2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \tag{15.47}$$

利用式(15.46)代替 $\phi(t)$ 可得

$$v_2(t)=N_2\frac{V_{1m}}{N_1\omega}\frac{d}{\mathrm{d}t}[\sin(\omega t)] \tag{15.48}$$

$$v_2(t)=\frac{N_2}{N_1}V_{1m}\cos(\omega t) \tag{15.49}$$

$$v_2(t)=\frac{N_2}{N_1}v_1(t) \tag{15.50}$$

注意到每个绕组的电压与绕组匝数成正比。这是变压器的重要性质。

另外，请注意，我们已经在图 15.22 中每个绕组端点上设置了一个点。像往常一样，这些点通过设置，以便使流入同名端的电流产生相互增强的磁场。此外，应用楞次定律表明，当 φ 增加时，两个同名端的电压均为正极性；当 φ 减少时，两个同名端的电压均为负极性。因此在一个变压器中，电压的极性由同名端决定。当一个在线圈 1 同名端的电压为正极性时，线圈 2 在同名端也有相应的正极性电压。

因此，我们建立了如下事实，每个绕组电压与绕组的匝数成正比。显然，电压的峰值和有效值也遵循匝数比

$$V_{2\mathrm{rms}}=\frac{N_2}{N_1}V_{1\mathrm{rms}} \tag{15.51}$$

例 15.9 确定所需的匝数比。

假设有一个有效值为 4700 V 的交流源，负载端需要有效值 220 V 的电压。确定变压器需要的匝数比 N_1/N_2。

解： 整理方程(15.51)，我们有

$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{V_{1\mathrm{rms}}}{V_{2\mathrm{rms}}}=\frac{4700}{220}=21.36$$

15.5.2 电流比

让我们再一次考查图 15.22 中的变压器。注意到电流 i_1 和 i_2 产生相反的磁场(因为 i_1 流入同名端而 i_2 流出同名端)。于是，施加到铁芯的磁动势为

$$\mathcal{F}=N_1i_1(t)-N_2i_2(t) \tag{15.52}$$

同时，磁动势与磁通和磁阻的关系为

$$\mathcal{F}=\mathcal{R}\phi \tag{15.53}$$

在一个设计良好的变压器中，铁芯磁阻非常小。理想情况下，这个磁阻为零，在铁芯上建立的磁通也为零。于是，式(15.22)变成

$$\mathcal{F}=N_1i_1(t)-N_2i_2(t)=0 \tag{15.54}$$

整理该式，可以得到

$$i_2(t)=\frac{N_1}{N_2}i_1(t) \tag{15.55}$$

电流有效值之间的关系为

$$I_{2\text{rms}}=\frac{N_1}{N_2}I_{1\text{rms}} \tag{15.56}$$

比较电压表达式(15.51)和电流表达式(15.56)。注意到如果电压升高(即 $N_2/N_1>1$)，电流就会减小，反之亦然。

15.5.3 理想变压器中的功率

再一次考查图 15.22。由二次绕组流向负载的功率为

$$p_2(t)=v_2(t)i_2(t) \tag{15.57}$$

分别使用式(15.50)和式(15.55)代替 $v_2(t)$ 和 $i_2(t)$，即

$$p_2(t)=\frac{N_2}{N_1}v_1(t)\frac{N_1}{N_2}i_1(t)=v_1(t)i_1(t) \tag{15.58}$$

同时，一次绕组传播的功率为 $p_1(t)=v_1(t)i_1(t)$，可以得到

$$p_2(t)=p_1(t) \tag{15.59}$$

因此，我们发现了这样一个事实，功率从电压源传递到一次绕组，再依次通过二次绕组传递到负载。净功率是理想变压器中既不产生又不消耗的功率。

总结：让我们对变压器的理想化假设及其结果进行总结。

1. 我们认为磁链全部位于绕组线圈中并且两个线圈的电阻为零。因此，每个线圈电压与线圈的匝数成正比。这导致了如下的电压关系：

$$v_2(t)=\frac{N_2}{N_1}v_1(t)$$

2. 假设铁芯的磁阻可以忽略，所以两个绕组的总磁动势为零。因此有如下关系：

$$i_2(t)=\frac{N_1}{N_2}i_1(t)$$

3. 电压和电流关系的结果是所有功率通过一个理想的变压器从电源转移到负载。因此，理想变压器的功率效率为 100%。

变压器的电路符号如图 15.23(a)所示。

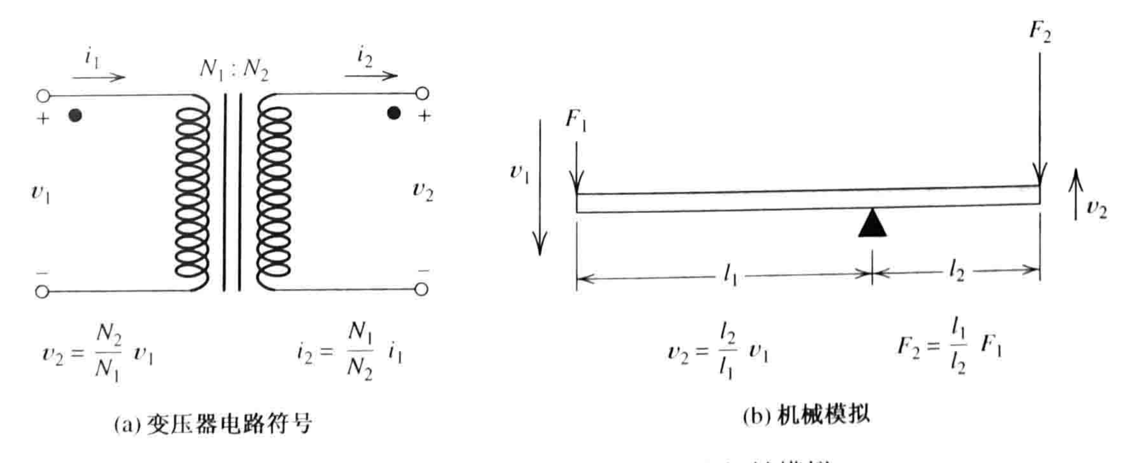


图 15.23　变压器的等效电路图和机械模拟

15.5.4　变压器的机械模拟:杠杆

杠杆如图15.23(b)所示，它是一个电力变压器的机械模拟。杠杆两端的速度比与其两端的长度比相关，$v_2 = v_1(l_2/l_1)$，正如变压器电压与匝数比相关一样。同样，力之间的关系为 $F_2 = F_1(l_1/l_2)$，这类似于变压器电流之间的关系。正如一个变压器，无摩擦杠杆既不生成也不消耗能量。一端的杠杆，我们有较小的力和较大的速度，而另一端则力大速度小。这就像变压器电压电流相互之间的关系一样。

例15.10　分析一个包含理想变压器的电路

考查如图15.24所示的电源和变压器。确定电流和电压的有效值。a. 开关打开；b. 开关关闭。

解：由于应用的电源初级绕组有 $V_{1\,\text{rms}} = 110$ V，因此一次侧和二次侧的电压关系如式(15.51)所示：

$$V_{2\text{rms}} = \frac{N_2}{N_1}V_{1\text{rms}} = \frac{1}{5} \times 110 = 22\text{ V}$$

整理式(15.56)，可以得到

$$I_{1\text{rms}} = \frac{N_2}{N_1}I_{2\text{rms}}$$

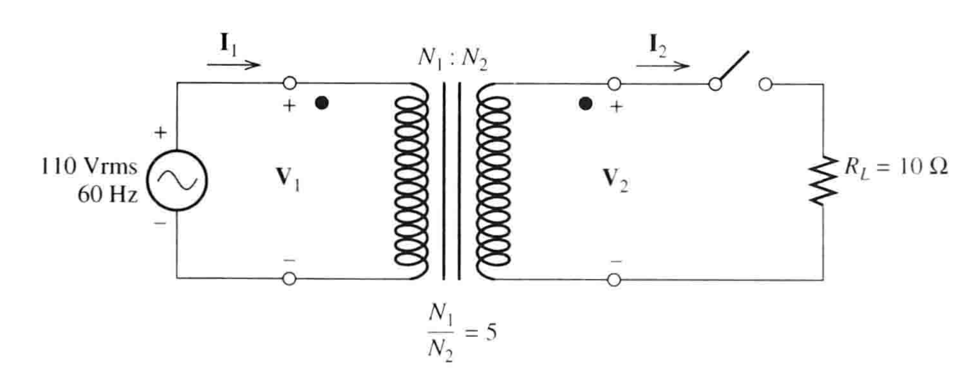


图15.24　例15.10电路

a. 开关打开，二次侧电流为零，于是，一次侧电流 $I_{1\,\text{rms}}$ 也为零，没有从电源中获取能量。

b. 开关关闭，二次侧电流为

$$I_{2\text{rms}} = \frac{V_{2\text{rms}}}{R_L} = \frac{22}{10} = 2.2\text{ A}$$

于是，一次侧电流为

$$I_{1\text{rms}} = \frac{N_2}{N_1}I_{2\text{rms}} = \frac{1}{5} \times 2.2 = 0.44\text{ A}$$

让我们考虑一下在本例中事件的顺序。当源电压施加到一次侧绕组时，一个非常小的一次侧电流(理想情况下为零)流动到铁芯中建立了磁通量。磁通量在二次绕组中引起感应电压。在开关关闭之前，二次侧没有电流流通。在开关关闭时，二次侧电流在铁芯中产生相反的磁通。然而，由于电压施加到一次侧，铁芯中的磁通量必须保持。(否则，一次侧电路不会满足基尔霍夫电压定律。)因此，电流必须开始流入一次绕组以抵消二次绕组的磁动势。

15.5.5　阻抗变换

考查如图15.25所示的电路。二次侧电压、电流与负载阻抗的关系为

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} = Z_L \tag{15.60}$$

用式(15.51)和式(15.56)替换 I_2和 V_2，可得

$$\frac{(N_2/N_1)\mathbf{V}_1}{(N_1/N_2)\mathbf{I}_1} = Z_L \tag{15.61}$$

整理得

$$Z_L' = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L \tag{15.62}$$

其中，Z_L'为从电源侧观察到的等效阻抗。我们称负载阻抗通过匝数比影射到一次侧绕组。

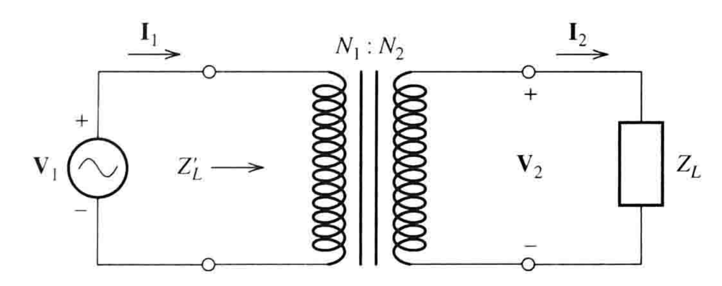
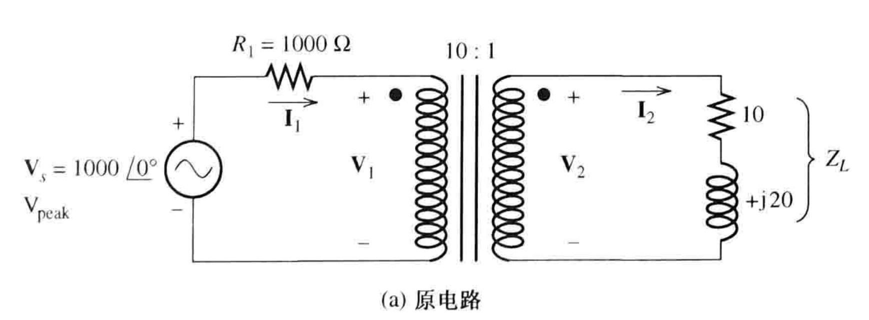


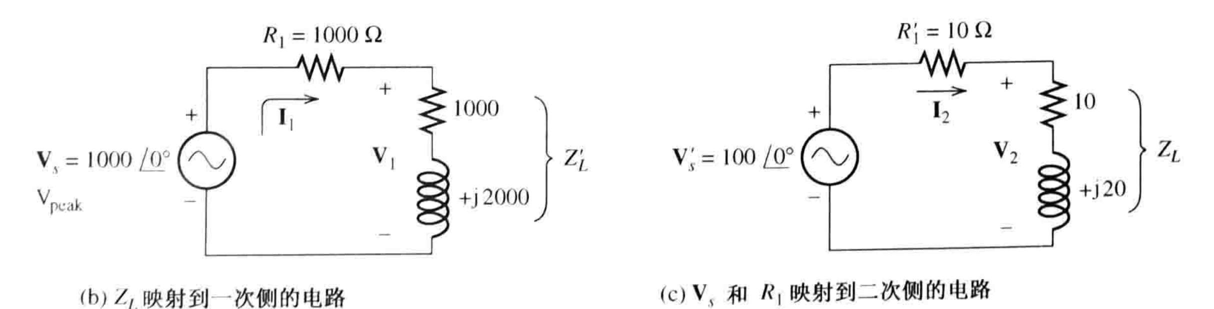
图 15.25　从一次侧看进去的等效阻抗 $Z_L' = (N_1/N_2)^2 \times Z_L$

例 15.11　阻抗变换的使用

考查如图 15.26(a)所示的电路。求出电流相量和电压相量，同时，计算传送到负载的功率。



(a) 原电路



(b) Z_L 映射到一次侧的电路　　(c) $\mathbf{V}_s$ 和 R_1 映射到二次侧的电路

图 15.26　例 15.11 和例 15.12 电路

解： 首先，我们将负载阻抗 Z_L映射到一次侧，如图 15.26(b)所示。一次侧的等效阻抗为

$$Z_L' = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L = (10)^2(10 + \mathrm{j}20) = 1000 + \mathrm{j}2000$$

相对电源的总阻抗为

$$Z_s = R_1 + Z_L' = 1000 + 1000 + \mathrm{j}2000 = 2000 + \mathrm{j}2000$$

转化成极坐标形式，有

$$Z_s = 2828\angle 45^\circ$$

我们可以计算一次侧的电压和电流：

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_s}{Z_s} = \frac{1000\angle 0^\circ}{2828\angle 45^\circ} = 0.3536\angle -45^\circ \text{ A peak}$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 Z_L' = 0.3536\angle -45^\circ \times (1000 + j2000)$$

$$= 0.3536\angle -45^\circ \times (2236\angle 63.43^\circ) = 790.6\angle 18.43^\circ \text{ V peak}$$

下一步，我们可以通过匝数比计算二次侧的电压和电流：

$$\mathbf{I}_2 = \frac{N_1}{N_2}\mathbf{I}_1 = \frac{10}{1}0.3536\angle -45^\circ = 3.536\angle -45^\circ \text{ A peak}$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{N_2}{N_1}\mathbf{V}_1 = \frac{1}{10}790.6\angle 18.43^\circ = 79.06\angle 18.43^\circ \text{ V peak}$$

最终，我们计算得到了流入负载的功率：

$$P_L = I_{2\text{rms}}^2 R_L = \left(\frac{3.536}{\sqrt{2}}\right)^2 (10) = 62.51 \text{ W}$$

除了使用匝数比的平方将阻抗从变压器的一侧变换到另一侧，我们也可以通过匝数比将电压源和电流源转移到二次侧。

例 15.12 将电压源映射到二次侧。

考查如图 15.26(a)所示的电路。将 $\mathbf{V}_s$ 和 R_1 映射到二次侧。

解：通过匝数比对电压进行映射。可以得到

$$\mathbf{V}_s' = \frac{N_2}{N_1}\mathbf{V}_s = \frac{1}{10}1000\angle 0^\circ = 100\angle 0^\circ$$

另一方面，通过匝数比转化而得的阻抗为

$$R_1' = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 R_1 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 (1000) = 10\ \Omega$$

$\mathbf{V}_s$和 R_1 转移到二次侧的电路如图 15.26(c)所示。

练习 15.16 计算如图 15.26(c)所示电路 $\mathbf{V}_2$的值和传送到负载的功率。(当然，答案应该与例 15.11 中的结果一样。)

答案 $\mathbf{V}_2 = 79.06\angle 18.43^\circ$，$P_L = 62.51$ W。

练习 15.17 考查如图 15.27 所示的电路。计算 $\mathbf{I}_1$、$\mathbf{I}_2$，$\mathbf{V}_2$的值，传送到 R_L的功率以及 R_L'。

答案 $\mathbf{I}_1 = 1.538\angle 0^\circ$，$\mathbf{I}_2 = 0.3846\angle 0^\circ$，$\mathbf{V}_2 = 153.8\angle 0^\circ$，$P_L = 29.60$ W，$R_L' = 25\ \Omega$。

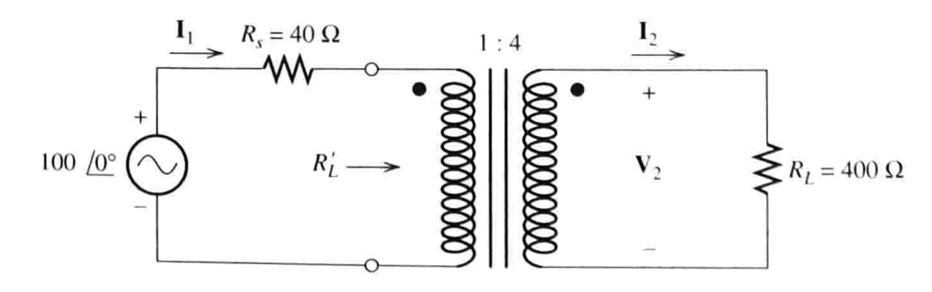


图 15.27 练习 15.16 和练习 15.17 电路

练习 15.18　回想要从带内阻 R_s 的电源里获得最大功率，我们需要使实际负载电阻 R_L' 等于 R_s。计算图 15.27 中为了获得最大负载功率的相应匝数比。

答案　$N_1 = N_2 = 1/\sqrt{10}$。

15.6　实际变压器

精心设计的变压器能近似满足我们讨论的理想变压器的要求。通常通过初始设计的计算，我们可以假定一个变压器是理想的。然而，在最后阶段的设计中，需要一个更好的模型。此外，精确的模型有助于更好地理解变压器及其限制。

一个实际等效的变压器电路如图 15.28 所示。R_1 和 R_2 为变压器绕组导线中的电阻。

对理想变压器，假定所有的磁通量都链接在两个线圈中。事实上，一些磁通量由于线圈离开铁芯而没有连接到另一个线圈。我们通过在理想变压器中增加 L_1 和 L_2 两个漏感来进行相应处理，如图 15.28 所示。

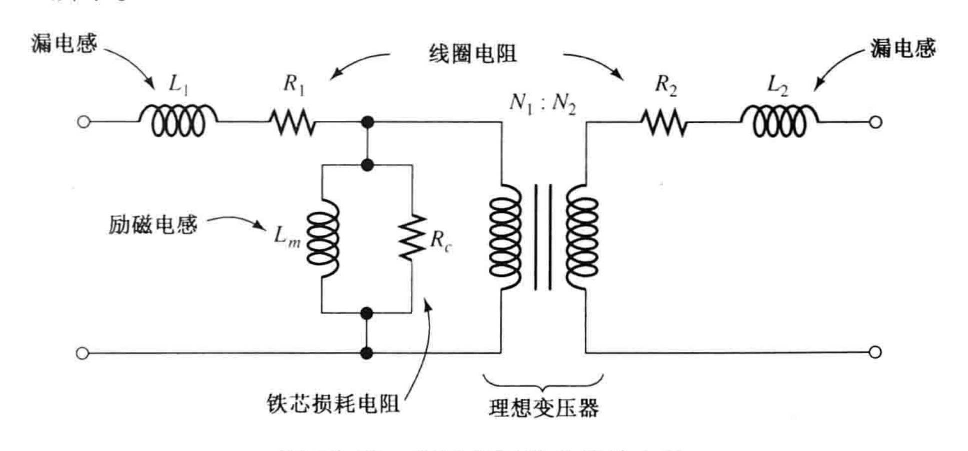


图 15.28　实际变压器的等效电路

在讨论理想变压器的时候，假定铁芯磁阻为零并忽略了铁芯损耗。这意味着铁芯中建立磁通不需要磁动势。这些假设在实际中并不成立。考虑到铁芯中磁阻非零，激磁电感 L_m 将被考虑，如图 15.28 所示。电流需要通过 L_m 来建立磁通。最后，考虑到磁滞和涡流引起的铁芯损耗，增加电阻 R_c。

表 15.1 比较了实际变压器和理想变压器电路元件的值

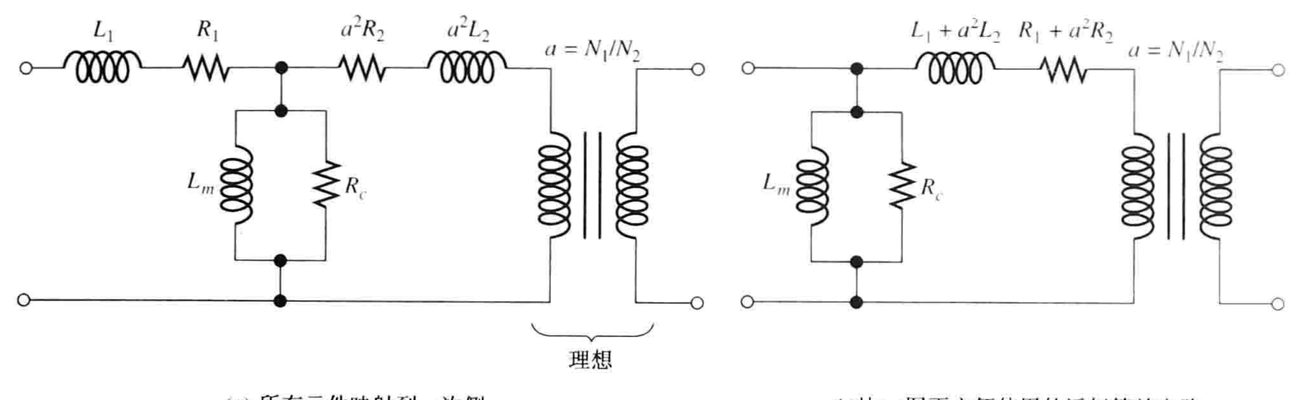
表 15.1　60 Hz，20 kVA，2400/240 V 变压器实际参数和理想参数

元件名称	符号	理想	实际
一次侧电阻	R_1	0	3.0 Ω
二次侧电阻	R_2	0	0.03 Ω
一次侧漏电抗	$X_1 = \omega L_1$	0	6.5 Ω
二次侧漏电抗	$X_2 = \omega L_2$	0	0.07 Ω
励磁电抗	$X_m = \omega L_m$	∞	15 kΩ
铁芯损耗电阻	R_c	∞	100 kΩ

15.6.1　不同的变压器模型

图 15.29 显示了几个不同的变压器等效电路。在图 15.29(a)中，二次绕组电感和电阻被转移到了一次侧。在图 15.29(b)中，励磁电感和损耗电阻被移到了输入侧的电路。（实际

上，图 15.29(b)中的电路并不精确等效于图 15.29(a)中的电路。然而，在正常操作情况下，L_1和 R_1相对于 L_m和 R_m上的电压还是很小的。因此，在正常的操作条件下这两个电路得到的结果几乎相等。)其他等效电路可以通过将电路元件移动到二次侧和通过将 L_m和 R_c移动到右侧得到。



(a) 所有元件映射到一次侧

(b)比(a)图更方便使用的近似等效电路

图 15.29 几种变压器等效电路。(b)电路不能准确等效(a)电路，但在实际应用中足够精确了

15.6.2 调整和效率

因为元件 L_1、L_2，R_1和 R_2，负载上的电压随负载电流的变化而变化。通常，这是一个不良影响。变压器调整率的定义为

$$\text{调整率} = \frac{V_{\text{no-load}} - V_{\text{load}}}{V_{\text{load}}} \times 100\%$$

其中，$V_{\text{no-load}}$为负载开路时负载端电压的有效值，V_{load}是接上负载时负载端的电压有效值。

理想情况下，我们通常希望调整率是零。例如，调整率不佳的时候，当打开干燥机时，灯光就会很昏暗。显然，这不是一个理想的情况。

由于变压器等效电路上的电阻，并不是所有电源输入到变压器的功率都传递到负载。我们定义的功率效率为

$$\text{功率效率} = \frac{P_{\text{load}}}{P_{\text{in}}} \times 100\% = \left(1 - \frac{P_{\text{loss}}}{P_{\text{in}}}\right) \times 100\%$$

这里，P_{load}是负载功率，P_{loss}是变压器中耗散的功率，P_{in}是电源输入变压器一次侧的功率。

例 15.13 调整率和效率的计算

计算当功率因素为 0.8 的额定负载时，表 15.1 中变压器的调整率和功率效率。

解： 首先，我们画出如图 15.30 所示的电路图。注意到我们将励磁电感 X_m和铁损电阻 R_c放在 R_1和 X_1的左边，这样做的目的是使计算更简捷、更精确。假定负载电压相位为零。在电力系统中将电压值或电流值设置成有效值(而不是峰值)相量很常见。因此有

$$\mathbf{V}_{\text{load}} = 240\angle 0^\circ \text{ V rms}$$

对于一个 20 kVA 的负载而言，有

$$I_2 = \frac{20 \text{ kVA}}{240 \text{ V}} = 83.33 \text{ A rms}$$

负载功率因数为

$$\text{负载功率因数} = \cos(\theta) = 0.8$$

进一步解得

$$\theta = 36.87°$$

于是，负载电流相量为

$$\mathbf{I}_2 = 83.33\angle{-36.87°}\ \text{A rms}$$

这里相位角为负是因为负载有滞后的功率因数。

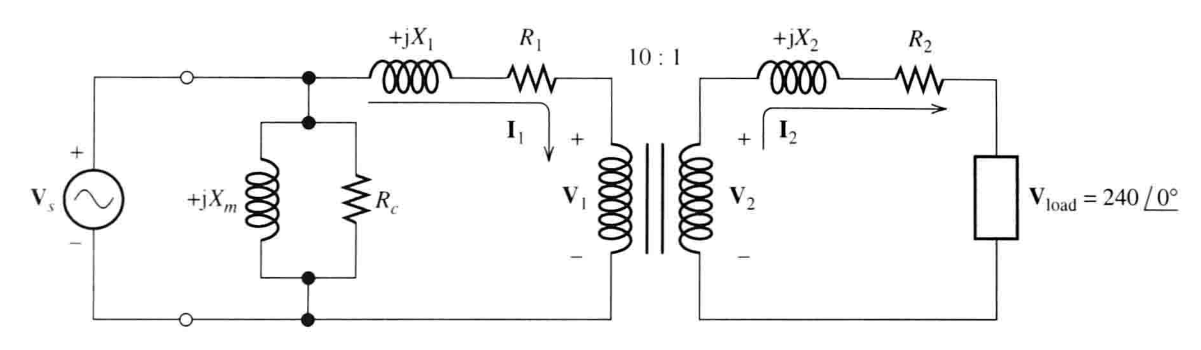


图 15.30　例 15.13 电路

通过匝数比由二次侧电流可以得到一次侧电流：

$$\mathbf{I}_1 = \frac{N_2}{N_1}\mathbf{I}_2 = \frac{1}{10} \times 83.33\angle{-36.87°} = 8.333\angle{-36.87°}\ \text{A rms}$$

现在，可以计算电压：

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_2 &= \mathbf{V}_{\text{load}} + (R_2 + \text{j}X_2)\mathbf{I}_2 \\ &= 240 + (0.03 + \text{j}0.07)83.33\angle{-36.87°} \\ &= 240 + 6.346\angle{29.93°} \\ &= 245.50 + \text{j}3.166\ \text{V rms}\end{aligned}$$

通过匝数比由二次侧电压可以得到一次侧电压：

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1 &= \frac{N_1}{N_2}\mathbf{V}_2 = 10 \times (245.50 + \text{j}3.166) \\ &= 2455.0 + \text{j}31.66\ \text{V rms}\end{aligned}$$

此时，可以计算电源电压：

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_s &= \mathbf{V}_1 + (R_1 + \text{j}X_1)\mathbf{I}_1 \\ &= 2455.0 + \text{j}31.66 + (3 + \text{j}6.5) \times (8.333\angle{-36.87°}) \\ &= 2508.2\angle{1.37°}\ \text{V rms}\end{aligned}$$

接下来，计算变压器中的功耗：

$$\begin{aligned}P_{\text{loss}} &= \frac{V_s^2}{R_c} + I_1^2R_1 + I_2^2R_2 \\ &= 62.91 + 208.3 + 208.3 \\ &= 479.5\ \text{W}\end{aligned}$$

传递到负载的功率为

$$\begin{aligned}P_{\text{load}} &= V_{\text{load}}I_2 \times \textbf{功率因数} \\ &= 20\ \text{kVA} \times 0.8 = 16\,000\ \text{W}\end{aligned}$$

输入功率为

$$\begin{aligned}P_{\text{in}} &= P_{\text{load}} + P_{\text{loss}} \\ &= 16\,000 + 479.5 = 16\,479.5\ \text{W}\end{aligned}$$

此处，可以计算功率效率：

$$\text{功率效率} = \left(1 - \frac{P_{\text{loss}}}{P_{\text{in}}}\right) \times 100\%$$
$$= \left(1 - \frac{479.5}{16\ 479.5}\right) \times 100\% = 97.09\%$$

进一步可以确定空载时的电压。空载时有

$$I_1 = I_2 = 0$$
$$V_1 = V_s = 2508.2$$
$$V_{\text{no-load}} = V_2 = V_1 \frac{N_2}{N_1} = 250.82 \text{ V rms}$$

最终，调整率为

$$\text{调整率} = \frac{V_{\text{no-load}} - V_{\text{load}}}{V_{\text{load}}} \times 100\%$$
$$= \frac{250.82 - 240}{240} \times 100\%$$
$$= 4.51\%$$

总结

1. 右手定则可用于确定电流产生磁场的方向。这在图 15.2 中有说明。
2. 施加在磁场中的运动电荷上的力的表达式为

$$\mathbf{f} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

   类似地，施加在磁场中的移动载流导线上力的表达式为

$$\mathrm{d}\mathbf{f} = i\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

3. 根据法拉第定律的推导，当磁通量随着时间变化时线圈中将产生感应电压。类似地，当导体切割磁力线时也会产生感应电压。我们可以通过楞次定律来确定电压的极性。
4. 磁通密度 **B** 和磁场强度 **H** 的关系式为

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

   这里，μ 是材料的磁导率。在空气和真空中，$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$。
5. 根据安培定律，**H** 在闭合路径的线积分等于流过该封闭区域的电流之和。我们可以利用此定律确定长直导线或者环形线圈的磁场。
6. 实际的磁性设备可以利用磁路的概念加以分析。磁动势近似于电压源，磁阻近似于电阻，磁通近似于电流。
7. 自感和互感可以通过线圈以及线圈围绕的材料的物理特性加以计算。
8. 铁的 *B-H* 曲线即磁滞回线，它展示出在 1 ~ 2T 时铁芯将会饱和。这个曲线代表了每个周期转化成的热能。涡流损耗是另一种引起铁芯损耗的原因。在由铁芯和气隙组成的磁路里，大部分能量存储在气隙中。
9. 在理想变压器中，线圈的电压与匝数成正比，净磁动势为零，功率效率为 100%。
10. 实际变压器的等效电路分别如图 15.28 和图 15.29 所示。
11. 效率和调整率为变压器运行的重要指标。

习题

15.1 节　磁场

P15.1　产生磁场的基本原理是什么？

P15.2　陈述如下情况的右手定则。a. 载流导线；b. 载流线圈。

P15.3　陈述安培定则，包括电流的参考方向。

P15.4　陈述法拉第定律和楞次定律。

P15.5　地球的磁场接近于 3×10^{-5} T。带恒定的 10 A 电流的长直导线距离多远的场强等于地球磁场的 10%？提出至少两种建议以减少船或者飞机上航行罗盘对电子电路的影响。

*P15.6　一个铁棒插入如图 P15.6 所示的单回线圈中，当铁棒穿过线圈时，产生的电压 v_{ab} 为正还是为负？

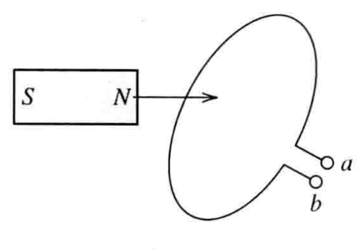


图 P15.6

P15.7　运用 15.1 节中的公式，定量分析 μ，**B** 和 **H** 的单位（用 m，km 和 C）。

P15.8　一个不规则的线圈携带如图 P15.8 所示的电流。由于磁场的产生会出现一个力吗？证明你的回答。（提示：考虑牛顿第三定律。）

P15.9　一根长铜管带有直流电流。由于电流的存在管内和管外将会产生磁场吗？证明你的回答。

P15.10　利用右手定则找出图 15.10 中每个线圈磁通量的方向。用 S 和 N 进行标注。这些线圈相互吸引还是排斥？

*P15.11　一根 0.5m 长的导线带有 10 A 电流并垂直于磁场，确定磁通密度，以使导线产生的力为 3 N。

P15.12　两根非常长的平行导线相距 1 cm，携带相同方向的 10 A 电流。环绕导线的材料的磁导率 $u_r=1$。确定其中一条导线 0.5 m 截面产生的力。导线相互吸引还是排斥？

P15.13　假设磁通量 ϕ 连接了位于如图 P15.13 所示正在增大的磁场中的线圈，确定每个线圈感应电压的极性。

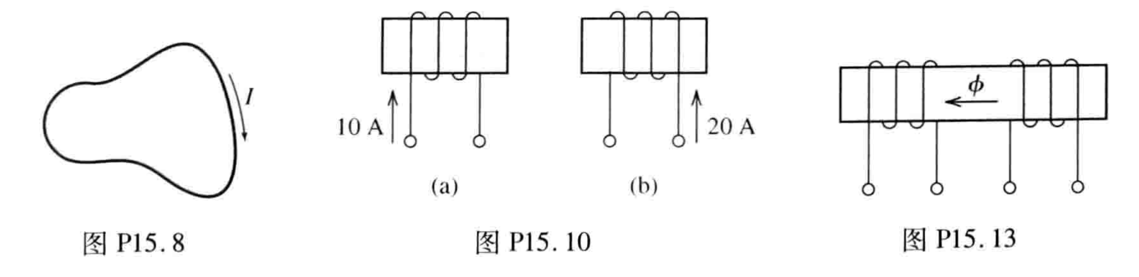


图 P15.8　　图 P15.10　　图 P15.13

P15.14　如图 P15.14 所示，两个线圈以非磁的形式绕好，因此每个线圈的部分磁通相互连接。假设左边线圈电感足够小，以至于 $i_1(t)$ 等于右边线圈产生的感应电压除以阻抗，在 $t=1$ s 时，两个线圈产生的力相互吸引、排斥还是为零？阐明理由，并分析 $t=2$ s，3 s，5 s 时的情况。

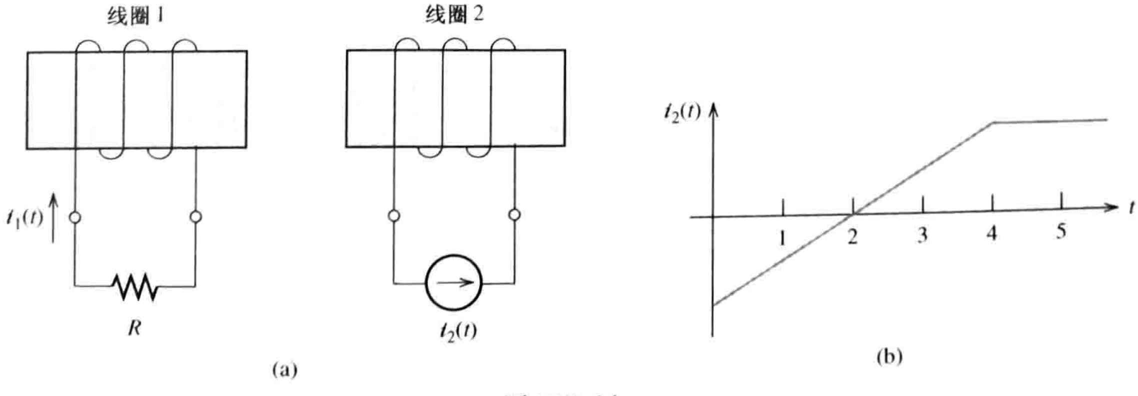


图 P15.14

* P15.15 一个磁通密度恒定为 1 T 的磁场垂直于一个 5 匝、环形、半径为 10 cm 的线圈。计算磁链，假如磁场在 1 ms 内减小到零，计算线圈中感应电压的大小。

* P15.16 在施加 50 A/m 的 H 时，对材料加以测试，并测得 $B = 0.1\ \text{Wb/m}^2$。计算材料的磁导率。

P15.17 一个 $B = 0.3\sin(377t)\ \text{Wb/m}^2$ 的磁场垂直于一个 1000 匝、半径为 20 cm 的环形线圈。试确定磁链，并找出电压随时间变化的函数。

P15.18 假如设计一个发电机，通过移动一个长直导体以 30 m/s 的速度通过一个 0.5 T 的均匀磁场以产生 120 V 的电压。导体、运动轨迹及磁场彼此相互垂直。问导体的长度应该为多少？发电机设计证明这种长度的导体是不实际的，需要采用 N 段长度为 0.1m 的导体，采用这些导体串联起来获得 120 V 电压，N 应该为多少？

P15.19 一个 200 匝的环形线圈(如图 15.8 所示)内径 $r = 1$ cm，外径 $R = 10$ cm。当在此线圈上施加 $0.05\sin(200t)$ A 的电流时，电压为 $0.5\cos(200t)$ 确定 ϕ 的时间函数表达式及铁芯材料的磁导率。

P15.20 一个有效值为 120 V 频率 60 Hz 的正弦电压施加到 500 匝的线圈上。计算线圈磁链的峰值和有效值。

P15.21 一根非常长的直导线带有电流 $i(t)$，与一矩形单匝线圈位于同一平面内，如图 P15.21 所示。导线和线圈被空气所围绕。a. 推导线圈磁链的表达式。b. 推导线圈产生的感应电压 $v_{ab}(t)$ 的表达式。c. 在 $i(t)$ 有效值为 10 A 且为 60 Hz 的正弦波形，$l = 10$ cm，$r_1 = 1$ cm，$r_2 = 10$ cm 时，计算 v_{ab} 的有效值。

P15.22 一根非常长的直导线带有恒定电流 $i(t) = I_1$，与一矩形单匝线圈位于同一平面内，如图 P15.21 所示。导线和线圈被空气所围绕。利用一个电源在线圈中施加一个顺时针的恒定电流 I_2。a. 推导线圈产生的力的表达式。b. 计算 $I_1 = I_2 = 10$ A，$l = 10$ cm，$r_1 = 1$ cm，$r_2 = 10$ cm 时导线磁场产生的力。c. 这个环吸引还是排斥导线？

P15.23 两根无限长的非常细的导线分别处于 x 轴和 y 轴并携带电流，如图 P15.23 所示。a. 假设 I_x 和 I_y 为正极性，画出由导线引起的力的方向在正负区域的情况。b. 计算 y 轴上导线的转矩。

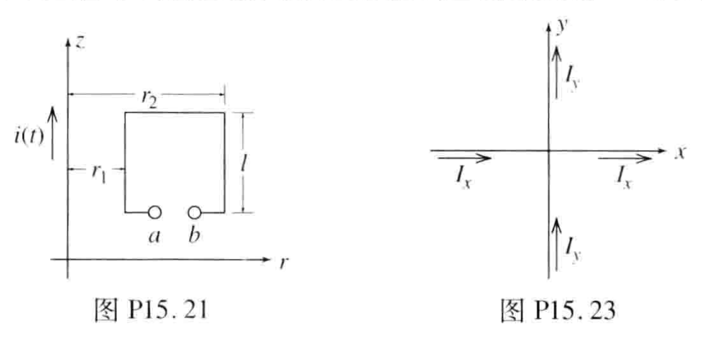


图 P15.21　　图 P15.23

15.2 节 磁路

* P15.24 磁路中什么量分别与电路中的电压源、电阻以及电流类似？

* P15.25 空气间隙长为 0.1 cm。多长的铁芯能与此气隙的磁阻相等？铁的相对磁导率为 5000，假设气隙与铁芯截面积相等。

P15.25 以 kg，C，m 和 s 来表示磁阻的单位。

P15.26 如果一个磁路的长度翻倍，其磁阻如何变化？截面积翻倍又如何？相对磁导率翻倍，磁阻又将如何变化？

* P15.28 考查例 15.6 中分析图 15.13 中的磁路。假如气隙长度减为 0，计算气隙中的磁通；为何该结果小于例 15.6 中的答案？

P15.29 计算如图 P15.29 的励磁线圈中每一段的磁通。

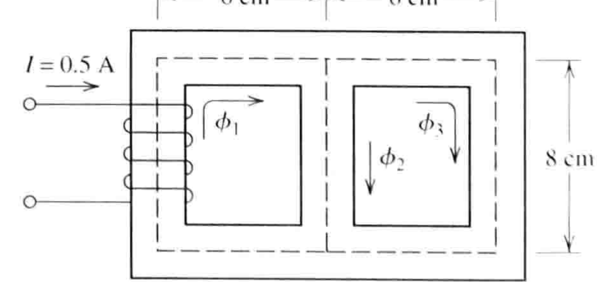


图 P15.29

P15.30　继续考查习题 15.29 的问题。假如线圈右段有长为 0.5 cm 的气隙，考虑到边缘效应，增加气隙截面的尺寸长度。在有气隙和无气隙的情况下列出一个磁通量的表格，并对结果加以分析。

P15.31　画出图 P15.31 中磁路等效的电路图。尤其要注意电压源的极性。确定铁芯中的磁通密度。

P15.32　考查图 P15.32 中的磁路。假设铁芯磁阻小到可以忽略。气隙长度为 0.1 cm，每段气隙的有效区域为 20 cm^2。为在气隙中获得 0.5T 的磁场，试确定线圈的匝数。

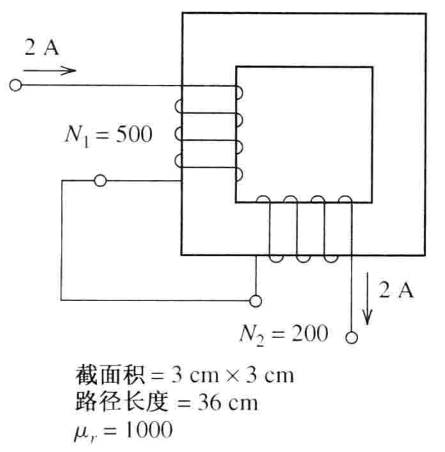


图 P15.31

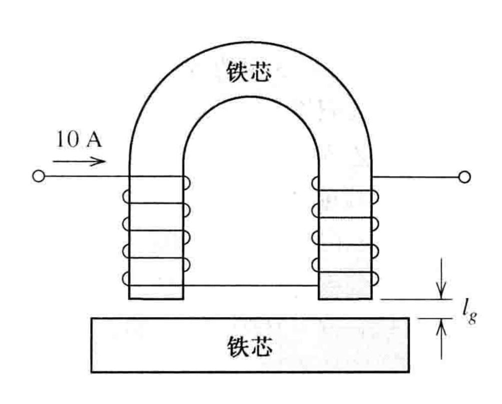


图 P15.32

P15.33　考查图 15.11 所示的环形铁芯，其相对磁导率为 1000，$R = 5$ cm，$r = 2$ cm。两个绕组绕在铁芯上面，其中一个为 200 匝，另一个为 400 匝。$v(t) = 10\cos(10^5 t)$ 施加在 200 匝的线圈上，400 匝线圈开路。确定 200 匝线圈的电流和 400 匝线圈的感应电压。假定磁通完全通过铁芯，电流为标准正弦波。

* P15.34　考查如图 P15.34 所示的电磁开关，其典型的应用为机械制动器和化学过程的操作阀门。忽略铁芯的边缘效应和磁阻。推导磁通与 μ_0、匝数 N 和电流的表达式。

P15.35　考查图 P15.35 所示的铁芯，上面有两个 N 匝的线圈，它们的磁通在中心段彼此增强。确定匝数 N，以使气隙中的磁通密度为 0.25 T。气隙和铁芯的截面均为边长为 2 cm 的正方形。考虑边缘效应在气隙每边增加气隙的长度。

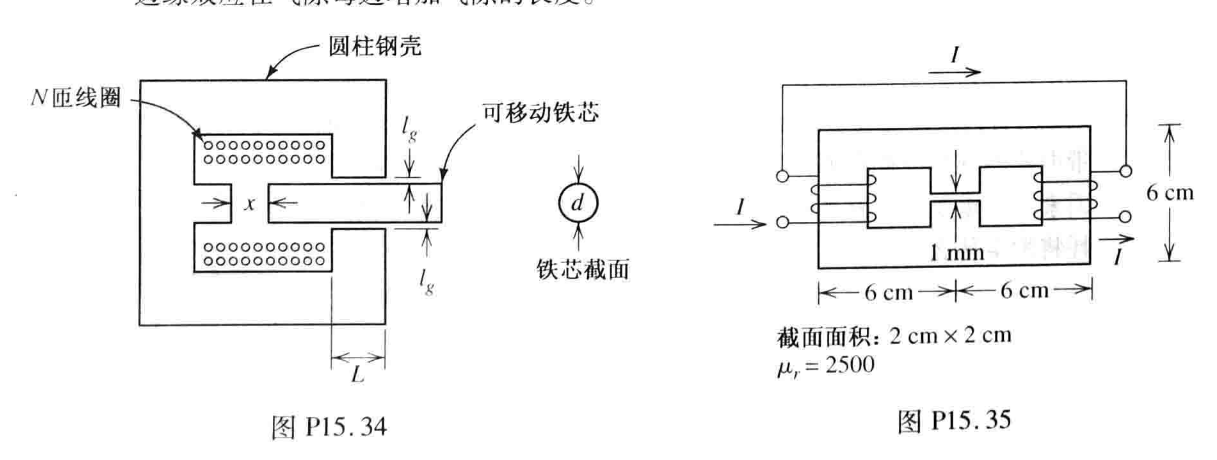


图 P15.34　　图 P15.35

15.3 节　电感和互感

P15.36　利用磁场的基本原理，画出一到两个图来解释电感中电压电流的相互关系。

* P15.37　一个 100 匝的线圈绕在铁芯上，其电感为 200 mH。如果匝数增加到 200，电感为多少？假设磁链完全处于线圈之中。

* P15.38　一个 500 匝的线圈绕在铁芯上。当在其上面施加有效值 120 V、频率 60 Hz 的电压时，电流有效值为 1 A。忽略线圈电阻，确定铁芯磁阻。给定铁芯截面积为 5 cm^2，长度为 20 cm，确定铁芯材料的相对磁导率。

P15.39 一个 100 匝的线圈绕在环形铁芯上，电感为 100 mH。假如一个 200 匝线圈绕在另一个环形铁芯上(r 和 R 如图 15.11 所示)，尺寸为第一个的两倍。若铁芯材料均相同，哪一个磁导率更高？计算第二个线圈的电感。

P15.40 一个对称的环形线圈绕在塑料芯上($u_r \approx 1$)，电感为 1 mH。如果铁芯材料相对磁导率为 200，则电感将变成多少？假设磁路由铁氧体组成。

P15.41 一个 200 匝的线圈绕在磁阻为 5×10^5 A·匝/Wb 的铁芯上，确定线圈的电感。

P15.42 一个继电器有一个施加了有效值 24 V、频率 60 Hz 电压的 500 匝线圈，线圈电阻可忽略。确定线圈磁链的峰值、铁芯磁阻以及线圈电感。

P15.43 考查图 15.13 中的线圈。加入同名端位于最左端，在右端线圈合理设置同名端位置以使其耦合。

P15.44 两个线圈绕在同一个铁芯上。$L_1 = 1$ H，$L_2 = 2$ H，$M = 5$ H。电流 $i_1 = 1$ A，$i_2 = 0.5$ A。如果电流均进入同名端，确定两个线圈的磁链。当 i_1 进入同名端 i_2 离开同名端时，情况又如何？

*P15.45 两个线圈绕在同一个铁芯上。$L_1 = 1$ H，$L_2 = 2$ H，$M = 5$ H。电流 $i_1 = \cos(377t)$ A，$i_2 = 0.5\cos(377t)$ A。如果电流均进入同名端，确定两个线圈的感应电压的表达式。

P15.46 两个线圈绕在同一个铁芯上。$L_1 = 0.2$ H，$L_2 = 0.5$ H，$M = 0.1$ H。电流 $i_1 = \exp(-1000t)$ A，$i_2 = 2\exp(-1000t)$ A。如果电流均进入同名端，确定两个线圈的感应电压。

P15.47 两线圈绕在同一铁芯上，电感分别为 L_1 和 L_2。由一个线圈产生的连接到另一个线圈的磁通部分称为耦合系数 k。推导以 L_1，L_2 和 k 表示的互感 M。

*P15.48 考查图 P15.48 所示的电路，二次侧也连接了一小段电路。两个线圈有 $L_1 = 0.1$ H，$L_2 = 10$ H，$M = 0.5$ H。$t = 0$ 之前，线圈中电流为零。$t = 0$ 时，开关闭合。画出 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 随时间变化的曲线。

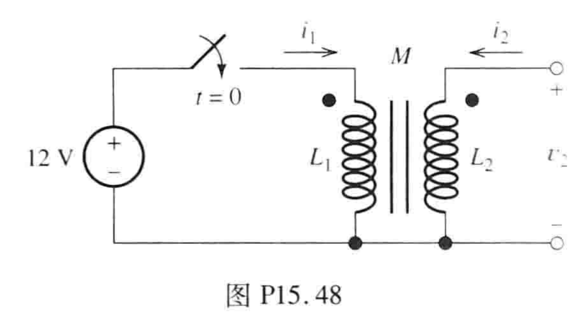


图 P15.48

P15.49 考查图 P15.48 所示的电路，两个线圈有 $L_1 = 0.1$ H，$L_2 = 10$ H，$M = 1$ H。$t = 0$ 之前，线圈中电流为零。$t = 0$ 时，开关闭合。画出 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 随时间变化的曲线。

15.4 节 磁性材料

P15.50 画出诸如铁之类材料的 B-H 曲线。表明磁滞和饱和。

P15.51 期望的材料 B-H 曲线中什么特性可以用在永磁体之中？用在发动机或者变压器中呢？请给出解释。

*P15.52 带电流的铁芯中存在哪两种损耗？为了减小这两种损耗哪些因素最为重要？当磁通量峰值不变而频率加倍时，这两种损耗将发生什么变化？

*P15.53 频率为 60 Hz 且磁通密度峰值给定，给定铁芯磁滞损耗为 1 W，涡流损耗为 0.5 W。估算在相同磁通密度及 400 Hz 条件下这两种损耗又将如何？

P15.54 考查一个绕在铁芯上的线圈。假设通以 60 Hz 的交流电流，铁芯材料的磁滞回线为矩形，如图 P15.54所示。铁芯体积为 1000 cm^2。确定由于磁滞引起转化为热能的能量。

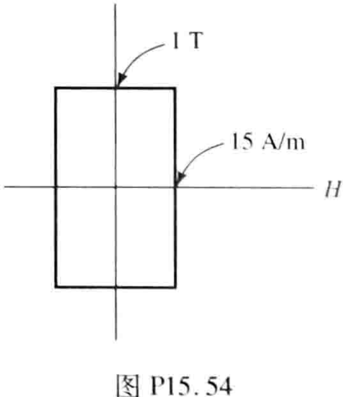


图 P15.54

P15.55 一个铁芯带有有效面积为 2×3 cm、长度为 l_g 的气隙。施加的磁动势为 1000 A·匝，铁芯磁阻可以忽略不计。用含 l_g 的函数表示磁通密度和存储在气隙中的能量。

P15.56 在频率为 60 Hz 时，一铁芯的损耗为 1.8 W，在 120 Hz 时损耗为 5.6 W。两种情况下磁通密度相等。确定在 60 Hz 时的磁滞损耗和涡流损耗。

P15.57　一个铁芯平均长度为 20 cm，截面积为 4 cm^2，相对磁导率为 2000。一个 500 匝的线圈缠绕在上面并带有 0.1 A 的电流。a. 确定铁芯的磁阻、线圈的磁通密度以及电感。b. 用 $W = (1/2)LI^2$ 来计算存储在磁场中能量。c. 用式(15.41)计算铁芯中的能量密度，进而以该密度与体积相乘计算能量。与 b 的计算结果进行比较。

15.5 节　理想变压器

P15.58　我们在推导理想变压器电压-电流关系时做了哪些假设?

*P15.59　美国住宅通常应用有效值为 120 V 的电压。如果电力系统或家用电器设计成更低电压(如有效值 12 V)或更高电压(如 12 kV)，将会引发哪些问题?

P15.60　考查图 P15.60 所示电路。确定二次侧电压 V_{2rms}、二次侧电流 I_{2rms} 以及负载功率。其中，$N_1/N_2 = 10$。分别考查 $N_1/N_2 = 1$ 和 $N_1/N_2 = 0.1$ 的情况。

P15.61　在交流电压源电压有效值为 240 V 时，为了把负载阻抗从 25 Ω 变为 100 Ω，就需要一个变压器。画出所需电路图。变压器匝数比应该为多少? 确定电压源电流、负载电流以及负载电压。

*P15.62　假如我们需要使 25 Ω 的负载电阻相对电源为 100 Ω 电阻。可以用 25 Ω 电阻串联 75 Ω 电阻以代替变压器。从功率效率上来讲，哪种方式更合理? 请说明原因。

P15.63　考查图 P15.63 所示电路。a. 确定 $\mathbf{I}_1$ 和 $\mathbf{I}_2$ 的值。b. 对于每个电源而言，确定其平均功率并说明电源是吸收还是发出功率。c. 将二次侧同名端移到底部再重复 a、b 的问题。

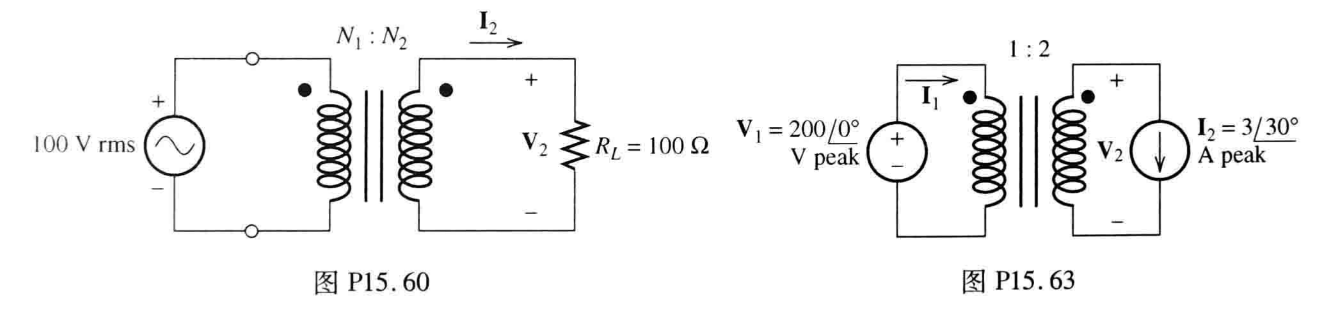


图 P15.60　　图 P15.63

P15.64　如图 P15.64 所示，电压源 V_s 通过传输线连接到 $R_L = 10\ \Omega$ 的负载上，传输线的 $R_{line} = 10\ \Omega$。在图 P15.64(a)中，没有使用变压器。图 P15.64(b)中一个变压器用于在发送端将电源电压升高，另一个变压器用于在负载端把电压降下来。对于每种情况，确定电源发出的功率、线路损耗、传输到负载的功率以及效率。效率定义为传输到负载的功率与电源功率的比值。

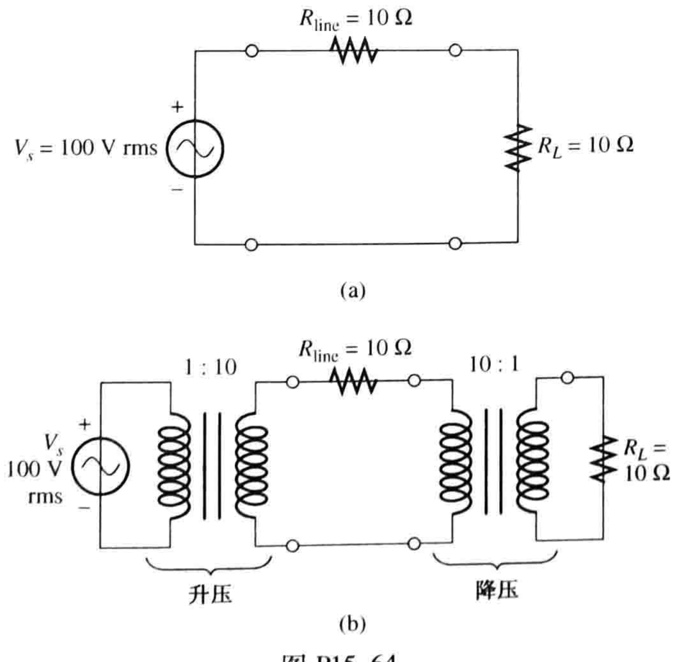


图 P15.64

P15.65 a. 如图 P15.65 所示，将电阻和电源映射到电路的左端。b. 将右侧同名端移到顶部，重复 a 的工作。

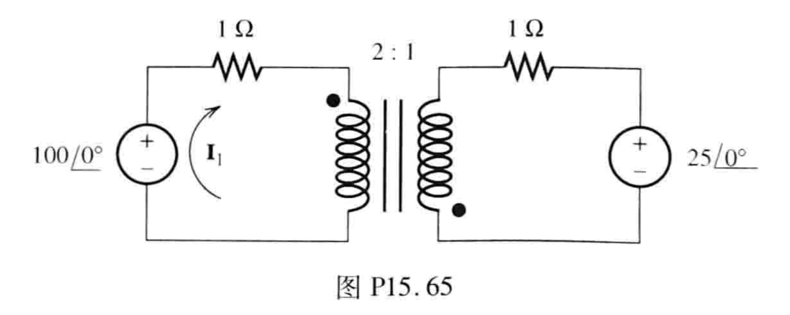


图 P15.65

P15.66 如图 P15.66 所示，确定其等效电阻 R_L' 和电容 C_L'。(注意，阻抗按匝数比的平方映射。)

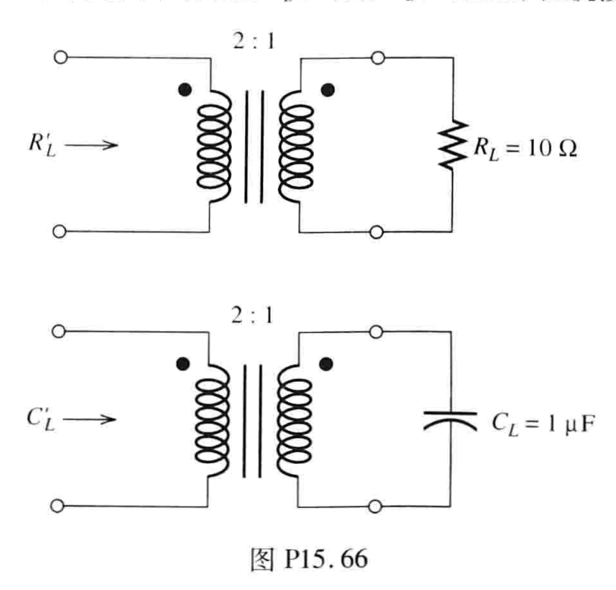


图 P15.66

* P15.67 考查如图 P15.67 所示的有三个绕组的变压器。a. 设置同名端的位置以使线圈 1 和线圈 2 以及线圈 1 和线圈 3 耦合。b. 假设所有的磁链均通过线圈，确定电压 $\mathbf{V}_2$ 和 $\mathbf{V}_3$。c. 假如建立铁芯的净磁动势为 0，以 $\mathbf{I}_2$，$\mathbf{I}_3$ 和匝数比的形式给出 $\mathbf{I}_1$ 的表达式，然后计算 $\mathbf{I}_1$。

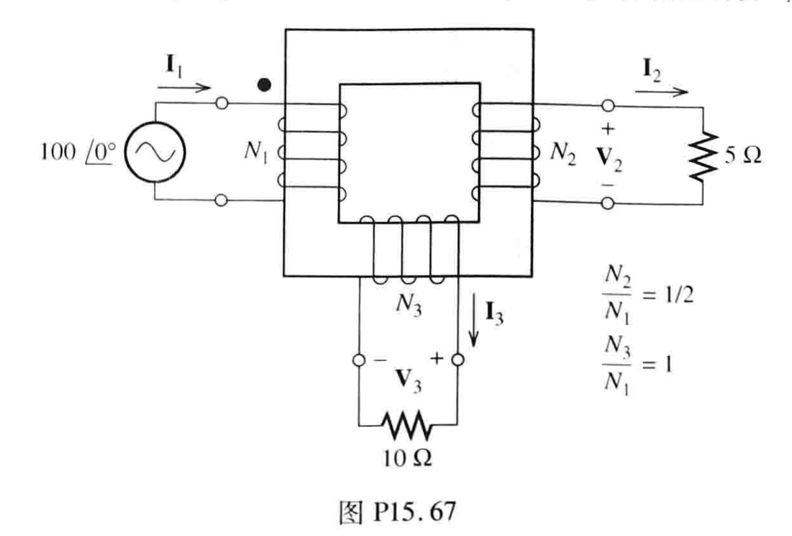


图 P15.67

P15.68 一个称为自动变压器的装置如图 P15.68 所示。a. 假设所有的磁链均通过线圈，确定 v_1，v_2 和匝数比的关系。b. 假设建立磁通的总磁动势为 0，给出 i_1 和 i_2 的关系。

P15.69 另一种类型的自动变压器如图 P15.69 所示。假设磁链完全处于线圈之中且建立磁通的总磁动势可以忽略。确定 $\mathbf{I}_1$，$\mathbf{I}_2$ 和 $\mathbf{V}_2$ 的值。

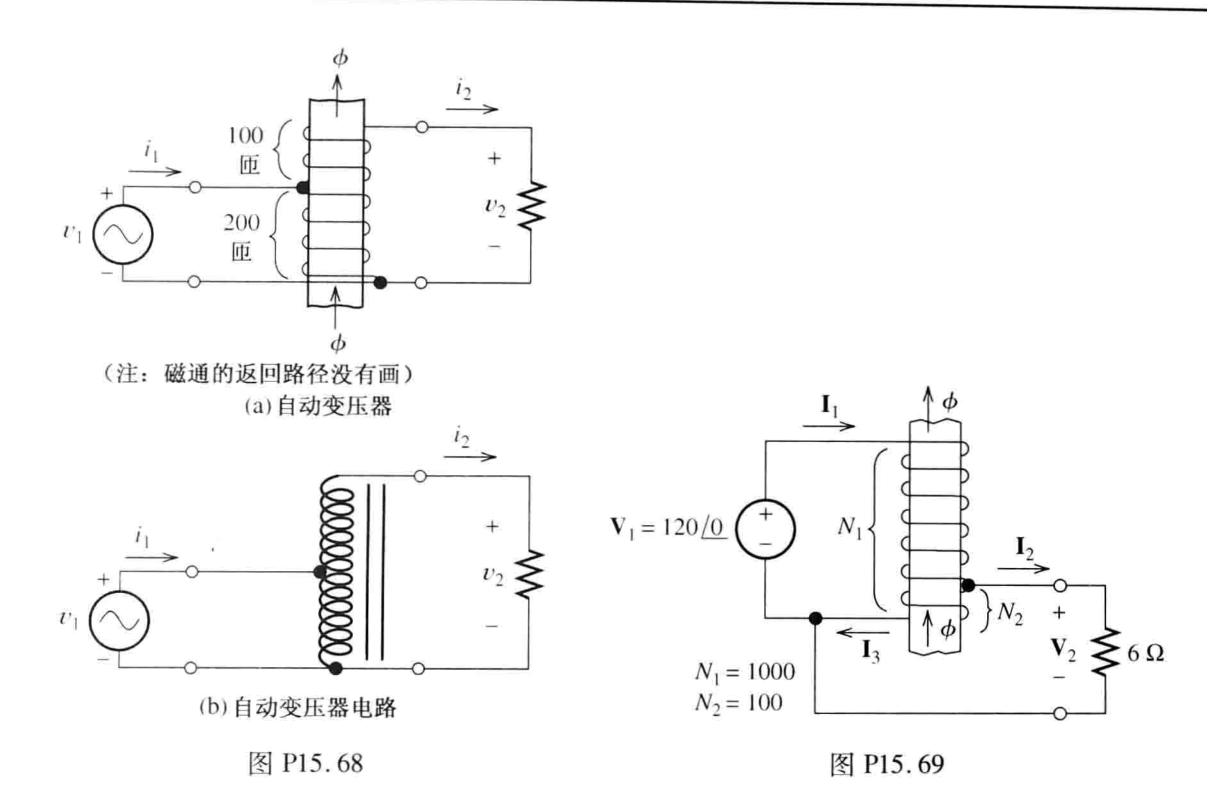


图 P15.68　　　　图 P15.69

15.6 节　实际变压器

* P15.70　画出实际变压器的等效电路图。简要讨论该电路中的元件。

P15.71　理解对理想变压器的假设，即 $v_2 = (N_2/N_1)v_1$。从理论上说，如果直流电压被施加到理想变压器的一次侧，二次绕组将会出现一个直流电压。然而，实际变压器对于直流电压无效。用图 15.28 加以解释。

P15.72　一个频率为 60 Hz、容量为 20 kVA、电压有效值之比为 8000/240 V 的变压器有如下参数：

原边电阻（一次侧电阻）	R_1	15 Ω
二次侧电阻	R_2	0.02 Ω
一次侧漏电抗	$X_1 = \omega L_1$	120 Ω
二次侧漏电抗	$X_2 = \omega L_2$	0.15 Ω
励磁电阻	$X_m = \omega L_m$	30 kΩ
铁损电阻	R_c	200 kΩ

确定当负载功率因数为 0.8 时调整率和功率效率。

* P15.73　重复习题 P15.72 的问题。负载为 2 kVA（即额定容量的 10%），功率因数为 0.8。用一个表格来列出调整率和功率效率，并对结果加以说明。

P15.74　当负载开路且一次侧电压为额定电压时，一个 60 Hz，20 kVA，8000/240 V 的变压器一次侧电流为 0.315 A 并吸收了 360 W 功率。利用这些数据可以确定图 15.29(b) 中的哪些元件的数据？将这些数据计算出来。

P15.75　习题 P15.74 中变压器二次侧短路而一次侧电压减小。若在一次侧施加有效值 500 V 的电压，一次侧电流有效值为 2.5 A（即额定的一次电流），变压器吸收的功率为 270 W，考查图 15.29(b) 的等效电路图。在额定情况下，L_m 和 R_c 的电流和功率可以忽略。解释其原因。确定一次侧总漏感 $(L_1 + a^2L_2)$ 和总电阻 $(R_1 + a^2R_2)$。

P15.76　一个住宅由表 15.1 所示的变压器供电。这个住宅每个月用 400 kWh 的电。从利用效率来说，表中哪个等效电路最高效？你必须为获得答案而做一些正确的判断和假设。

* P15.77　通常，变压器设计成工作时恰好使磁通密度峰值低于铁芯材料饱和点。为什么我们不设计成远低于饱和点？抑或远高于饱和点？假设电压电流额定值相同。

P15.78 有一频率为60 Hz的变压器。其一、二次侧额定电压分别为4800 V和240 V。变压器额定容量为10 kVA。现在我们将此变压器用于120 Hz。讨论在新的频率下为了能正确额定运行应考虑的因素。(注意，通过最好的应用变压器材料，使磁通密度峰值在两种频率下都接近饱和。)

测试题

这里有一组测试，可以帮助你检查是否对本章内容有了很好的理解。答案在附录E中，完整的解决方法包括在学生资源文件之中。更多信息请参阅附录F，以获取学生资源。

T15.1 考查图15.3中的一个右手笛卡儿坐标系。一条导线沿着x轴正反向携带12 A电流。正z方向有磁通密度为0.3 T的磁场。(a)确定长为0.2 m的导线产生的力及其方向。(b)如果磁场区域指向x轴正方向，重复问题(a)。

T15.2 假设有一个10匝边长为25 cm的正方形线圈位于xy平面内。另有一个磁通密度为$0.7\sin(120\pi t)$ T的沿着正z方向的磁场。磁通量在x，y，z方向均恒定。计算线圈中的感应电压。

T15.3 一根20 cm长的导线以15 m/s的速度在一个0.4 T的恒定磁场中运动。导线、运动方向、磁场方向三者相互垂直。计算导线引起的感应电压。

T15.4 考查图T15.4所示磁路。铁芯的相对磁导率为1500。(a)谨慎地估计气隙中的磁通密度。(b)确定线圈的电感。

图 T15.4

T15.5 假如有一交流电流流过一缠绕在铁芯上的线圈。通过铁芯材料的能量转化为热能命名两种机理。对于每种情况而言，怎样选择铁芯材料以使功耗最小？每种功耗跟交流电流的频率有何关系？

T15.6 考查图T15.6所示的电流，其中$R_s=0.5\ \Omega$，$R_L=1000\ \Omega$，$N_1/N_2=0.1$。(a)确定开关断开时的电压电流。(b)开关闭合时重复(a)的计算。

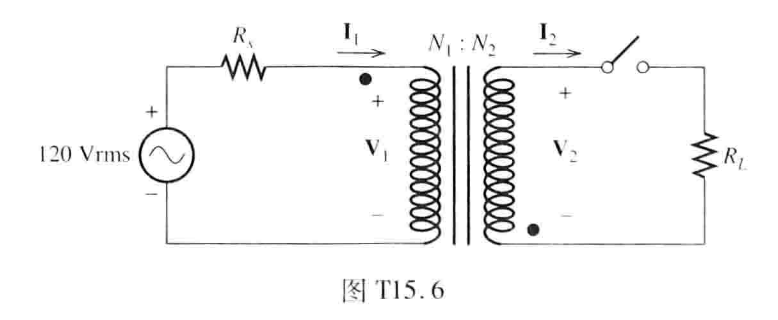


图 T15.6

T15.7 若安排你选择一个变压器为负载提供峰值为100 kW的功率，该负载在很多的时间内吸收峰值功率而在其他时间吸收很少的功率。变压器A和B同时满足要求。当A和B在负载处于峰值时效率相同，A的功耗主要由于铁芯损耗而B的功耗主要由于线圈电阻。从成本的角度来看，哪个变压器更合适？为什么？

第16章 直流电机

本章学习目标

- 掌握直流电机的选择
- 理解直流电机的机械特性
- 掌握用直流电机等效电路分析直流电机特性
- 理解直流电机铭牌数据
- 理解各直流电机的运行性能

本章介绍

在本章中，电动机将电能转换为机械能；反之，发电机将机械能转化为电能。大多数电机或者作为电动机或者作为发电机使用。

电动机用于驱动我们日常生活中的大量的电器，如计算机硬盘、冰箱、自动车库门、洗衣机、食品搅拌器、真空除尘器、DVD播放器、排风扇、自动窗、车雨刮水器、电梯等。电动机的工业应用包括处理疏松物质、电器运转、泵、岩石粉粹机、风扇、空气压缩机和起重机等。在需要机械能的场合下，无论需要小功率还是大功率，电动机是最好和最普遍的选择。对机械系统设计人员而言，熟悉和掌握各种电动机的外特性、选择合适的电动机来驱动机械系统是很重要的。

16.1 电动机概述

本章将介绍多种类型的电动机，本节先概述电动机的性能参数以及运行特性，然后再详细讨论直流电动机。第17章将介绍交流电动机。本节将频繁引用三相感应电动机为例，因为其得到了最广泛的应用，但是，本节介绍了大量概念也适用于其他类型的电动机。

16.1.1 基本结构

电动机主要由两部分构成：定子和转子。其中，转子是电动机的转动部分，是通过一个转轴将电动机和机械负荷连接起来。此转轴和转子被轴承支撑，使得二者能够自由转动，如图16.1所示。

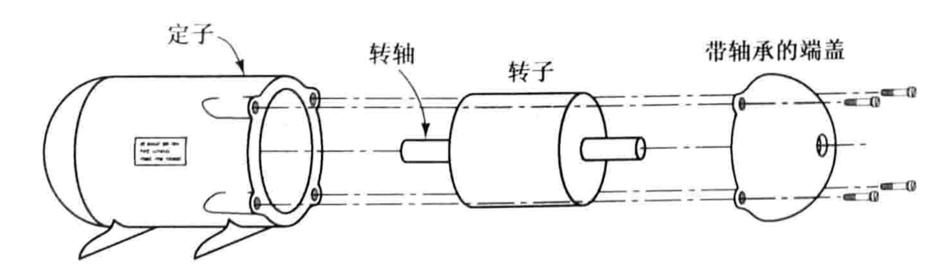


图16.1 电动机的组成

不同类型的电动机的电枢线圈缠绕方式不同，有缠绕在定子上的，也有缠绕在转子上的，

还有两者都有的。线槽开在定子和转子上，线槽内有导线绕组及导线间的绝缘。各绕组内的电流建立磁场，并相互作用产生转矩。

通常，定子和转子为铁磁材料以增强磁场。而作为变压器，如果需要磁场在铁磁材料中随时间而变换，为减少因涡流造成的能量损耗，铁磁材料都由铁芯片叠加而成。(在一些电机的某些部位，电磁场是稳定的，就不必要将铁芯分片了。)

几种常见类型的电动机特性见表16.1。虽然表中的许多项可能还觉得陌生，但是，当仔细阅读完本章和下一章时，会发现该表格就是一个比较各种电动机的有用工具，也是当你为设计某个系统而选择合适电动机的一个很方便的开端。

表16.1　各类电动机的比较

		类型	能量范围(马力)	转子	定子	评价和应用
交流电动机	三相电动机	异步(感应电动机)	1~5000	鼠笼式	三相电枢绕组	结构简单，坚固耐用；非常普遍；风扇，泵
				绕线式		调转子阻抗可以调速度，如起重机
		同步电动机	1~5	永磁场		精确调速，如传送机
			1000~50 000	直流励磁绕组		恒定大负荷；需要功率因数校正
	单相电动机	异步电动机	$\frac{1}{3}$~5	鼠笼式	主绕组和辅助绕组	几种类型：分相式启动和电容式启动。结构简单，经久耐用。如家用的风扇、抽水机、冰箱
		同步电动机	$\frac{1}{10}$或更少	磁阻或磁滞	电枢绕组	低扭矩，固定转速，如定时应用
直流电动机	励磁磁场	并联式	10~200	电枢绕组	励磁线圈	如工业应用的磨床、起重机
		串联式				具有低转速下的高扭矩；如果不加载会出现危险。如钻机，自启动电动机(大量的单相交流电动机均具有较高的功率/重量比)
		串并联混合式				电动机的机械特性可定制，如牵引电动机
	永久磁场		$\frac{1}{20}$~10	电枢绕组	永久磁铁	在伺服系统中的应用、机床，电脑的外设，汽车风扇

16.1.2　电枢和励磁绕组

一个电机可以包含几种线圈绕组。在大多数电机结构中，线圈绕组要么是励磁绕组，要么是电枢绕组(对应感应电动机，我们没有把线圈分为电枢绕组和励磁绕组，而是分为定子绕组和转子导体)。励磁绕组的作用就是在电机中建立起磁场。励磁绕组中的电流大小与加在电动机上的机械负荷无关(串联式电动机除外)。另一方面，电枢线圈中的电流大小取决于机械负荷功率。典型地，当机械负荷很轻时，电枢线圈电流小；当机械负荷重时，电枢线圈电流大。如果电机作为发电机使用，则电流从电枢绕组输出。而在另外一些电动机中，电磁场由永久磁铁产生，无须励磁绕组。

表16.1描述了部分常见电机的励磁绕组和电枢绕组的位置(定子或转子)。如在三相同步交流电动机中，励磁绕组是加在转子上的，而电枢绕组是加在定子上的。在其他电动机中，如绕线磁极式直流电动机，激励绕组和电枢绕组的位置正好相反。表16.1便于在学习本章和下一章时随时查找不同类型电机的信息，不至于引起混淆。

16.1.3　交流电动机

电动机可以通过直流或者交流电源供电，交流电源可以是单相的，也不可以是三相的。(三相交流电源和电路已经在 5.7 节讨论过)。另外，交流电动机还有以下几种分类。

1. 异步(感应)电动机：因为结构相对简单、耐用、运行特性好，是最常用的电动机类型。
2. 同步电动机：当电源的频率恒定(通常能够满足)时，无论负载转矩是多少，该电动机的转速一定。三相同步发电机给全世界发出大量的电能。
3. 各种专用电动机：在美国，大约有 2/3 的电能被电动机所消耗。当然，这部分能量中有一半以上是被感应电动机消耗的。因此，交流感应电动机的应用很普遍，本书将在第 17 章讨论各种类型的交流电动机。

16.1.4　直流电动机

由直流电源提供能量的电动机称为直流电动机。直流电动机的棘手问题之一就是如何将交流电转化为所需的直流电，因为电力配电网均为交流电。如果需要使用直流电动机但只有交流电源，则必须使用整流器或者其他转换器将交流电转换为直流电，因此就增加了系统的费用。所以，为方便实际需要，交流电动机常常是优先选择。

直流电动机在汽车方面的应用是例外，因为易于从电池获取直流能量。直流电动机可用作汽车启动，驱动汽车挡风玻璃的雨刮器、风扇、电动窗等。

多数直流电动机的电枢线圈的电流方向随转子转动而周期性变换，该变换由安装在定子上的电刷和安装在转轴上的换向器构成。换向器由彼此绝缘的两部分导体构成。每个换向片连接到(转子上的)电枢线圈，电刷总是连接着换向器。随着换向器的转动，电刷连接不同部位，从而改变线圈中的电流方向。这部分内容后面还会详细描述。注意，直流电动机的显著缺点是：电刷和换向器容易磨损，需要频繁对这部分进行维护。

近年来，直流电动机的一个显著优势就是其方向和速度比交流电动机更容易控制。但是，随着电子系统已经能够方便、经济地改变交流电源的频率，该优势已不复存在，这些变频电源已经广泛应用于感应式交流电机进行速度控制。

不过，在直流电源容易得到之处，直流电动机仍应用于某些控制系统，例如交通车辆。在本章末，我们将详细探讨各类直流电动机。

16.1.5　电动机的损耗、额定功率和效率

图 16.2 描述了能量从三相电源通过一台感应电动机传递给机械负荷(比如泵)的过程。由于线圈电阻、磁滞和涡流等损耗存在，一部分电能会损失掉(转变成热)。类似地，转变成机械能的部分电能也因摩擦和风的阻力(如转子和转轴附近风的运动)而损失电能。因风的阻力而损耗掉的电能有时是有意设计的，以便让风叶(固定安装于转子转轴)转动实现致冷作用。

设由三相电源供电，输入电能 P_{in}，单位为瓦特(W)，则有

$$P_{\text{in}} = \sqrt{3}V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}\cos(\theta) \tag{16.1}$$

其中，V_{rms} 为线电压有效值，I_{rms} 是线电流的有效值，$\cos\theta$ 是功率因数。

机械输出功率为

$$P_{\text{out}} = T_{\text{out}}\omega_m \tag{16.2}$$

其中，P_{out}是输出功率，单位为瓦特(W)；T_{out}是输出转矩，单位是牛顿·米；ω_m是输出转轴的角速度，单位是弧度/秒。

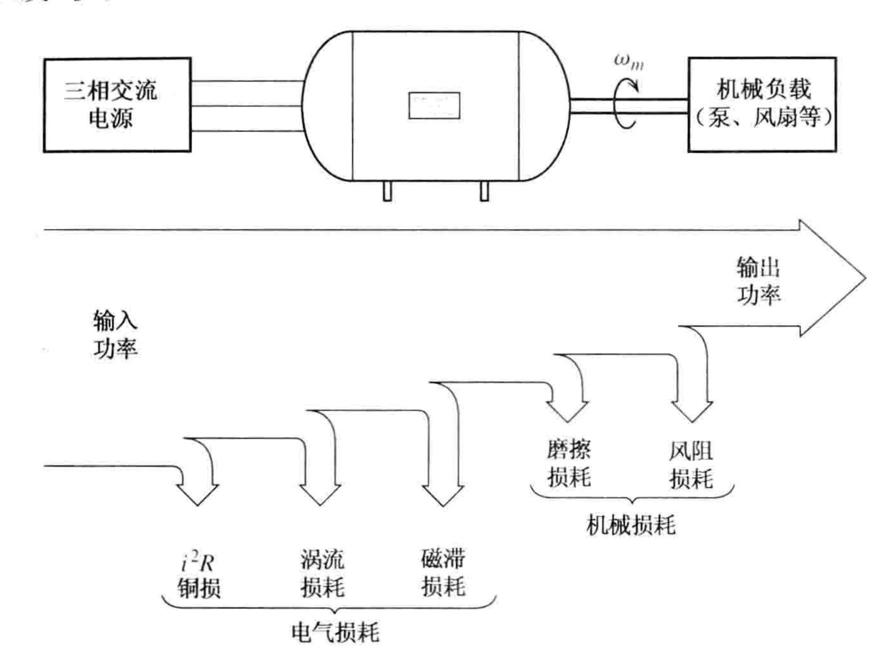


图 16.2 从三相电源经过感应式电机到机械负荷的能量传动。
由于多种原因，在传动过程中造成某些功率损失

角速度可以由转速n_m(转/分)或者ω_m(弧度/秒)表示，其转换关系为

$$\omega_m = n_m \times \frac{2\pi}{60} \tag{16.3}$$

单位为英尺·磅的转矩也可以用牛顿·米替代，二者的关系为

$$T_{\text{foot-pounds}} = T_{\text{newton-meters}} \times 0.7376 \tag{16.4}$$

在美国，电动机的机械输出功率常用马力表示，马力和瓦特的功率转换为

$$P_{\text{horsepower}} = \frac{P_{\text{watts}}}{746} \tag{16.5}$$

电动机的额定功率指的是连续安全运行的输出功率。例如，可以用5马力的电动机带动5马力的机械负荷；如果负荷所需能量减少，那么电动机从电源处获取的输入能量也将减少，对于感应式电机，其转速会稍微加快。因机械负荷不同，电动机输出功率的范围从零到几倍的额定功率，由设计者来确保电动机不会超负荷运行。

因电损耗引起电动机温度上升会限制电动机的输出功率。因此，只要不导致温度急剧上升，短暂的超负荷是可以接受的。

电动机的效率可由下式给出：

$$\eta = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \times 100\% \tag{16.6}$$

比较好的电动机运行在接近额定功率时，效率一般为85% ~95%。反之，如果电动机输出功率远小于额定功率，则该电动机效率会很低。

16.1.6 电动机的机械特性

设想一个三相感应电动机驱动一个负载(如泵)。图16.3所示为转矩和转速的关系曲线。

在稳定状态，电动机产生的转矩等于负载需要的转矩。

在第 17 章，我们将分析感应式电动机的转矩 - 转速曲线是如何产生的。如图 16.3 所示为驱动负荷所要求的转矩。假设系统最初静止，然后，闭合连接电动机的电源，电源刚接通时电动机低速运行，电动机产生的转矩远大于负荷转矩，超出的转矩导致电动机加速。最终，当电动机产生的转矩和负载转矩相等时，电动机转速稳定。

现在分析三相感应式电动机的机械(转矩-转速)特性，如图 16.4 所示，负荷为一台起重机。当电动机的启动转矩小于负载所需转矩时，电动机不会转动。在这种情况下，电动机获得大电流，除非保险丝和保护设备切断电源，否则电动机将由于过热而被烧坏。

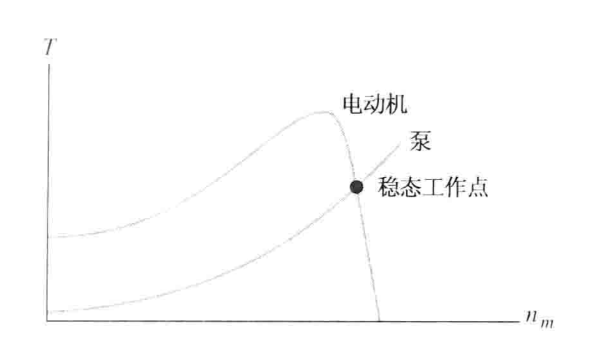


图 16.3 负载为泵的感应式电动机的机械特性

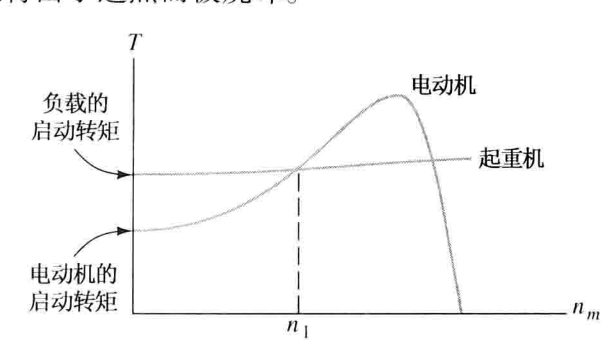


图 16.4 该系统无法有载启动一静止物，因为电动机的启动转矩不能小于负载转矩

即使图 16.4 所示电动机不能启动负载，但只要电动机在带负荷状态下的运动速度超过 n_1，那么在机械离合器下就能够启动负载。

各种类型的电动机有不同的机械特性，如图 16.5 所示。设计者要掌握如何根据负荷需要选择一台合适的电动机。

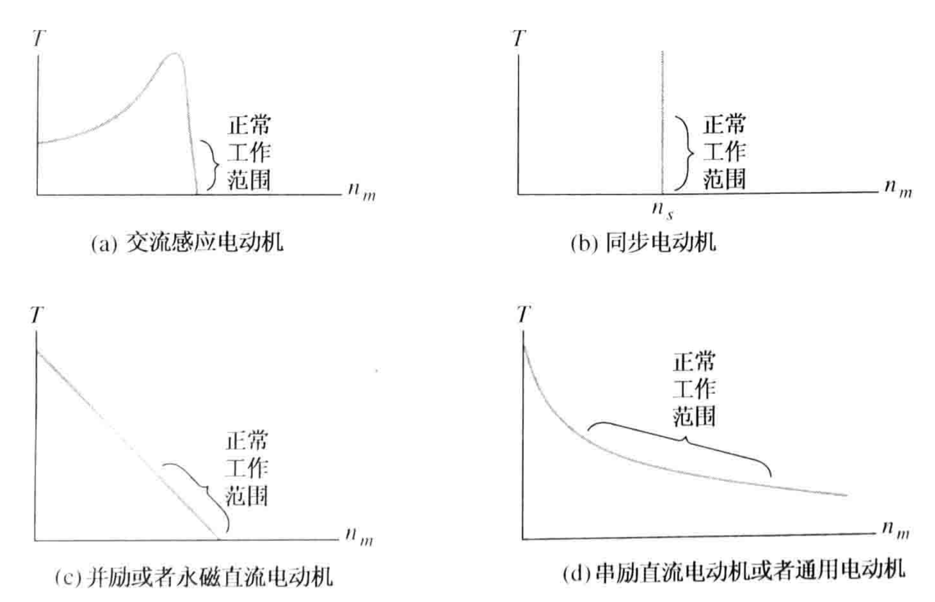


图 16.5 常见电动机的机械(转矩 - 转速)特性曲线

16.1.7 电动机的调速

由电动机的机械特性可知，随着负荷的增加，电动机的转速会降低。电动机的调速率定义为空载与满载时的转速之差除以满载转速的百分比值：

$$调速 = \frac{n_{空载} - n_{满载}}{n_{满载}} \times 100\% \tag{16.7}$$

16.1.8 同步电动机的运行特性

交流同步电动机的机械特性如图 16.5(b)所示。同步电动机的运行速度为一常数并由下式给出：

$$\omega_S = \frac{2\omega}{P} \tag{16.8}$$

其中，ω 是交流电源的角频率，P 是电机的磁极数(这类电机的内部结构将在 17.3 节中介绍)，将角速度转换成转速 n 的表达式如下：

$$n_S = \frac{120f}{P} \tag{16.9}$$

其中，f 为交流电源的频率，单位为赫兹。

磁极数 P 总是偶数，将 P 的各个值代入式(16.9)，并假设电源频率为 60 Hz，则电动机可能的转速有 3600 rpm、1800 rpm、1200 rpm、900 rpm 等。如需输出其他转速，则不适合选择同步电动机。(电子系统中的交 - 交变频器可将 60 Hz 转变为任一频率的电源，这样，在增加变频器费用后，可得到任意转速的同步电动机。)

如图 16.5(b)所示，同步电动机的启动转矩为零，因此，需要增加启动措施。一种方法是：首先减小负荷，以感应式电动机运行，直到电动机转速接近同步转速时，再通过开关切换至同步电动机运行。

16.1.9 感应式电动机的运行特性

感应式电动机典型的机械特性如图 16.5(a)所示，该类电动机启动转矩好。在正常运行时，感应式电动机的实际运行速度要稍小于同步转速，同步转速由式(16.8)和式(16.9)计算。例如，一典型的磁极数为 4(P = 4)的感应式电动机在满负荷情况下运行速度为 1750 转/分，而在空载情况下，转速接近 1800 转/分。之前关于同步电动机转速限制的描述同样适用于感应式电动机。

启动时，感应电动机的电流比额定负载状态下的电流大许多倍。为避免大电流启动，大功率的感应电动机通常采取降压启动。但是，电动机转矩取决于所用电压，在给定转速下，感应式电动机的转矩正比于电压的平方。若电动机启动电压是额定电压的一半，此时产生的转矩只是额定转矩的 1/4。

16.1.10 并励直流电动机的运行特性

直流电动机含有定子上的励磁绕组和转子上的电枢绕组，因励磁绕组和电枢绕组可以接成并励或串励，而两者的机械特性完全不同。本章将对此进行分析和测试。

并励直流电动机的机械特性如图 16.5(c)所示。并励直流电动机有很大的启动转矩且启动电流大，通常将一个电阻串联在电枢绕组上来限流，以便产生合适的启动电流值。

对固定的电源电压和固定的励磁电流，并励直流电动机在正常运行范围内的转速变化极小。不过，可以通过几种方法来改变机械特性以实现转速控制。与感应电动机和同步电动机不同，直流电动机的转速不受限制。

16.1.11　串励直流电动机的运行特性

串励直流电动机的机械特性如图16.5(d)所示。串励直流电动机有适中的启动转矩和启动电流，随着负载变化，其转速可在很宽的范围内自动调节。因为在负荷增重时电动机转速下降，和其他类型电动机相比，它的输出功率更接近一个常数。这是此类电动机的优点，因为即使负载转矩变化范围很大，电动机仍然能够工作在额定功率状态下。汽车的启动电动机就是串励直流电动机，当发动机冷而硬时，启动器开始低速运行；相反，当发动机温热时，启动器比较快速地旋转。无论哪种情形，从电池获得的电流都在正常使用范围内。(另外，如果没有这种精确控制，则并励电动机在冷和硬两种状态下都将试图保持恒速运行，并且产生极大的启动电流。)

在某些场合，串励直流电动机在空载下速度会很大，可能达到引起危险的状态。如果存在失去机械负荷的可能，则需要一套控制系统来切断电动机和电源的连接。可以采用一种有用的交流电动机作为通用电动机，其性能与串励直流电动机非常相似。

例16.1　电动机性能计算

某台三相电动机工作在额定满负荷下，输入三相电源的线电压有效值为440 V，产生线电流有效值6.8 A，功率因数为滞后0.78(即$\cos(\theta)=0.78$)，输出功率为5马力，电动机转速为1150转/分。空载时，电动机转速为1195转/分，线电流为1.2 A，功率因数为滞后0.3。试求满负荷的功率损耗和效率，空载下的输入功率和转速调整率。

解：将额定输出功率5马力转化为瓦特单位：

$$P_{\text{out}} = 5 \times 746 = 3730\ \text{W}$$

代入式(16.1)，得满负荷下的输入功率为：

$$\begin{aligned} P_{\text{in}} &= \sqrt{3}V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}\cos(\theta) \\ &= \sqrt{3}(440)(6.8)(0.78) = 4042\ \text{W} \end{aligned}$$

功率损耗为

$$P_{\text{损耗}} = P_{\text{in}} - P_{\text{out}} = 4042 - 3730 = 312\ \text{W}$$

满负荷下的效率为

$$\eta = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \times 100\% = \frac{3730}{4042} \times 100\% = 92.28\%$$

空载下有：

$$\begin{aligned} P_{\text{in}} &= \sqrt{3}(440)(1.2)(0.30) = 274.4\ \text{W} \\ P_{\text{out}} &= 0 \\ P_{\text{loss}} &= P_{\text{in}} = 274.4\ \text{W} \end{aligned}$$

效率为

$$\eta = 0\%$$

代入式(16.7)，得转速调整率为

$$\begin{aligned} \text{转速调整率} &= \frac{n_{\text{空载}} - n_{\text{满载}}}{n_{\text{满载}}} \times 100\% \\ &= \frac{1195 - 1150}{1150} \times 100\% = 3.91\% \end{aligned}$$

前面概述了电动机，接下来将仔细讨论最常见、用途最广泛的电动机，在本章的其他部分将讨论直流电动机，第17章将讨论交流电动机。

练习 16.1 某一直流电动机工作在满负荷下，以 220 V 直流电源供电，输出功率为 50 马力，转速为 1150 转/分。在空载状态下，转速为 1200 转/分。试求满载下的电源电流、效率和转速调整率。

答案：$I_{电源}$ = 184.8 A，η = 91.76%，转速度调节 = 4.35% 。

练习 16.2 机械特性如图 16.5 所示。问：(a)哪一类型电动机在启动时带重(大惯性)负荷的能力最弱？(b)在正常运行范围内，哪类电动机有最差的转速调整率？(c)哪类电动机具有最好的转速调整率？(d)哪类电动机既有大的启动转矩又有好的转速调整率？(e)哪类电动机在空载情形下无法运转？

答案：(a)同步电动机，因为其启动转矩为零；(b)串励直流电动机；(c)同步电动机；(d)交流感应式电动机；(e)串励直流电动机，因为若负载转矩为零，转速会很大。

16.2 直流电机的工作原理

16.2.1 工作原理

直流电机的理想线性模型如图 16.6 所示，本节以该模型来介绍直流电机的基本工作原理。之后我们将看到旋转直流电机的运行特性与简单的线性电机非常相似。在图 16.6 中，一直流电压源 V_T连接着一个开关和一个电阻 R_A，$t=0$ 时开关闭合，接通两根可移动的滑条。假设导线和滑条之间无摩擦，导线与滑条的电阻为零，一磁场垂直纸面方向向内穿入导线和滑条构成的平面。

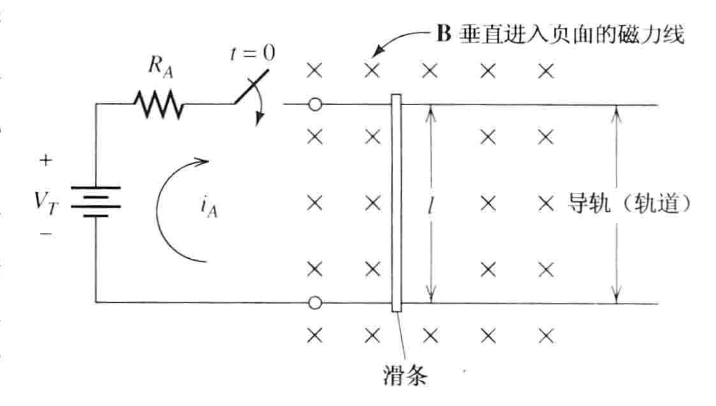


图 16.6 由连接两根导线的滑条构成的简易直流电动机模型

设开关闭合前滑条是静止不动的。在 $t=0$ 开关闭合时，起始电流 $i_A(0_+) = V_T/R_A$ 顺时针流过电路，那么滑条上受一电磁力：

$$\mathbf{f} = i_A \mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{16.10}$$

滑条电流方向为从上往下，则电磁力的方向向右。因为电流和磁场相互垂直，则电磁力计算如下：

$$f = i_A l B \tag{16.11}$$

电磁力使得滑条朝右加速。当滑条加速到速度 u 并切割磁力线时，在滑条上感应出电压，电压极性为滑条上端为正，大小由式(15.9)给出(表达式符号不同)：

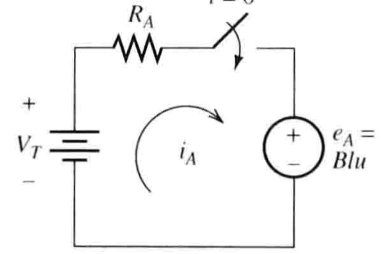


图 16.7 线性电机以电动机状态运行时的等效电路

$$e_A = Blu \tag{16.12}$$

该模型等效电路如图 16.7 所示，其中感应电压 e_A 和电源电压方向相反，电流为

$$i_A = \frac{V_T - e_A}{R_A} \tag{16.13}$$

当滑条获得速度时，通过感应电压吸收能量转化为滑条动能，最终，感应电压数值等于电源电压，即 $e_A = V_T$，滑条获得最大速度，此时电流和电磁力变为零，滑条以一恒定速度运行。

16.2.2　电动机运行

假设一机械负荷向正在向右移动的滑条施以朝左的力，那么滑条速度将慢慢下降，导致感应电压 e_A减小，电流顺时针在电路中流动，导致在滑条上的电磁力朝右。最终，当滑条所受电磁力等于机械力时，系统以一恒定速度运行。

在这种情形下，电源 V_T 通过的电能一部分通过电路上的电阻 R_A转化为热量，另一部分则转化为机械能。转化为感应电压的功率 $p = e_A i_A$，转化为机械能的功率 $p = fu$。

16.2.3　发电机运行

假设滑条以一固定速度运行，有感应电动势 $e_A = V_T$，电流为零。如给滑条施加一向右的外力，使得滑条加速向右，而且速度越来越快，这将导致感应电压 e_A超过电源电压 V_T，如图 16.8 所示电路中电流逆时针流动。因为电流反向，滑条上受到的电磁力朝左，最终外力等于感应电磁力，滑条速度恒定。此时，感应电压发出的功率 $p = e_A i_A$，一部分转化为电阻消耗的功率（$p_A = R_A i_A^2$），另一部分转化为电池电能（$p_T = V_T i_A$）。这样，机械能转化为电能，电能的一部分成为电阻上的功率损耗，其余大部分储存在电池中。

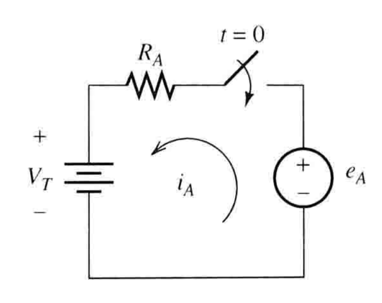


图 16.8　线性电机作为发电机运行的等效电路

例 16.2　理想电机

设理想电机如图 16.6 所示，已知 $B = 1$ T，$l = 0.3$ m，$V_T = 2$ V，$R = 0.05\ \Omega$。(a)设 $t = 0$ 时滑条静止不动，试求滑条上的初始电流和初始力。如果没有机械负荷加在滑条上，求滑条的最终(即稳态时)速度。(b)设将 4 N 的机械负载加在滑条上，方向朝左。当系统达到稳定时，试求滑条速度、电源电压 V_T发出的功率、机械负载获得的功率、电阻 R_A消耗的功率以及效率。(c)设将 2 N 外力直接加在滑动着的滑条上，方向朝右。当系统达到稳态时，试求滑条速度，机械功率、电源发出功率，电阻 R_A消耗的功率以及效率。

解：

(a)最初因为 $u = 0$，有 $e_A = 0$，最初电流为

$$i_A(0+) = \frac{V_T}{R_A} = \frac{2}{0.05} = 40\ \text{A}$$

滑条受到的最初力：

$$f(0+) = Bli_A(0+) = 1(0.3)40 = 12\ \text{N}$$

在空载下达到稳定状态时，感应电压等于电源电压，有

$$e_A = Blu = V_T$$

将电压值代入并求解速度 u 为

$$u = \frac{V_T}{Bl} = \frac{2}{1(0.3)} = 6.667\ \text{m/s}$$

(b)由于机械力阻碍滑条运动，让电机运转达到稳定状态，此时电磁力等于负荷力，有

$$f = Bli_A = f_{\text{load}}$$

代入负荷值求电流，得

$$i_A = \frac{f_{\text{load}}}{Bl} = \frac{4}{1(0.3)} = 13.33\ \text{A}$$

由图 16.7 所示电路，可得：

$$e_A = V_T - R_A i_A = 2 - 0.05(13.33) = 1.333\ \text{V}$$

可求得稳定状态下的速度为

$$u = \frac{e_A}{Bl} = \frac{1.333}{1(0.3)} = 4.444\ \text{m/s}$$

分配给负荷的机械功率为

$$p_m = f_{\text{load}} u = 4(4.444) = 17.77\ \text{W}$$

电源发出的功率为

$$p_t = V_T i_A = 2(13.33) = 26.67\ \text{W}$$

电阻消耗功率为

$$p_R = i_A^2 R = (13.33)^2 \times 0.05 = 8.889\ \text{W}$$

作为检验，在舍整误差范围内有 $p_t = p_m + p_R$。最后，从电源电能转化为机械能的效率为

$$\eta = \frac{p_m}{p_t} \times 100\% = \frac{17.77}{26.67} \times 100\% = 66.67\%$$

(c)将一外力朝右作用在滑条上，滑条加速运行，感应电压超过电源电压 V_T，电流在电路中逆时针流动，如图 16.8 所示。此时，电动机运行在发电机状态。稳态下，滑条所受电磁力等于外力，即有

$$f = Bli_A = f_{\text{pull}}$$

代入外力值，解得电流 i_A 为

$$i_A = \frac{f_{\text{pull}}}{Bl} = \frac{2}{1(0.3)} = 6.667\ \text{A}$$

由图 16.8 所示电路，得

$$e_A = V_T + R_A i_A = 2 + 0.05(6.67) = 2.333\ \text{V}$$

稳态下的滑条速度为

$$u = \frac{e_A}{Bl} = \frac{2.333}{1(0.3)} = 7.778\ \text{m/s}$$

外力发出的机械功率为

$$p_m = f_{\text{pull}} u = 2(7.778) = 15.56\ \text{W}$$

转化为电能的功率为

$$p_t = V_T i_A = 2(6.667) = 13.33\ \text{W}$$

电阻消耗功率为：

$$p_R = i_A^2 R = (6.667)^2 \times 0.05 = 2.222\ \text{W}$$

在舍整误差范围内，可以验证 $p_t = p_m + p_R$，最后机械能转化为电能的效率为

$$\eta = \frac{p_t}{p_m} \times 100\% = \frac{13.33}{15.56} \times 100\% = 85.67\%$$

由例 16.2 可知，施加一个适中的电磁力(12 N)会在导体上产生一个相当大的电流(40 A)。

可通过增长滑条来增强电磁力，但这将增大电机的尺寸。另外一种方法就是增强磁场强度。但事实是在电机中的磁性材料会在 1 T 附近产生磁饱和，所以通过增加磁场来达到增大电磁力是不切实际的。

另外，由很多条导体构成的圆柱形转子在紧凑型结构设计中是切实可行的，而且，在实际应用中旋转运动比其他形式的运动应用更宽泛，即绝大多数（并非所有）实际电动机都基于旋转运动，在本章剩余部分将研究旋转直流电动机。

练习 16.3　如果将例 16.2 中的磁场增加到 2 T，试计算例 16.2 中的各个问题。

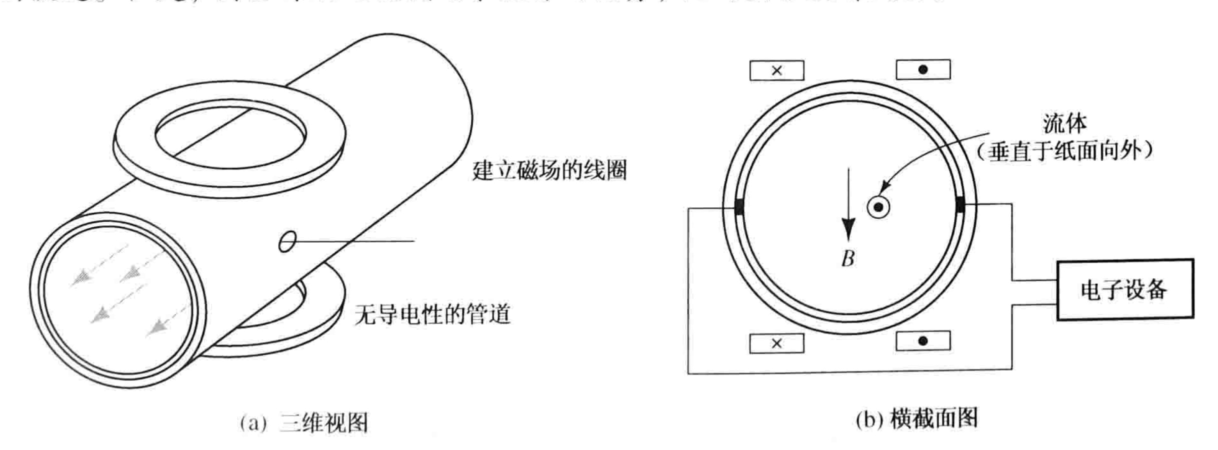
答案：(a) $i_A(0_+) = 40$ A，$f(0_+) = 24$ N，$u = 3.333$ m/s；(b) $i_A = 6.667$，$e_A = 1.667$，$u = 2.778$ m/s，$p_m = 11.11$ W，$p_t = 13.33$ W，$p_R = 2.22$ W，$\eta = 83.33\%$；(c) $i_A = 3.333$ A，$e_A = 2.167$ V，$u = 3.612$ m/s，$p_m = 7.222$ W，$p_t = 6.667$W，$p_R = 0.555$ W，$\eta = 92.3\%$

实际应用 16.1　电磁流量计，法拉第，猎杀红十月号

流量计可用来测量通过管子的液体流速，在控制化学过程的系统中此传感器是非常重要的，其中一个比较普遍的应用就是磁流量计（简称 magflow），其工作原理类似于 16.2 节讲述的线性电机。

电磁流量计如图 PA16.1 所示，线圈在液面上建立一个垂直磁场，电极位于管子的另一端，它由绝缘材料（如陶瓷或环氧树脂）包裹。这样，磁场方向、液体流向和电极方向三者相互垂直。当导电的流体穿过磁场时，与流体速度成正比的电压在电极间感应出来。流量等于管子的横截面积和流速的乘积。因此，该仪器可以测量感应电压，同时也能由单位体积流量来标定。

法拉第意识到用电磁感应法则来测量水流的可能性，他试图从桥上悬下设备来测量泰晤士河的流速。但是，因当时缺乏现代电子设备的优势，他的实验没有成功。



(a) 三维视图　　(b) 横截面图

图 PA16.1　磁流量计

在现代计量中，电子放大器常用来放大感应电压。在许多设备中，感应电压常被模数转化器转换为数字信号，然后经微机处理，数据被显示或者送往中控计算机。

如果流体的导电性弱，从电极两端看过去的戴维南电阻很大，那么需要一个输入阻抗很大的放大器；否则，随着流体的电导率改变，观察到的电压将不同，导致流速计量不准确。当然，化学工程师理解这一局限对使用电磁流量计是很重要的。即使存在这一局限，但设计精巧的磁流量计还是可以在一个很广的范围内使用的。

作为一个仪表，磁流量计也可以作为发电机用。不过，如果在两极间的液体通过一个电流，

它也可以作为电动机用。这样，在磁场和电流相互作用下产生一直接施加在流体上的力。当然，如果需要建立一个这样的泵，需要一个具有高电导率的流体(如海水)，还需要强磁场以及大电流。通过上述方案修正，就能建立起一个大功率泵。由汤姆·克兰西写的《猎杀红十月号》(*The Hunt for Red October*)中的超静音潜艇推进器的工作原理就是这样。因为此系统产生的动力是平稳而直接作用于海水的，不需要产生振动的旋转器件和阀，所以整个系统超静音。

资料来源：Ian Robertson, "Magentic flometers: the whole story," *The Chemical Engineer*, February 24, 1994, pp. 17-18; The Magmeter Flowmeter Homepage, http://www.magmeter.com.

16.3 旋转直流电机

前面已分析了线性电机，熟悉了直流电机的基本原理。本节将介绍旋转直流电机的基本原理。

16.3.1 转子和定子结构

直流电机最普遍的类型包括一个圆柱形定子，其磁极数为偶数 P，磁极由一个励磁绕组或永久磁铁建立，在定子周围构成南北极交替变化的磁场。

转子在定子内部，由硅钢片叠压构成圆柱形，用轴承固定电动机的转轴，使转子的转动带动转轴旋转。转子壁上开有直凹槽，用来镶嵌电枢绕组(其余结构特征略)，如图 16.9 所示。

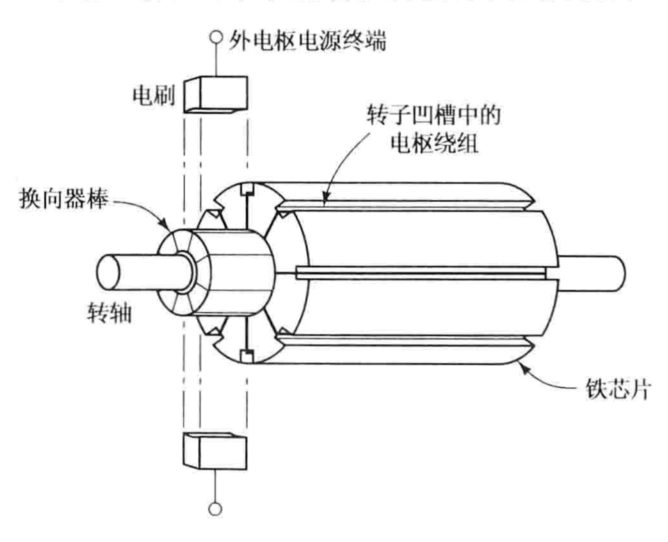


图 16.9 直流电机转子的组成(转轴、换向器棒、电刷、外电枢电源终端、转子凹槽中的电枢绕组、铁芯片)

两磁极电机的横截面图展示了气隙中的磁力线(磁通)，如图 16.10 所示。磁通倾向经过磁阻小的路径，由于空气的磁阻比铁的磁阻大得多，所以气隙中的磁通所走的路径是定子到转子之间的最短距离，即气隙磁通垂直于转子表面，也垂直于励磁导体。而且，每一磁极表面的磁通密度值接近一个常数。在磁极之间，气隙中的磁通密度很小。

外部电源给电动机的励磁绕组和电枢绕组提供电流，电流方向如图 16.10 所示，产生一逆时针转矩，并作用在电枢绕组上。以上论述可通过式 $\mathbf{f} = i\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ 来计算力的大小加以证明。

极数为 4 的电机的结构横截面如图 16.11 所示。注意，电枢绕组中南极的电流方向应该与北极的电流方向相反，才能产生转矩。

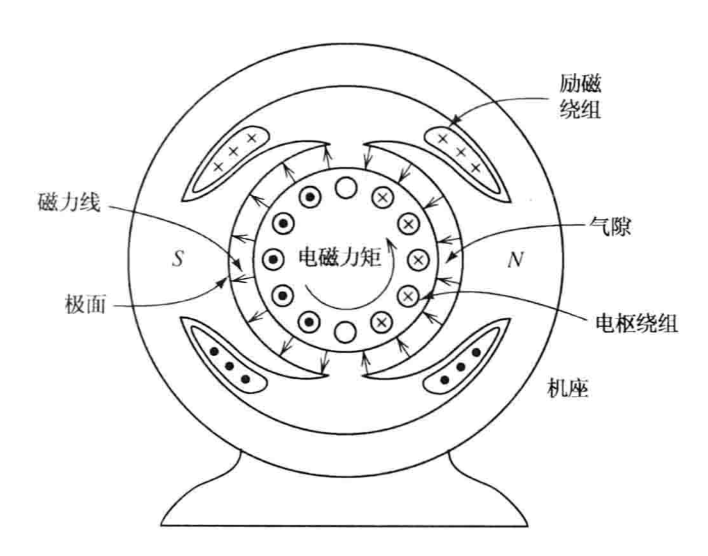


图16.10　两极直流电机的横截面图(极面、磁力线、励磁绕组、气隙、电枢绕组、机座)

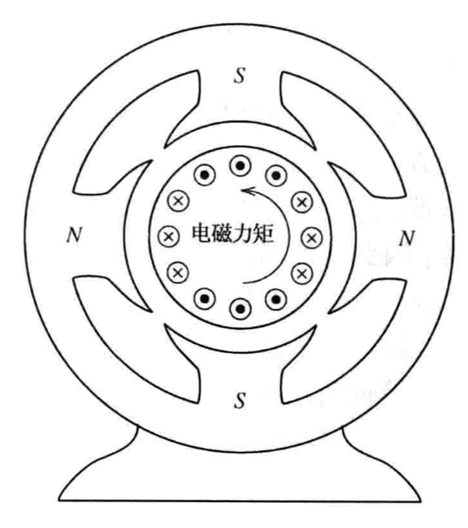


图16.11　极数为四直流电机的横截面图(电磁力矩)

16.3.2　感应电压和换向

随着转子的转动，导体切割定子绕组产生磁力线。在极面上，电枢绕组中导体电流、磁场以及导体的运动方向三者必须相互垂直，如同16.2节讲述的线性电机。同时，随着电枢绕组的转动，在电枢绕组端感应出电压，但转到电磁场不同极之间时，磁场方向反向。因此，感应电压降至零后再建立相反极性的电压。一个机械开关——换向器可以改变导体的连接从而改变感应电压的极性，并且确保对外感应电压是恒定的。

这里用包含一个电枢绕组的两极电机来演示上面的过程，如图16.12所示。在这种情况下，电枢绕组的两端连接固定在转轴上的换向器。换向器的两片彼此绝缘且和转轴绝缘(为了更准确地说明，图中强调换向器里的电刷，在实际电机中，电刷覆在换向器的外表面，更真实的电刷和换向器如图16.9所示)。

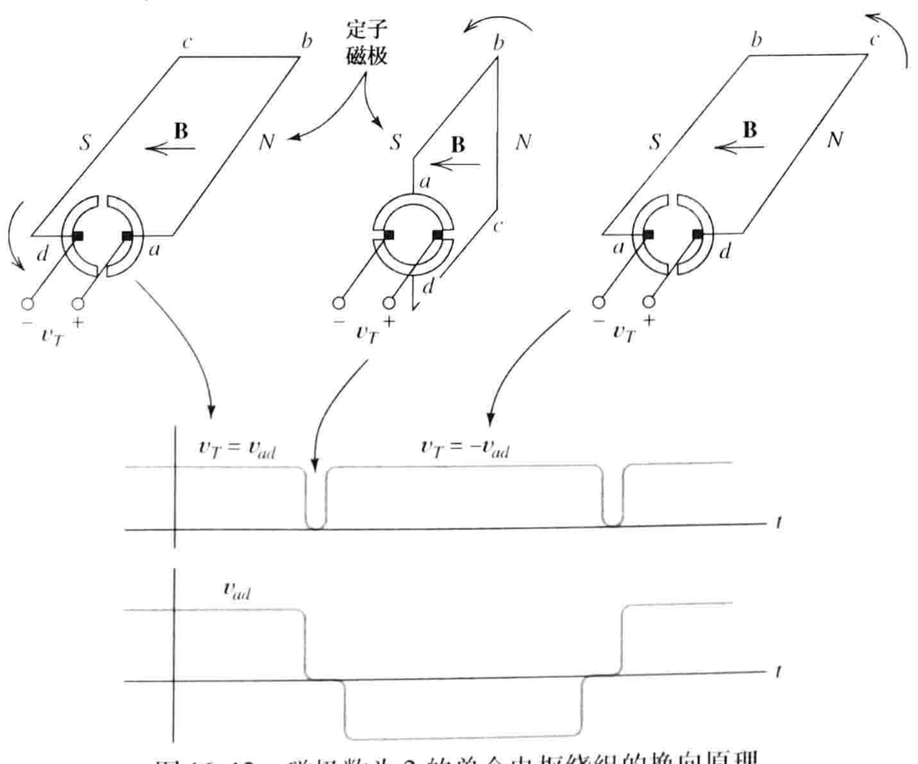


图16.12　磁极数为2的单个电枢绕组的换向原理

如图 16.12 所示，左边电刷连接定子磁极南极下的电枢线圈，右边电刷连接北极下的电枢线圈。

在电枢绕组两端感应出的电压 v_{ad} 是交流电压，如图 16.12 所示。前面提到，当导体垂直于磁极方向时，流过线圈的磁通密度为零，则感应电压为零。当导体顺着磁极方向时，磁通密度为常数，感应出的电压有效值也接近一个常数。随着转子的转动，换向器将外部与绕组的连接反接，因此从外部看去的电压 u_T 的极性不变。

注意，电刷在换向过程中起到短接电枢绕组的作用，因为电刷比换向器的绝缘片要宽。因此，短接过程不会引起问题，前提是换向时电压值非常小。(实际电动机有各种措施来确保线圈电压在换向瞬间接近于零。)

一般电动机中的换向器含有 20 ~ 50 片换向片，在每次换向瞬间只有部分线圈需要换向，因此实际情况下电动机的端电压比上述由两片换向片构成的换向器的换向电压波动要小得多。实际直流电机的端电压如图 16.13 所示。

通常，换向片是由彼此绝缘并且与轴绝缘的铜片做成的。电刷含有石墨，起到润滑触头的作用。正因如此，直流电机的一大不足之处在于必须定期更换电刷并且重新调整电刷表面，因为电刷被反复磨损消耗。

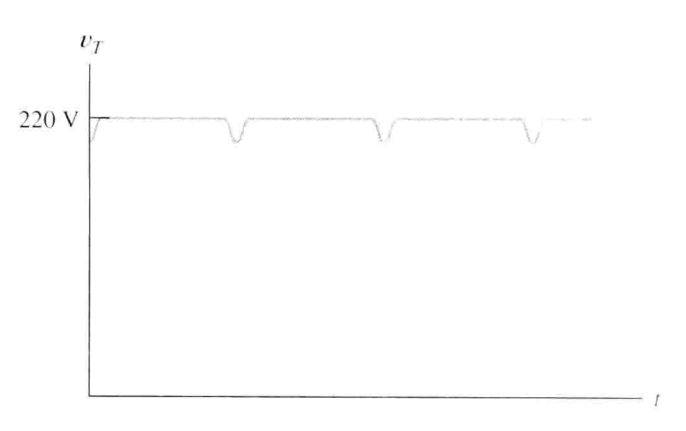


图 16.13　实际直流电机产生的电压。由于每次仅有几根(少量的)导体被换向，电压波动比起图16.12所示的要小

实际电枢绕组是由大量导线组成的，围绕转子周边安放。为输出较高的端电压，许多导线串联成绕组线圈。另外，通常有几组电流平行穿过电枢绕组，导线与换向器之间的连接结构特殊，造成电流从相反方向流进定子的南磁极，而流出定子的北磁极。前面讲到，导线的电磁力才能产生辅助转矩。导线与换向器的具体结构本书不予讨论。作为电动机用户，掌握其外特性比掌握其内部结构细节更重要。

16.3.3　直流电动机的等效电路

直流电机的等效电路如图 16.14 所示，励磁电路可等效为一电阻 R_F 和电感 L_F 串联。在稳态下，电流为一常数，直流电路中电感视作短路，因此感抗作用可忽略，有

$$V_F = R_F I_F \tag{16.14}$$

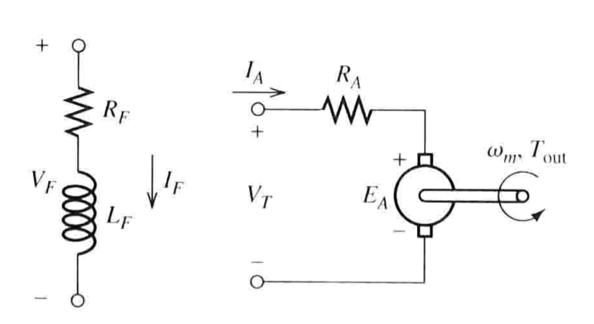


图 16.14　旋转直流电机的等效电路

等效电路中的电压 E_A 是因导体切割磁力线而在电枢绕组中感应出的电压平均值。电动机中的 E_A 有时又称为电动势(电动力)，因为它总是阻碍外电源的作用。电阻 R_A 是电枢绕组和电刷的等效电阻之和。(有时，电枢绕组可等效为电压降约 2 V 的直流电源而不是一个电阻，但在本教材中，都用电阻 R_A 表示电压降的存在。)

感应出的电枢电压由下式给出：

$$E_A = K\phi\omega_m \tag{16.15}$$

其中，K 是机械系数，大小取决于机械设计中各结构参数，ϕ 是每个定子绕组产生的磁通量，ω_m 是转子的角速度。

电动机中的电磁转矩表达式如下：

$$T_{\text{dev}} = K\phi I_A \tag{16.16}$$

其中，I_A是电枢绕组电流。(后面将看到，直流电动机的输出转矩小于电磁转矩，因为摩擦和其他旋转损耗的存在。)

电磁功率表示转化为机械力的功率部分，是电磁转矩与角速度的乘积，由下式给出：

$$P_{\text{dev}} = \omega_m T_{\text{dev}} \tag{16.17}$$

这个电磁功率也可以由感应电压得出：

$$P_{\text{dev}} = E_A I_A \tag{16.18}$$

16.3.4　直流电动机的磁化曲线

直流电机磁化曲线是指电机在恒定转速下的感应电动势 E_A 和流经的励磁电流 I_F 的关系曲线图。(E_A 是电枢绕组两端的开路电压。)典型直流电动机的磁化曲线如图 16.15 所示。

因为 E_A 正比于磁通 ϕ，所以磁化曲线的形状与磁通 ϕ 和电流 I_F 的关系曲线(取决于磁路的参数值)一致。当励磁电流过大时铁芯磁饱和，因此磁化曲线会趋于水平。当然，不同的电机会有不同的磁化曲线。

如图 16.15 所示，电枢绕组感应电压 E_A 正比于电机的转速。如果转速为 n_1 时对应感应电压 E_{A1}，转速为 n_2 时对应感应电压 E_{A2}，则有

$$\frac{E_{A1}}{E_{A2}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{16.19}$$

式(16.14) ~ 式(16.19)，以及图 16.14 所示等效电路和磁化曲线，都是分析直流电机的基本工具。

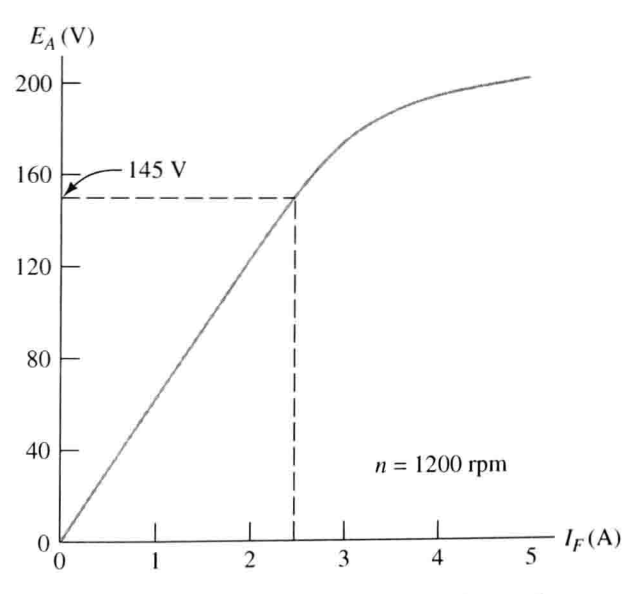


图 16.15　一台电压 200 V、功率 10 马力的直流电动机的磁化曲线

例 16.3　直流电机性能的计算

某一直流电机有如图 16.15 所示磁化曲线，在转速为 800 转/分时，电枢绕组电流 I_A = 30 A，励磁绕组电流 I_F = 2.5 A。假设电枢绕组电阻 0.3 Ω，励磁绕组电阻 R_F = 50 Ω。试求励磁绕组上的电压 U_F、电枢绕组电压 U_T、电磁转矩和电磁功率。

解：由式(16.14)可得励磁绕组上的电压为

$$V_F = R_F I_F = 50 \times 2.5 = 125 \text{ V}$$

由磁场曲线可得 I_F = 2.5 A，转速 n_1 = 1200 转/分，感应电压 E_{A1} = 145 V，代入式(16.19)，电枢绕组转速 n_2 = 800 转/分，电压 E_{A2} 为

$$E_{A2} = \frac{n_2}{n_1} \times E_{A1} = \frac{800}{1200} \times 145 = 96.67 \text{ V}$$

电动机角转速为

$$\omega_m = n_2 \times \frac{2\pi}{60} = 800 \times \frac{2\pi}{60} = 83.78 \text{ rad/s}$$

整理式(16.15),有

$$K\phi = \frac{E_A}{\omega_m} = \frac{96.67}{83.78} = 1.154$$

由式(16.16),可得电磁转矩为

$$T_{\text{dev}} = K\phi I_A = 1.154 \times 30 = 34.62 \text{ Nm}$$

电磁功率为

$$P_{\text{dev}} = \omega_m T_{\text{dev}} = 2900 \text{ W}$$

运用式(16.18)计算电磁功率进行检验,有:

$$P_{\text{dev}} = I_A E_A = 30 \times 96.67 = 2900 \text{ W}$$

对于图 16.14 所示的电枢绕组电路,应用基尔霍夫电压定律,可得:

$$V_T = R_A I_A + E_A = 0.3(30) + 96.67 = 105.67$$

练习 16.4 如图 16.15 所示某电机的磁化曲线。若 $I_F = 2$ A,$n_1 = 1500$ 转/分,试求电压 E_A。

答案: $E_A \approx 156$ V

练习 16.5 如图 16.15 所示某电机的磁化曲线。若电机的转速 $n_1 = 1500$ 转/分,电磁功率是 10 马力,$I_F = 2.5$ A。电枢绕组电阻 0.3 Ω,励磁绕组电阻 $R_F = 50$ Ω,试求电磁转矩,电枢绕组电流 I_A 及施加在电枢绕组上的电压 U_T。

答案: $T_{\text{dev}} = 47.49$ Nm,$I_A = 41.16$ A,$U_T = 193.6$ V。

接下来将讨论转矩-转速(机械)特性曲线,其取决于励磁绕组和电枢绕组及电源的连接方式。

16.4 并励与他励直流电动机

一台并励直流电动机的励磁绕组和电枢绕组并联,如图 16.16 所示。励磁等效电路中有一变阻器 R_{adj} 和反映励磁绕组的电感相串联。我们将在后面看到通过变阻器调节电动机的转矩-速度(机械)特性。

假设电动机由一直流电压 V_T 供电,电枢绕组电阻为 R_A,感应电压为 E_A,电机转轴的角速度为 ω_m,电磁转矩为 T_{dev}。

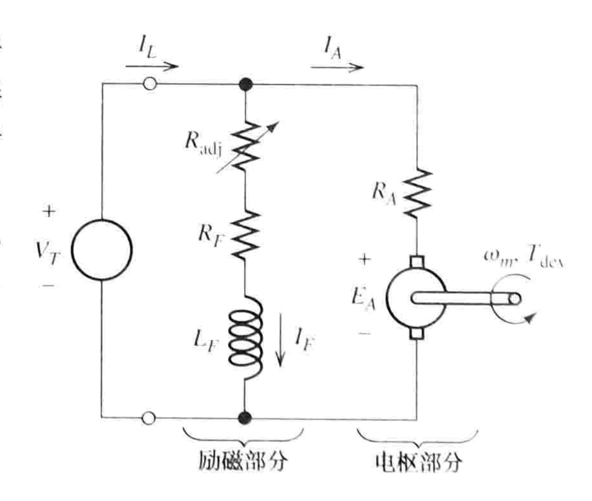


图 16.16 并励直流电动机的等效电路,变阻器 R_{adj} 常用来调节电机转速

16.4.1 并励直流电动机的功率分流过程

图 16.17 是并励直流电动机的功率分流过程图,电源提供输入功率,是端电压和线电流 I_L 的乘积:

$$P_{\text{in}} = V_T I_L \tag{16.20}$$

一部分能量用来建立磁场，另一部分能量被励磁电路吸收转化为热量散失，励磁功率损耗由下式给出：

$$P_{\text{field-loss}} = \frac{V_T^2}{R_F + R_{\text{adj}}} = V_T I_F \tag{16.21}$$

电枢绕组的电阻的功耗转化为热量，如下式：

$$P_{\text{arm-loss}} = I_A^2 R_A \tag{16.22}$$

通常，我们把电枢与励磁功耗这两部分的总和称为铜损。

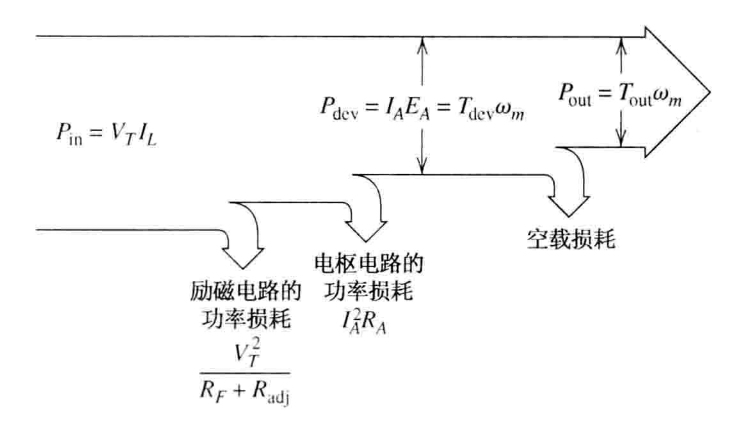


图 16.17 并励直流电动机的功率分流过程图

通过电枢感应电压转化为机械形式的功率称为电磁功率，如下式：

$$P_{\text{dev}} = I_A E_A = \omega_m T_{\text{dev}} \tag{16.23}$$

其中，T_{dev} 就是电磁转矩。

输出功率 P_{out} 和输出转矩 T_{out} 分别小于电磁功率和电磁转矩，因为转轴存在机械损耗，包括摩擦损耗、风阻损耗、涡流损耗、磁滞损耗。转动功耗几乎和电动机的转速成正比。

16.4.2 并励直流电动机的机械特性

接下来讨论并励直流电动机的机械特性。对如图 16.16 所示的等效电路应用基尔霍夫电压定律，可得：

$$V_T = R_A I_A + E_A \tag{16.24}$$

由式(16.16)可得：

$$I_A = \frac{T_{\text{dev}}}{K\phi} \tag{16.25}$$

将式(16.15)和式(16.25)代入式(16.24)，可得：

$$V_T = \frac{R_A T_{\text{dev}}}{K\phi} + K\phi\omega_m \tag{16.26}$$

最后得到电磁转矩关系式如下：

$$T_{\text{dev}} = \frac{K\phi}{R_A}(V_T - K\phi\omega_m) \tag{16.27}$$

这是我们希望看到的机械特性曲线。注意，如图16.18所示，该曲线近似为直线，并且图中标注了空载转速(例如$T_{dev}=0$时)以及堵转转矩。大多数电动机的正常工作状态是介于机械特性曲线中转速接近同步转速的那部分区域。

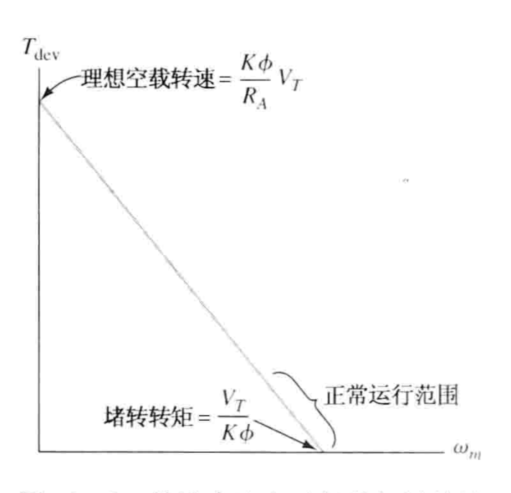


图16.18 并励直流电动机的机械特性

例16.4 并励直流电动机

该电动机的功率为50马力，其磁化特性曲线如图16.19所示。外加直流电压$V_T=240$ V，电枢绕组的电阻$R_A=0.065\ \Omega$，励磁绕组的电阻$R_F=10\ \Omega$，变阻器$R_{adj}=14\ \Omega$。在转速为1200转/分时，机械损耗为$P_{rot}=1450$ W。如果此电动机的功能是起重机，要求电动机的输出转矩为$T_{out}=250$ N·m，试求电动机的转速和效率。

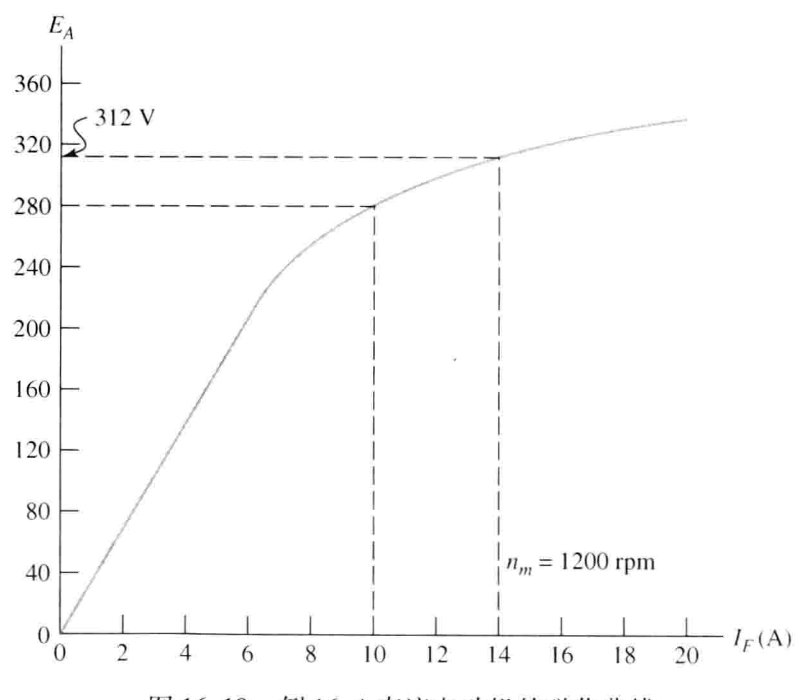


图16.19 例16.4直流电动机的磁化曲线

解：图16.20为该电动机的等效电路，励磁电流由下式给出：

$$I_F=\frac{V_T}{R_F+R_{adj}}=\frac{240}{10+14}=10\ \text{A}$$

现在，利用磁化曲线来找出励磁电流$I_A=10$ A所对应的机械系数$K\phi$。在$n_m=1200$转/分，$I_A=10$ A时，所对应的电枢电压$E_A=280$ V，代入式(16.15)，可得$K\phi$为

$$K\phi=\frac{E_A}{\omega_m}=\frac{280}{1200(2\pi/60)}=2.228$$

假设旋转功耗正比于转速，则等效为旋转功耗与转速之比——旋转转矩为常数：

$$T_{rot}=\frac{P_{rot}}{\omega_m}=\frac{1450}{1200(2\pi/60)}=11.54\ \text{Nm}$$

则电磁转矩为

$$T_{dev}=T_{out}+T_{rot}=250+11.54=261.5\ \text{Nm}$$

应用式(16.16)求出电枢绕组电流为

$$I_A = \frac{T_{\text{dev}}}{K\phi} = \frac{261.5}{2.228} = 117.4 \text{ A}$$

对电枢绕组回路应用基尔霍夫电压定律，有

$$E_A = V_T - R_A I_A = 240 - 0.065(117.4) = 232.4 \text{ V}$$

代入式(16.15)，求得

$$\omega_m = \frac{E_A}{K\phi} = \frac{232.4}{2.228} = 104.3 \text{ rad/s}$$

或

$$n_m = \omega_m\left(\frac{60}{2\pi}\right) = 996.0 \text{ rpm}$$

先求出电动机的输出功率和输入功率，然后计算电动机效率：

$$P_{\text{out}} = T_{\text{out}}\omega_m = 250(104.3) = 26.08 \text{ kW}$$

$$P_{\text{in}} = V_T I_L = V_T(I_F + I_A) = 240(10 + 117.4) = 30.58 \text{ kW}$$

$$\eta = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \times 100\% = \frac{26.08}{30.58} \times 100\% = 85.3\%$$

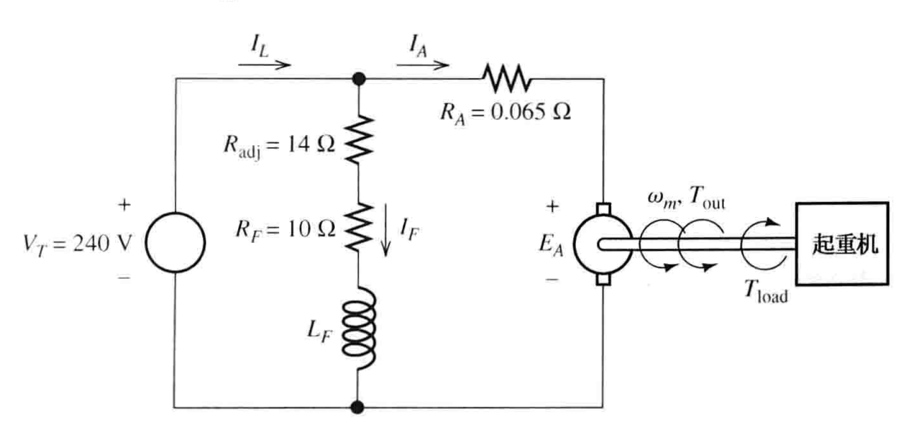


图 16.20　例 16.4 电动机的等效电路

练习 16.6　重复例 16.4，将电动机的外加直流电压增加到 300V，通过增大变阻器值 R_{adj} 保证励磁电流不变，试求 R_{adj} 和电动机的转速。相比例 16.4，它们是否有改变？

答案：$R_{adj} = 20\ \Omega$，转速增加到 $\omega_m = 131.2$ rad/s 或 $n_m = 1253$ rpm。

练习 16.7　重复例 16.4，若变阻器值 R_{adj} 增大到 30 Ω，电动机的外加直流电压 $V_T = 240$ V 保持不变，问电动机的转速是否改变？

答案：$I_F = 6$ A，$E_A = 229.3$ V，$I_A = 164.3$A，$\omega_m = 144.0$ rad/s，$\eta = 88.08\%$，$n_m = 1376$ rpm；可见，随着 R_{adj} 的增加，电动机的转速也增加。

16.4.3　他励直流电动机

他励直流电动机的电枢绕组和励磁绕组分别使用不同的直流电源，其他方面则类似于并励直流电动机，其等效电路如图 16.21 所示。他励直流电动机的分析思路非常类似于并励直流电动机，通过调节两个电源（分别产生电枢磁场和励磁磁场）中的一个可调节电动机转速，这是该类电动机使用两个电源的主要原因。

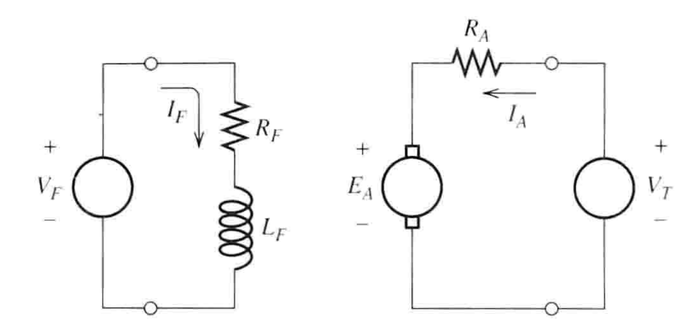


图 16.21 他励直流电动机的等效电路。通过改变两个电源中的一个(V_F或V_T)来控制转速

16.4.4 永磁直流电动机

永磁直流电动机由安装在定子中的磁体而不是励磁线圈提供磁场，除了励磁磁场不能被调节外，其特性类似于他励直流电动机。与励磁电动机相比，永磁直流电动机有以下几个优点：第一，因无需电源建立磁场，该电动机的效率更高；第二，与同等输出功率的励磁电动机相比，永磁直流电动机的体积更小。永磁直流电动机通常称为微型或者小功率电动机，如汽车上的小排气扇和电动车窗就是这类电机的典型应用。

永磁直流电动机也有不足之处。例如，当电枢绕组电流过大或过热时，永磁电动机的磁性会消失。另外，与励磁电动机相比，永磁直流电动机中磁场的磁通密度较小，因此，在同等电枢绕组电流下，永磁电动机产生的转矩要小于励磁电动机。因此，永磁电动机通常仅应用在低转矩、高转速的场合。

16.5 串励直流电动机

串励直流电动机的等效电路如图 16.22 所示，注意，励磁绕组和电枢绕组是串联的。本节将介绍应用于各种场合的串励直流电动机的机械特性。

串励直流电动机的励磁绕组的线径比并励电动机中的导线更大，因此，励磁绕组电阻要小得多，主要是为防止励磁绕组的电压降太大。

接下来，讨论串励直流电动机的转矩与转速之间的关系。这里，我们采用线性关系来近似表示磁通和励磁电流之间的关系：

$$\phi = K_F I_F \tag{16.28}$$

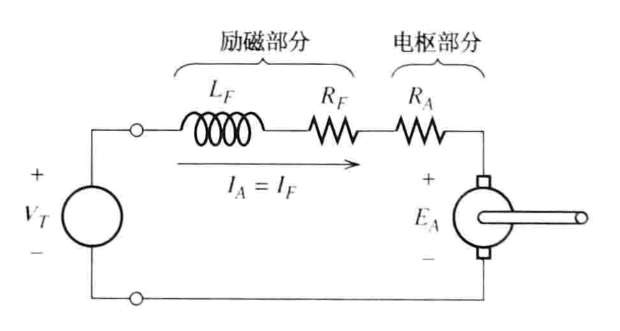


图 16.22 串励直流电动机等效电路

其中，K_F是常数，取决于励磁绕组匝数和磁力线所经回路以及磁性材料的 B-H 磁化曲线。当然，由于铁芯(磁性材料)存在磁饱和现象(ϕ 和 I_F 的关系曲线图形状与电动机的磁化曲线极为类似)，实际的 ϕ 和 I_F 的关系曲线是非线性的。但是，式(16.28)有助于理解串励电动机的特性。后面再讨论磁饱和特性的影响。

因在串联电动机中有 $I_A = I_F$，则

$$\phi = K_F I_A \tag{16.29}$$

将式(16.29)代入式(16.15)和式(16.16)，可得

$$E_A = KK_F\omega_m I_A \tag{16.30}$$

和

$$T_{\text{dev}} = KK_F I_A^2 \tag{16.31}$$

对图16.22所示的等效电路应用基尔霍夫电压定律，有

$$V_T = R_F I_A + R_A I_A + E_A \tag{16.32}$$

通常，假设电动机工作在稳态下，此时电感电压为零。

将式(16.30)代入式(16.32)，得到I_A：

$$I_A = \frac{V_T}{R_A + R_F + KK_F\omega_m} \tag{16.33}$$

最后，将式(16.33)代入式(16.31)，得到机械特性表达式：

$$T_{\text{dev}} = \frac{KK_F V_T^2}{(R_A + R_F + KK_F\omega_m)^2} \tag{16.34}$$

如图16.23所示是串励直流电动机的机械特性曲线，即式(16.34)的曲线以及转矩与转速的实际关系曲线，该图也说明了转动损耗和磁饱和的影响。由式(16.34)可知空载下的电动机转速(换句话说，$T_{\text{dev}}=0$时转速应该为无限大)，但是，转速越高，气隙和涡流造成的转动损耗就越大，所以电动机转速是有限的。

然而在某些情况下，空载转速过大足以构成危险，因此必须要有保护设备，在负载断开时快速断开电动机的供电电源。

在低转速情况下，由式(16.33)可知电流$I_F=I_A$很大，此时出现磁饱和，因此，启动转矩并没有式(16.34)计算的那么大。

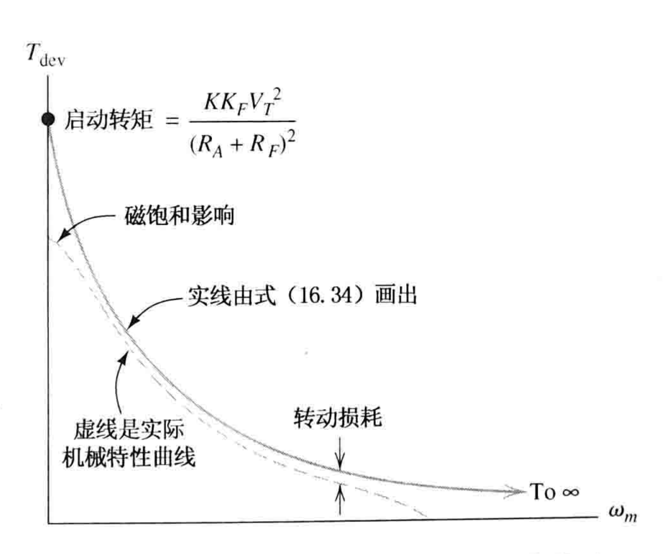


图16.23　串联直流电动机的机械特性曲线图

例16.5　串励直流电动机

一台串励直流电动机在负载转矩为12 N·m时，转速为$n_{m1}=1200$ rpm。忽略绕组的电阻、转动损耗和磁饱和效应，试求输出功率。如果负载转矩增加到24 N·m，试求电动机新的转速和输出功率。

解：忽略各损耗，输出转矩和输出功率分别等于电磁转矩和电磁功率，先求出转速：

$$\omega_{m1} = n_{m1} \times \frac{2\pi}{60} = 125.7 \text{ rad/s}$$

输出功率为

$$P_{\text{dev1}} = P_{\text{out1}} = \omega_{m1} T_{\text{out1}} = 1508 \text{ W}$$

设$R_A=R_F=0\ \Omega$，代入式(16.34)有

$$T_{\text{dev}} = \frac{KK_F V_T^2}{(R_A + R_F + KK_F\omega_m)^2} = \frac{V_T^2}{KK_F\omega_m^2}$$

可见，对于一固定的电源电压V_T，电磁转矩和转速的平方成正比：

$$\frac{T_{\text{dev1}}}{T_{\text{dev2}}} = \frac{\omega_{m2}^2}{\omega_{m1}^2}$$

代入各值求得

$$\omega_{m2} = \omega_{m1}\sqrt{\frac{T_{\text{dev1}}}{T_{\text{dev2}}}} = 125.7\sqrt{\frac{12}{24}} = 88.88 \text{ rad/s}$$

相应地,

$$n_{m2} = 848.5 \text{ rpm}$$

过载下的输出功率为

$$P_{\text{out2}} = T_{\text{dev2}}\omega_{m2} = 2133 \text{ W}$$

练习 16.8 在例 16.5 中,若负载转矩 $T_{\text{dev3}} = 6\ \text{N}\cdot\text{m}$,试求电动机的转速和输出功率。

答案: $P_{\text{out3}} = 1066$ W, $\omega_{m3} = 177.8$ rad/s, $n_{m3} = 1697$ rpm。

练习 16.9 假设一台并励直流电动机,重复例 16.5。(设并励直流电动机为理想的电动机,励磁绕组电阻为无穷大而非零。)

答案: 当 $R_A = 0$ 且电源电压 V_T 一定时,并励直流电动机以一固定速度运行,不受负载影响。那么,$n_{m1} = n_{m2} = 1200$ rpm, $P_{\text{out1}} = 1508$ W, $P_{\text{out2}} = 3106$ W。

通过比较练习 16.9 和例 16.5 的结论,可见,并励直流电动机的输出功率要比串励直流电动机的输出功率大。

通用电动机

式(16.34)表明,串励直流电动机产生的转矩与电源电压平方成正比,转矩方向和电源电压极性无关,因此,直流电动机能在单相交流电源上运行,前提是定子铁芯必须为片状叠置以避免涡流效应引起较大的功率损耗。对交流电源来说,由于励磁绕组和电枢绕组的感抗不为零,因此交流电源提供的电流比直流电源提供的电流在均值上要小。

串励直流电动机被刻意通过交流单相电源来供电,这样的电动机叫作通用电动机,因为这样的电动机既可在直流也可在交流使用。只要发现一台交流供电的电动机具备电刷和换向器,则此电动机就是通用电动机。和单相交流电动机相比,通用电动机具有以下几个优点:

1. 重量相同的通用电动机比其他类型的电动机产生更大的输出功率。这对于便携式工具而言是个巨大优势,应用在小功率场合,如钻头、电锯、搅拌器等。
2. 在不增大启动电流的情况下,通用电动机可产生更大的启动转矩。
3. 如果负载转矩增加,则通用电动机的转速减慢。因此,电动机产生的功率相对稳定,且电流值在可接受的范围内。(相比较而言,并励直流电动机或者交流感应电动机要以一固定转速运行,因此需激增电流来满足大负载转矩。)所以,通用电动机更适合于负载转矩变化大的场合,如钻机和搅拌器。(由于同样原因,串励直流电动机常用在汽车上作为起动器。)
4. 通用电动机可设计为高转速状态运行,若工频电源的频率为 60 Hz,则其他类型的交流电机转速最高限为 3600 rpm。

通用电动机的一个不足之处(也是直流电动机所常有的)就是电刷和转换器的磨损非常快,

从而导致其使用寿命比交流电动机短。因此，相比通用电动机，感应电机更广泛地应用于需长期、频繁使用的产品，如冰箱压缩机、水泵和高炉鼓风机。

16.6 直流电动机的速度控制

几种调节直流电动机速度的常用方法如下：

1. 保持励磁绕组电流为常数，改变为电枢绕组提供的电压；
2. 保持电枢绕组电压为常数，改变励磁绕组电流；
3. 将电枢绕组串联一电阻。

接下来，简略介绍各种调速方式。

16.6.1 改变电枢电压调速

这种调速方式适合于他励直流电机和永磁直流电机，但不适合于并励直流电机，因为励磁电流和磁通都随着 V_T而变化。若电枢绕组电压和励磁绕组电流同时增加，则两者之比相互抵消，导致电机转速基本不变。

一般情形下，可忽略电枢绕组电阻的电压降，有

$$E_A \approx V_T$$

因为

$$E_A = K\phi\omega_m$$

可得

$$\omega_m \approx \frac{V_T}{K\phi} \tag{16.35}$$

可见，当励磁绕组电流为常数时，他励直流电机的转速以及永磁直流电动机的转速与电源电压成正比。

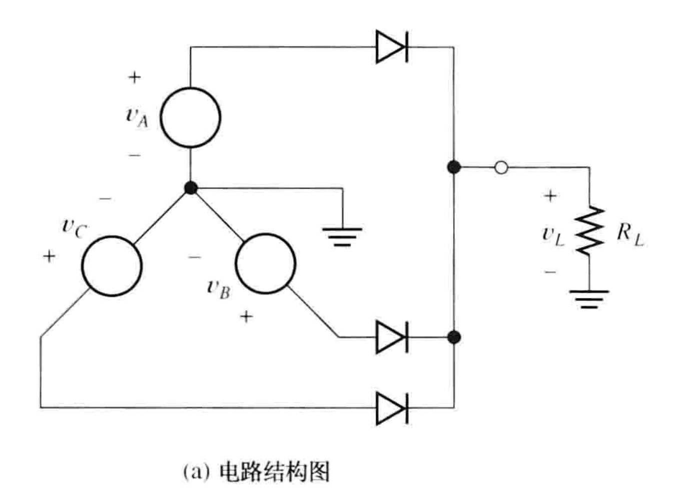
改变供电电源的电压来调速也适用于串励直流电动机，但在这种情况下，磁通不会是固定的。式(16.34)表明，在任意转速下，串励直流电动机的输出转矩与电源电压的平方成正比，根据电动机的机械特性，转速随着供电电压的变化而变化，也就是说，更高的电压产生更快的转速。

16.6.2 改变直流励磁电压的调速

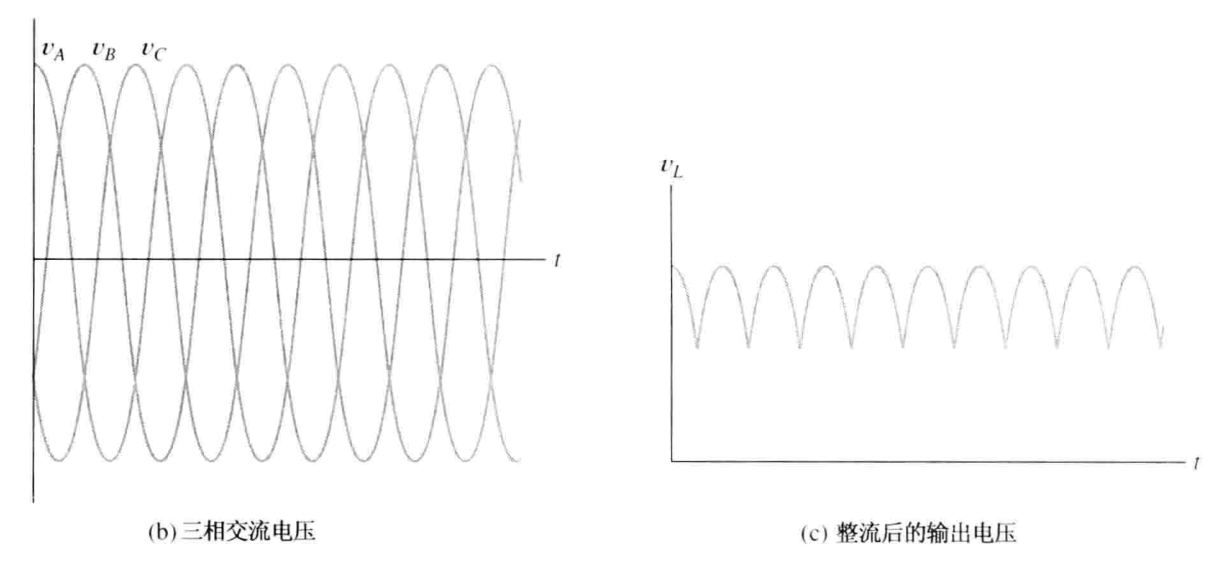
过去从直流发电机上得到可调的直流电压，如曾经应用非常广泛的瓦德－列奥纳德系统，该系统采用一台三相感应式电动机驱动一直流发电机，然后，由直流发电机提供直流电压给需调速的电动机。它通过变阻器或开关来控制直流电源电压的幅值和极性，以此改变直流发电机的励磁电流。这种设计的不足就是需要三个电动机来驱动一个负荷。

随着大功率电子器件的出现，更经济的方案就是用整流器将三相交流电整流为直流电，如图 16.24 所示。整流后的直流电压 v_L含有少量纹波，通过使用六个二极管构成全波整流电路可以得到更平滑的电压波形。无论采用哪种方案，都不必将整流后的直流电压完全去除纹波，因为电感通过电流时的连续性使得电压波形趋向平滑。

一旦获得了稳定的直流电压，用电子开关电路可控制输出给负载的平均电压，如图 16.25 所示。（在第 12 章和第 13 章中，分别展示了如何用电子设备（如 BJTs 和 FETs）作为开关；如何用大功率电子设备（如可控硅整流器）执行开关的功能。）



(a) 电路结构图



(b) 三相交流电压

(c) 整流后的输出电压

图 16.24 将交流转化为直流的三相全波整流电路

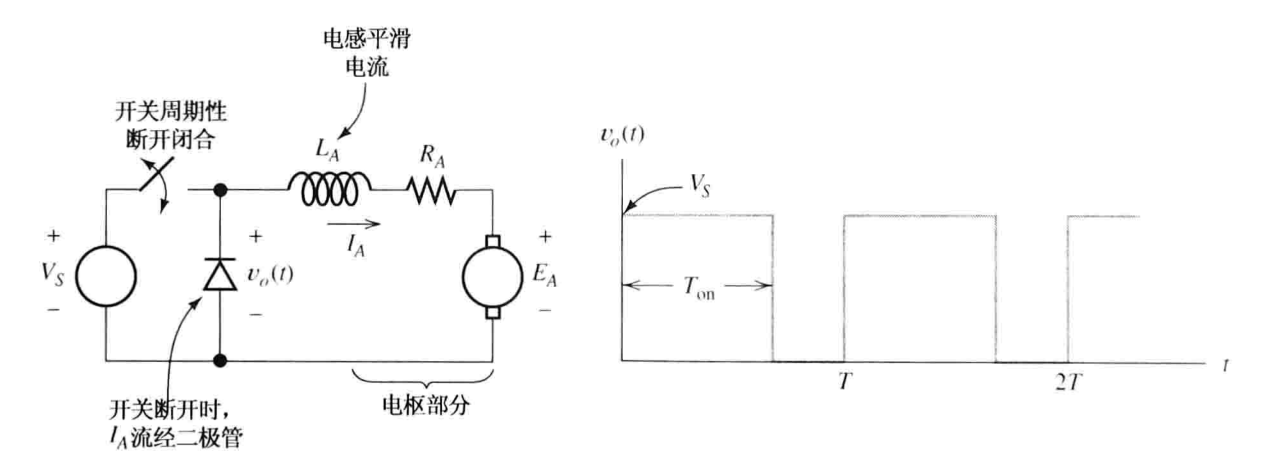


图 16.25 通过一个周期性开闭的电子开关可以有效地将固定的直流电压转化为可调的直流电压并提供给电动机

一个开关周期性地开闭，其周期为 T，闭合时间为 T_{on}，其他为断开时间。当开关断开时，电感 L_A 可能引起电枢电流持续流过。因此，电枢绕组电流 I_A 基本不变，尽管输出电压 $v_0(t)$ 在 0 和 V_s 间快速变换。当开关断开时，二极管给电枢绕组电流提供回路，电动机的电压平均值由下式计算：

$$V_T = V_S \frac{T_{on}}{T} \tag{16.36}$$

这样，通过改变二极管的导通时间来调节电压平均值，达到电动机调速的目的。

16.6.3 改变励磁电流的调速

对于并励电动机和他励电动机，可以改变励磁绕组中的电流达到调速目的。图16.16所示为并励电动机的等效电路，调节变阻器 R_{adj} 可控制励磁绕组中的电流。

另一方面，永磁直流电机有固定的磁通，而串励电动机中励磁绕组电流与电枢绕组电流是相同的，彼此不能独立调节。因此，改变励磁绕组中的电流不适合这两种类型的电动机。

为理解励磁绕组电流对电动机转矩与转速的影响，这里首先复习并励和他励电动机的下列等式

$$E_A = K\phi\omega_m$$

$$I_A = \frac{V_T - E_A}{R_A}$$

$$T_{dev} = K\phi I_A$$

现在考虑一下当 I_F 减小时可能发生的变化（通过增大 R_{adj}）是什么？I_F 减小会导致磁通 ϕ 减小，随即感应电压 E_A 也减小，然后引起 I_A 增大。实际上，与磁通减小的百分比相比，I_A 增大的百分比大得多，因为 V_T 和 E_A 几乎相等。因此，当 E_A 减小时，$I_A=(V_T-E_A)/R_A$ 迅速增加，转矩表达式中的两个参量——磁通和电流的变化相反，即磁通 ϕ 下降，电流 I_A 增加。但是，当 I_F 减小时，I_A 的变化量大得多，因此电动机的转矩迅速增加。（通过比较练习16.7和例16.4的答案，可以得出此结论。）

16.6.4 励磁电路断开的危害

如果将并励和他励直流电动机的励磁电路断开，且磁通下降到接近零，会发生怎样的情况呢？（因剩磁存在，尽管励磁电流为零，但磁场不为零。）结果是，I_A 很大，导致电动机的转速迅速加大。事实上，转速过高有可能破坏电枢解体，成为一堆无用的线圈和换向片，因此，在设计并励和他励电动机时，保护电路是非常重要的，在励磁电流消失时能够自动断开电枢电路。

16.6.5 电枢绕组串电阻调速

直流电动机的另外一种调速方式就是将电枢绕组串联外电阻，这种调速方式适用于各类直流电动机，如并励、他励、串励或者永磁式。如图16.26(a)所示为一台并励电动机的电枢绕组串联电阻的等效电路图，将总电阻标为 R_A，由电枢绕组电阻和调速电阻组成。并励电动机的机械特性由式(16.27)给出，现重复如下：

$$T_{dev} = \frac{K\phi}{R_A}(V_T - K\phi\omega_m)$$

串联了可变电阻的并励直流电动机的机械特性曲线如图16.26(b)所示。在他励和永磁电动机上也有类似结果。

并励和他励直流电动机通常是调节电枢绕组串联的电阻来限制电流大小，以实现电动机的启动与加速控制。

电枢绕组串联电阻调速的不足之处是要消耗能量。当电动机低速运行时，从电源获取的大部分能量通过串联的调节电阻转化为热量消耗。

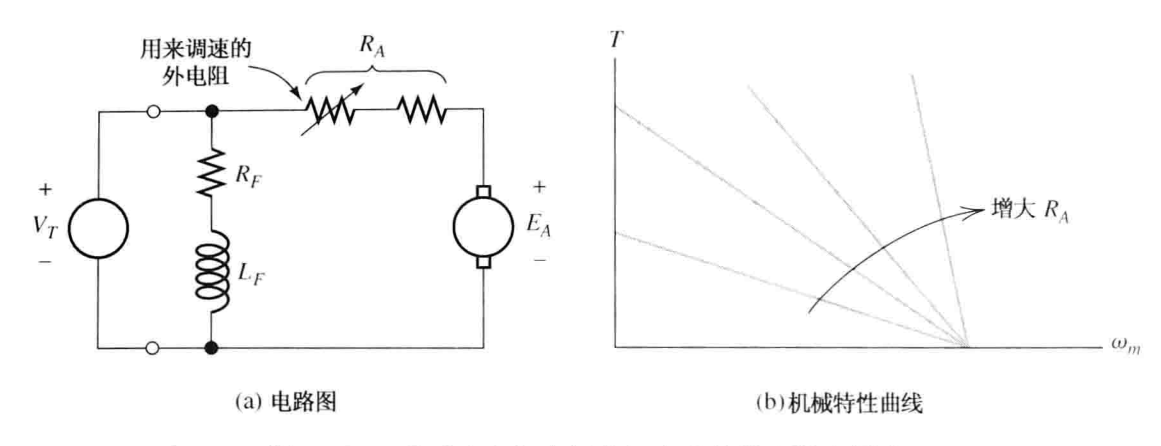


图 16.26 通过改变与电枢绕组串联的外电阻来调速

式(16.34)直接给出了串励电动机的电磁转矩表达式，这里再次给出该式：

$$T_{\text{dev}} = \frac{KK_F V_T^2}{(R_A + R_F + KK_F\omega_m)^2}$$

注意，如果 R_A 足够大，则电动机的转矩可调节到满足任意转速。

练习 16.10 如图 16.16 所示，在并励直流电动机中，改变电压源 V_T 为什么不是调速的一种有效方式?

答案： V_T 减小会降低励磁电流，且磁通也减小，因为在磁化曲线的线性部分，磁通和励磁电流成正比。根据式(16.35)，转速为常数，无法调速。(实际上，因磁饱和的影响转速会出现微小变化。)

练习 16.11 图 16.26(b)是不同 R_A 时对应的各机械特性曲线簇，要求在固定的励磁电流及不同的 V_T 值下，描绘出他励直流电动机(见图 16.21)的机械特性曲线簇。

答案： 式(16.27)为机械特性表达式，当励磁电流一定时，磁通 ϕ 为常数，该曲线簇如图 16.27 所示。

练习 16.12 在电源电压 V_T 一定，I_F 可调的情况下，画出并励和他励直流电动机的机械特性曲线簇。

答案： 由式(16.27)所示，当励磁电流增加时，磁通 ϕ 增加，该曲线簇如图 16.28 所示。

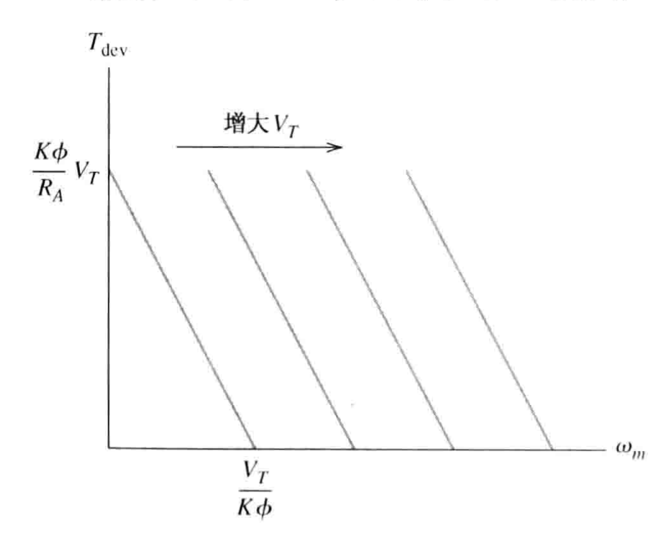


图 16.27 他励直流电动机在不同电枢电压 V_T 下的机械特性曲线簇

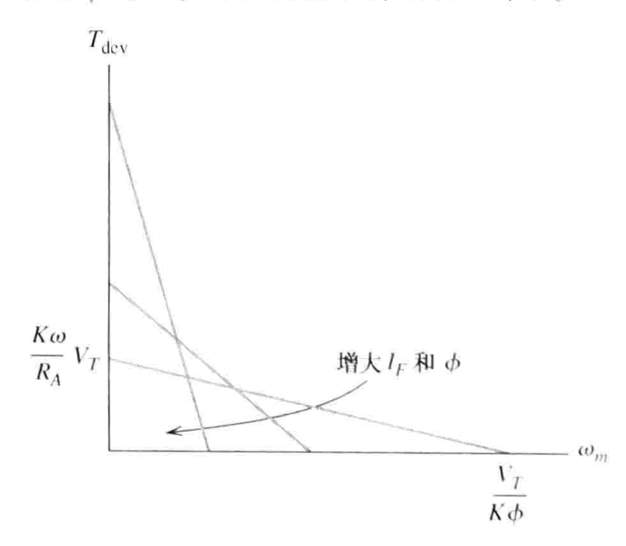


图 16.28 并励和他励直流电动机在不同 I_F 下的机械特性曲线簇

16.7 直流发电机

发电机将原动能转化为电能，如汽轮机和柴油机。如需要直流电，可以使用直流发电机或交流发电机结合整流器。目前的发展趋势更多是用交流发电机结合整流器来获得直流电，但直流发电机现在仍然使用，在某些场合用直流发电机还是一个更好的选择。

如图16.29所示为直流发电机的几种连接方式，接下来将简述每一种连接类型，并通过实例来阐明他励发电机的性能参数的计算方法。

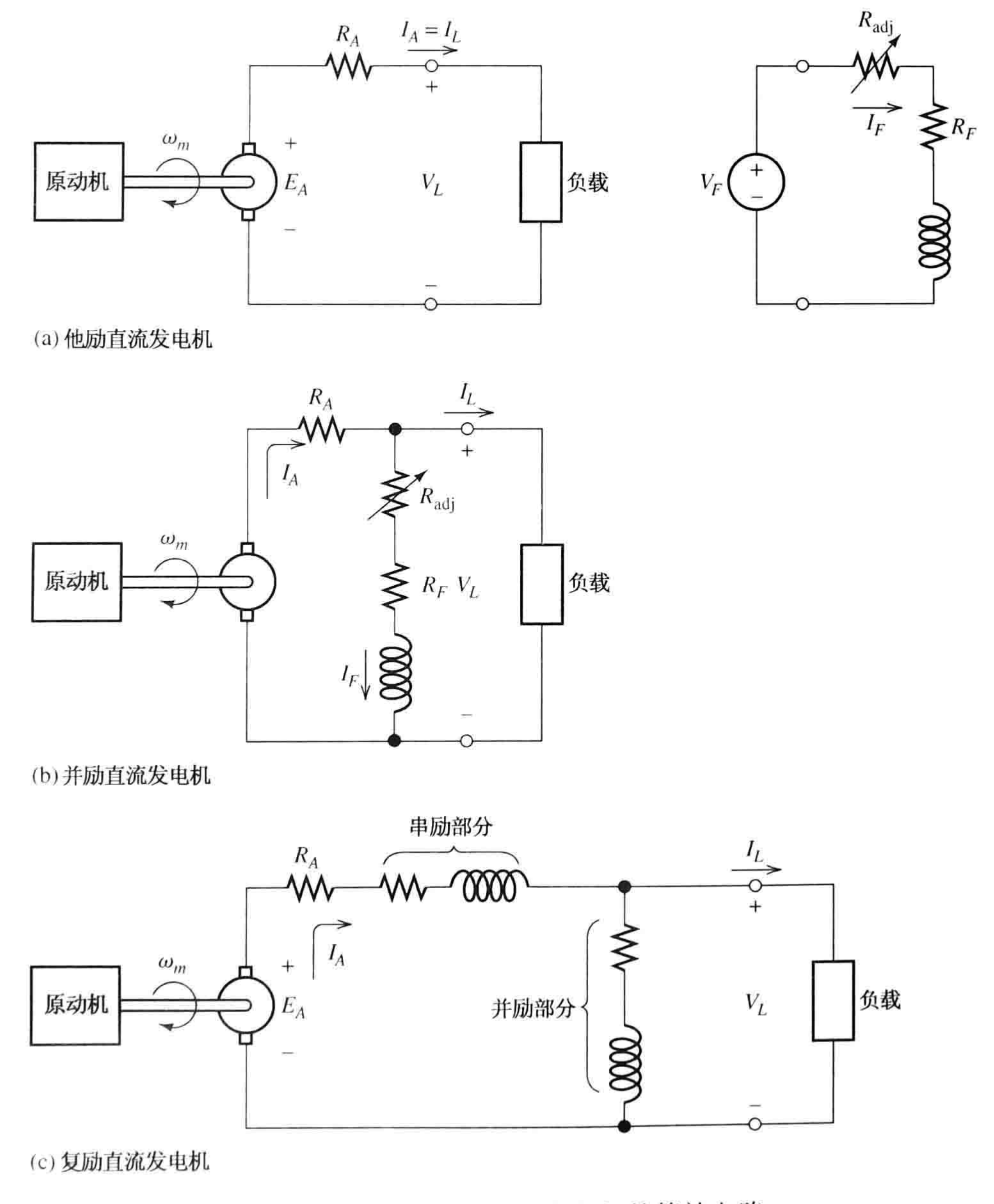
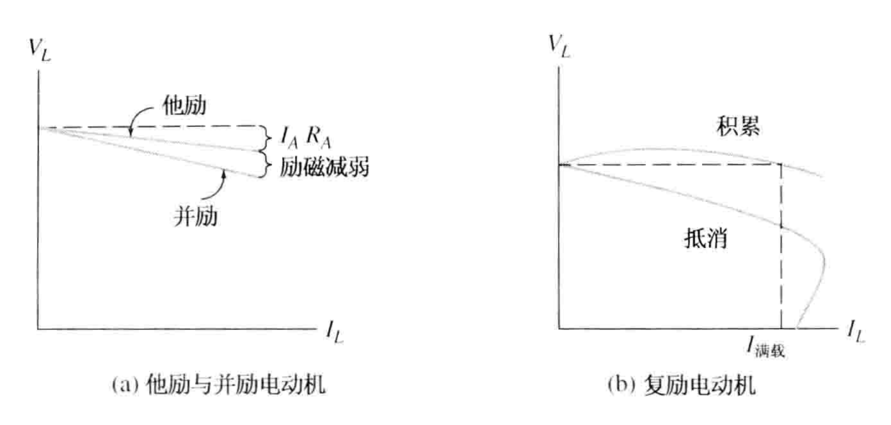


图16.29　各种类型直流发电机的等效电路

16.7.1 他励直流发电机

如图16.29所示的他励直流发电机等效电路，原动机驱动电枢绕组转轴以转速ω_m转动，外部直流电源V_F给励磁绕组提供电流I_F，电枢绕组感应出的电压引起电流流过负载。设电动机的转速和励磁电流不变，考虑到电枢绕组的电阻上会出现电压降，因此随着负载电流I_F的增加，电压V_L会随之减小。如图16.30(a)所示。



(a) 他励与并励电动机　　(b) 复励电动机

图 16.30　不同直流发电机的负载电压与负载电流之间的关系

在很多应用场合，需要负载电压基本与负载电流无关。衡量负载电压随电流下降而下降的参数为负载电压调整率，由下式给出：

$$电压调整率 = \frac{V_{NL} - V_{FL}}{V_{FL}} \times 100\% \tag{16.37}$$

其中，V_{NL}是空载电压(即 $I_L = 0$ 时)，V_{FL}是满载电压(即额定电流时的电压)。

他励直流发电机的优点之一就是负载电压可以通过改变励磁电流或者电压 V_F和变阻器 R_{adj}来达到，而且负载电压和转速成正比。

16.7.2　并励直流发电机

他励直流发电机的弱点之一就是需要不同的直流电源来供电给励磁绕组。并励直流发电机克服了该缺点，因为励磁绕组、电枢绕组和负载是并联的，如图 16.29(b)所示。可以通过改变与励磁绕组串联的 R_{adj}来调节输出电压。

因为铁芯中剩磁的存在，并励直流发电机常存在一个初始电压(通过调节变阻器 R_{adj}到最小值，并反接两个励磁绕组两端来确保初始电压的建立)。但是，如果发电机被退磁，则电枢绕组的感应电压为零，导致励磁绕组电流为零，输出电压为零。补救方式就是给励磁绕组提供正确极性的直流电压以便在电机中产生剩磁。另外，为让发电机输出希望的反向电压，可通过改变外加电源的极性，或者交换发电机的外接电源两端来实现。

因为电枢绕组电阻电压降的存在，导致励磁电流随着负载电流的增加而下降，所以并励发电机的负荷电压调整率比他励发电机要差。如图 16.30(a)所示，电压降增加的主要原因在于励磁减弱。

16.7.3　复励直流发电机

将串励和并励绕组组合在一起则构成直流发电机，称为复励直流发电机，可能会出现几种连接方式，图 16.29(c)为长并励复合连接方式，另一种为短并励复合连接方式，其并励励磁绕组直接和电枢绕组并联，其串励绕组与负载串联。另外，无论是长并励还是短并励直流发电机，串励线圈的磁场与并励线圈磁场作用的结果是相互增强或相互抵消。如果是相互增强，则称为增强型并激发电机；如果是相互消弱，则称为削弱型并激发电机。由此，总共有四种连接方式。

设计一个全补偿(从空载电压到满负荷额定电压)增强型的并励直流发电机，如图 16.30(b)所示。电压随电流变化的特征曲线是因发电机磁饱和造成的，若额定电压比空载电压小，则称发电机为欠补偿；而对于过补偿发电机，则是额定电压比空载电压大。

差励连接的发电机的输出电压随着负载电流减小而迅速减小，因为串励绕组的磁场与并励绕组的磁场是相互抵消的，当负载电压降低至零时，负载电流仍然较大，如图 16.30(b)所示。

16.7.4 性能参数计算

接下来对他励直流发电机进行性能参数计算，其他连接方式的发电机的分析计算留作习题。

与直流电动机类似，下列等式也应用到直流发电机：

$$E_A = K\phi\omega_m \tag{16.38}$$

$$T_{\text{dev}} = K\phi\omega_m \tag{16.39}$$

参考图 16.29(a)，有

$$E_A = R_A I_A + V_L \tag{16.40}$$

$$V_F = (R_F + R_{\text{adj}})I_F \tag{16.41}$$

图 16.31 阐明了直流发电机的功率分流过程图。效率计算如下：

$$\text{效率} = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \times 100\% \tag{16.42}$$

式(16.37)到式(16.42)、发电机磁化曲线以及图 16.31 是分析他励直流发电机的理论依据。(回顾一下，磁化曲线是在给定转速下 E_A随电流 I_F的变化曲线。)

例 16.6 他励直流发电机

一台他励直流发电机，电压 $V_F = 140$ V，$R_F = 10\ \Omega$，$R_{\text{adj}} = 4\ \Omega$，$R_A = 0.065\ \Omega$，电枢绕组的转速在 1000 rpm，磁化曲线如图 16.19 所示，试求在满载电流为 200 A 时的励磁电流、空载电压、额定电压以及电压调整率。设电机的总效率为 85%(不包括电源供给励磁电路的功率损耗)，试求输入转矩、电磁转矩和包含摩擦、风力、涡流及磁滞在内的总功率损耗。

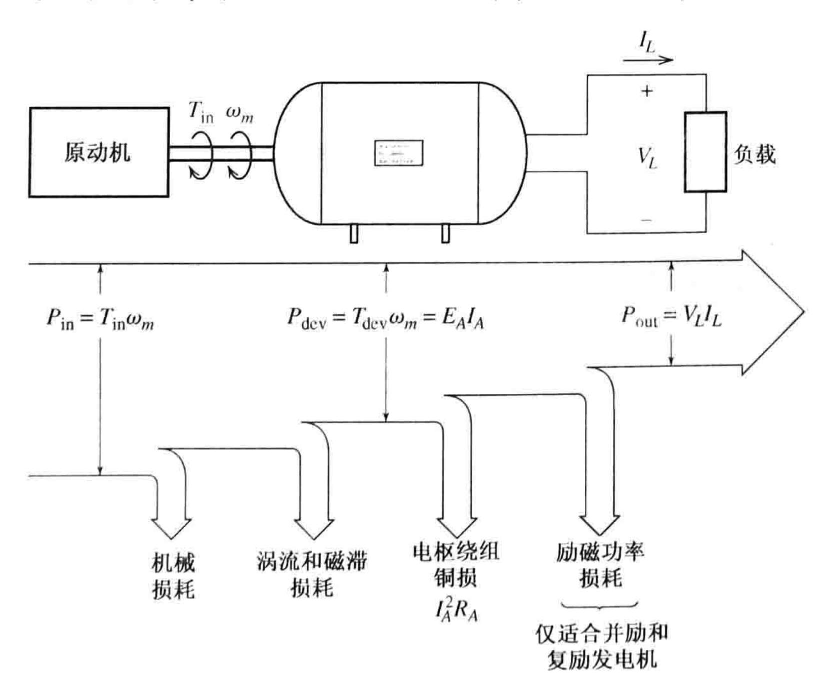


图 16.31 直流发电机的功率组成图

解：励磁电流为

$$I_F = \frac{V_F}{R_{\text{adj}} + R_F} = \frac{140}{4 + 10} = 10\ \text{A}$$

参考图 16.19 所示的磁化曲线，在电压 $E_A=280$ V 时对应的转速为 1200 rpm。式(16.38)指出 E_A 和转速成正比，因此在转速为 1000 rpm 时，有

$$E_A = 280\frac{1000}{1200} = 233.3\ \text{V}$$

即为电动机的空载电压。当负载电流为 200 A 时，计算电压：

$$V_{FL} = E_A - R_A I_A = 233.3 - 200 \times 0.065 = 220.3\ \text{V}$$

最后，计算电压调整率为

$$\text{电压调整率} = \frac{V_{NL} - V_{FL}}{V_{FL}} \times 100\% = \frac{233.3 - 220.3}{220.3} \times 100\% = 5.900\%$$

输出功率为

$$P_{\text{out}} = I_L V_{FL} = 200 \times 220.3 = 44.06\ \text{kW}$$

电磁功率为输出功率和电枢绕组功率损耗之和：

$$P_{\text{dev}} = P_{\text{out}} + R_A I_A^2 = 44060 + 0.065(200)^2 = 46.66\ \text{kW}$$

角速度为

$$\omega_m = n_m \frac{2\pi}{60} = 104.7\ \text{rad/s}$$

输入功率为

$$P_{\text{in}} = \frac{P_{\text{out}}}{0.85} = \frac{44.06}{0.85} = 51.84\ \text{kW}$$

包含摩擦、气隙、涡流和磁滞损耗在内的功率总损耗为

$$P_{\text{losses}} = P_{\text{in}} - P_{\text{dev}} = 51.84 - 46.66 = 5.18\ \text{kW}$$

输入转矩和电磁转矩分别为

$$T_{\text{in}} = \frac{P_{\text{in}}}{\omega_m} = \frac{51{,}840}{104.7} = 495.1\ \text{N}\cdot\text{m}$$

$$T_{\text{dev}} = \frac{P_{\text{dev}}}{\omega_m} = \frac{46{,}660}{104.7} = 445.7\ \text{N}\cdot\text{m}$$

练习 16.13 当 $R_{\text{adj}}=0$ 时重复例 16.6 的内容。

答案： $I_F=14$ A，$V_{NL}=260$ V，$V_{FL}=247$ V，电压调节量 $=5.263\%$，$P_{\text{losses}}=6.1$ kW，$T_{\text{in}}=555$ N·m，$T_{\text{dev}}=497$ N·m。

本章小结

1. 电动机由转子和定子组成，两者都包含线圈绕组，分别称为电枢绕组和励磁绕组。
2. 供电给电动机的电源可以为直流、单相交流或三相交流电源。
3. 在给定条件下选择电动机应包含可能需要的电源、要求的输出功率、机械特性、使用寿命、效率、转速调整率、启动电流、要求的转速、合适的环境温度以及维护保养周期等。
4. 常用的直流电动机包含电刷和换向片，换向器用于转子转动时改变与电枢绕组的连接，不过，电刷与换向器容易磨损，需要频繁地维护保养，这是直流电动机最大的不足之处。
5. 直流电动机的一个优点是转速易于控制，但是，交流电动机可采用现代电力电子技术，通过改变交流电源的频率来实现对转速的控制。

6. 电动机可自动调节转速，使电动机的输出转矩等于负载所需转矩。如果电动机的机械特性曲线和负荷随转速变化的曲线画在同一坐标系上，则它们的相交点就是电动机的工作点。
7. 本书简明扼要地说明了线性直流电机的基本工作原理，但它并不适用于大量、广泛的应用场合。
8. 通常直流电机在定子上有励磁绕组，建立偶极磁场；在转子上有电枢绕组，若有电流流过，则在磁场中感应出电压和电磁力。为了实现要求的电磁转矩(以及电枢绕组的感应电压)，当电枢导体在磁极之间移动时，换向器片和电刷周期性改变电枢导体的连接方式。
9. 一台直流电机的磁化曲线是当电机以某一恒定转速运行时，感应的电枢绕组电压与励磁电流的关系式。直流电机的等效电路如图16.14所示。等效电路、磁化曲线和以下表达式是分析直流电动机的基础。

$$E_A = K\phi\omega_m$$
$$T_{\text{dev}} = K\phi I_A$$
$$P_{\text{dev}} = E_A I_A = \omega_m T_{\text{dev}}$$

10. 图16.16所示为并励直流电动机的等效电路，其机械特性如图16.18所示，调速有两种方式：用变阻器R_{adj}改变励磁电流；与电枢绕组串联一可调电阻。注意，改变电压V_T不能有效地调节转速。
11. 图16.21为他励直流电动机等效电路，其机械特性与并励直流电动机相同，调速有三种方式：改变励磁电流，改变电枢绕组电压V_T，电枢绕组串联一个可调电阻。
12. 永磁直流电动机与他励直流电动机的机械特性类似，除改变励磁电流不能调速外，可通过改变电枢绕组电压或调节与电枢绕组串联的电阻来调速。
13. 图16.22为串励直流电动机的等效电路，在正常运行状态下，其转矩近似与转速平方成反比，串励直流电动机适合起动重物，但是，如果负载被完全断开，转速可能极大地增加而引起危险。
14. 通用电动机的结构基本还是串励直流电动机，只是设计成可由交流电源来供电运行，其适用于大牵引比的场合。但是，由于换向器易磨损，使用寿命有限。调速可通过改变提供的电源电压或调节与电枢绕组串联的可调电阻来实现。
15. 过去通过引入直流发电机改变直流电压来实现直流电动机的调速，当前常见的调速措施之一是用整流器将交流电压转化为直流电压，然后调节斩波电路的占空比来获得可调的电压平均值。
16. 图16.26和图16.27分别说明并励和他励直流电动机的机械特性，通过改变电枢绕组电阻、电枢绕组电压以及改变励磁电流来调节电动机的转速。

直流发电机的类型有他励、并励和复励。对直流发电机的分析类似直流电动机。

习题

16.1节 直流电机

P16.1 指出旋转电动机的主要组成部分的名称。

P16.2 哪些类型的电动机包含了电刷和换向器？这些部件有什么功能？

P16.3 列出三相交流电动机的两种典型类型，哪一种更常用？

P16.4 电动机有哪两种类型的绕组？哪一种类型的绕组不能应用于永磁电动机？为什么？

*P16.5 在家庭或小公司的通风设备中，与单相交流感应电动机相比，直流电动机有哪两项不足？

P16.6 直流电动机比交流电动机在哪方面具有优越性？

P16.7 一台三相感应式电动机的额定功率为5马力，额定转速为1760 rpm，线电压有效值为220 V。该电动机的功率因数为滞后0.8，额定状态下效率为75%。试求额定状态下电源提供给电动机的输入功率和线电流有效值。

*P16.8 在习题P16.7中，若空载电动机的转速为1800 rpm，求转速调整率的百分比。

P16.9 在习题P16.7中，求额定状态下电动机的输出转矩和角速度。

P16.10 在额定状态下，一台三相感应式电动机的线电压有效值为440 V，线电流有效值为35 A，功率因数为滞后83%，输出功率为25马力，额定转速为1750 rpm。在空载状态下，转速为1797 rpm，线电流有效值为6.5 A，功率因数为滞后30%。试求额定条件下的功率总损耗和效率，以及空载状态下的输入功率和转速调整率。

*P16.11 如习题P16.10的电动机在额定电压下启动，启动转矩是额定转矩的2倍。工程估计近似认为感应电动机的启动转矩与电压平方成正比，为降低启动电流，若启动时线电压有效值降低为220 V，试求降低的启动转矩。

P16.12 若一台极数为4的同步电动机转速为1000 rpm，要求计算交流电源的频率。若由此电源供电，试列出可能实现的几种同步转速，最高转速是多少？

P16.13 一台三相感应式电动机的线电压有效值为440 V，线电流有效值为14 A，功率因数为85%，输出功率为6.5马力。试求该电动机的功率损耗和效率。

P16.14 考虑一个电动机驱动负载的机械系统，如图P16.14所示为电动机的机械特性曲线，负载为风扇，其所需转矩为$T_{load}=K\omega_m^2$。在转速$n=1000$rpm时，风扇消耗功率为0.75马力。求该电动机的角速度(rad/s)以及功率，并将功率单位从瓦特转化为马力，转速单位从rad/s转换为rpm。

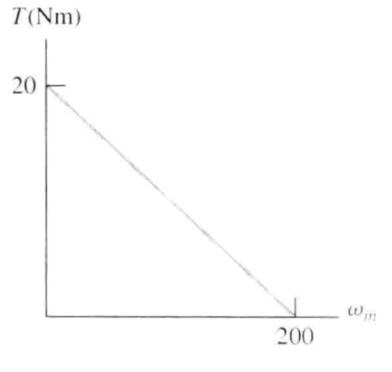


图 P16.14

P16.15 一台电动机驱动负载转矩

$$T_{\text{load}} = \frac{800}{20+\omega_m}\text{N}\cdot\text{m}$$

该电动机的机械特性如图P16.14所示，(a)问该电动机能否从转速为零开始启动负载？为什么？(b)设该系统通过一台辅助电动机驱动加速，然后断开驱动动力。从理论上分析该电动机的转速有哪两种恒定值？(c)如果电动机以两种转速中的低速运行，供给电动机的外加电源突然快速中断，电动机的转速会有所降低，问供电恢复之后将发生什么？为什么？(d)如果系统最初以两种转速中的高速运行，重复上问题。

P16.16 一台电动机输出转矩

$$T_{\text{out}} = 10^{-2}(60\pi - \omega_m)\omega_m$$

其中ω_m是角速度，单位为rad/s，T_{out}是输出转矩，单位为N·m，(a)求空载下的电机速度。(b)求最大输出转矩所对应的速度和最大输出转矩。(c)求最大输出功率所对应的速度和最大输出功率。(d)试求电机的启动转矩，该电机如何启动？

*P16.17 三相感应式电动机在线电压440 V，转速1150 rpm下驱动负载转矩为15 N·m，线电流为3.4 A，功率因数为0.8。试求输出功率、功率损耗和电动机效率。

P16.18 三相感应式电动机线电压220 V，电源频率60 Hz，转速3500 rpm，输出功率3马力，线电流8 A，总损耗300 W，试求输入功率、功率因数、效率、空载速度和转速调整率。

P16.19 对习题P16.18试求空载速度和速度调节量。

16.2 节 直流电机的工作原理

*P16.20 如图16.6所示的一台空载线性直流电机，如果工作在以下情况，电机的滑条的稳态速度会如何变化？(a)电源电压V_T幅值加倍；(b)电阻R_A加倍；(c)磁通密度B加倍。

P16.21 图16.6所示的线性直流电机，如果工作在以下情况，滑条的初始电磁力(即启动电磁力)会如何变化？(a)如电源电压V_T幅值加倍；(b)电阻R_A加倍；(c)磁通密度B加倍。

P16.22 依据图16.6所示的直流线性电机加以设计，其滑条长度为0.5 m，电阻为0.05 Ω，稳定速度为20 m/s，输出功率1马力，通过磁性材料的磁性能将磁通密度限制在1特斯拉，求电流i_A，电源电压V_T，电动机效率，设电动机的损耗即R_A上的功率损耗。

*P16.23 如图P16.23所示的直流线性电机。当开关闭合时，试判断滑条上的电磁力是向上的还是向下的？试计算电机的初始(启动)电磁力以及忽略摩擦损耗时滑条的最终稳定速度。

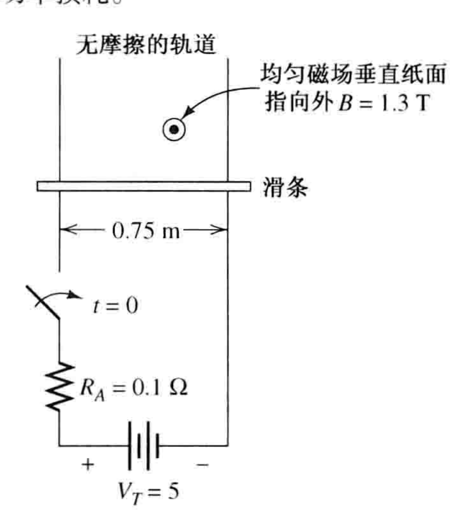


图 P16.23

P16.24 如图P16.23所示的直流线性电机，如有一方向朝上的外力10 N施加在滑条上，在稳定运行时，问该电机工作于电动机还是发电机状态？另外，计算如下参数：(a)电压源提供或吸收的功率；(b)R_A消耗掉的功率；(c)外力提供的功率。

P16.25 如果外力方向是朝下的，再计算习题16.24的各问。

P16.26 前面已经通过一个磁场分析了线性直流电机作为直流电动机的工作原理。但是，流经轨道的电流产生磁场，在滑条上产生电磁力，这就是电磁轨道炮的工作原理，可以通过网络查找相关资料以及大量的实际构造的介绍，例如图P16.26所示。要求：(a)当开关闭合时，分析推进器的受力方向，并使用本书简述过的物理原理来加以解释；(b)设推进器的重量为3g(大约1便士那么重)，储存在电容器中的所有能量全部转化为滑条的动能，试求推进器的最终速度；(注：普通来福步枪子弹的最快速度接近1200 m/s。)(c)列举能够让(b)问题中速度减慢的各种因素。

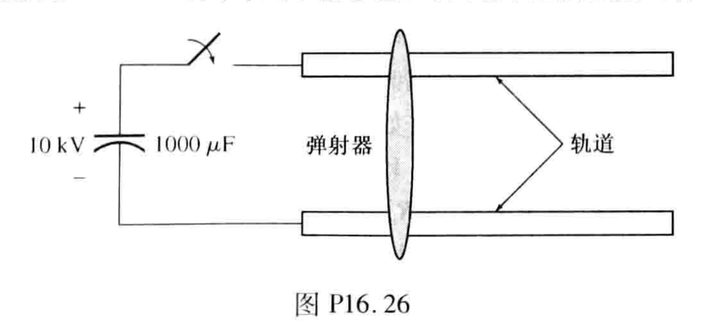


图 P16.26

16.3 节 旋转直流电机

*P16.27 判断直流电动机产生的转矩方向，一种可行方式就是分析定子磁极与电枢绕组电流产生的磁场的相互作用，如两极直流电动机的横截面图(见图16.10)，显示了定子励磁绕组产生的磁极发布。根据电枢绕组电流的方向，试判断转子磁极的位置并标出南北极。当然，转子磁极尽量与定子磁极相一致。问转矩会导致电动机顺时针还是逆时针转动？对如图16.11所示的四极电动机，重复上述各问。

P16.28 有时，直流电动机的定子尤其是磁轭不是叠片的(见图16.10)。但是，转子的磁性材料却必须是叠片的，为什么？

P16.29 一台直流电动机的转速为1200 rpm，产生反电动势$E_A=240$ V。励磁场电流为常数，求电动机分别在转速为600 rpm和1500 rpm时的反电动势。

*P16.30 一台直流电动机的 $R_A=1.3\ \Omega$, $I_A=10$ A, 产生反电动势 $E_A=240$ V。当电动机运转速度为1200 rpm时, 试求电枢绕组上的电压、电磁转矩和电磁功率。

P16.31 一台电动机的转速为 $n_{m1}=1200$ rpm 时, 电枢绕组感应电压为200 V。设此台电动机转速为 $n_{m2}=1500$ rpm 时, 电机功率为5马力, 试求电枢绕组的电流和电磁转矩。

P16.32 在空载条件下, 一台电动机的转速为1200 rpm时, 电枢绕组电流为0.5 A, 端电压为480 V。若电枢绕组电阻为2 Ω, 求负载转矩50 N · m时电动机速度和转速调整率是多少? 设损耗仅包含电阻 R_A 的热损耗和摩擦损耗, 与转速无关。

*P16.33 一台直流电动机的运行速度为1200 rpm, 电源电压为240 V。设计的磁通密度为1T, 因为磁通量太小则铁芯的利用率不够, 磁通量太大则导致磁饱和。转子半径为0.1 m(即电枢绕组的转矩臂长), 转子导条的长度为0.3 m。试问这台电动机至少需串联多少根导条?

P16.34 如图16.10所示的两极电动机, 转子和定子之间的气隙宽是1.5 mm, 两励磁绕组都为250匝, 电流为3 A。设铁芯的磁导率为无穷大。试求: (a)气隙中的磁通密度; (b)当电枢绕组的电流为30 A, 导体长度为0.5 m时, 计算每根导条上的电磁力。

P16.35 某一台电动机如图16.14所示, 转速为1200 rpm, $R_F=150\ \Omega$, $V_F=V_T=180$ V, $I_A=10$ A, $R_A=1.2\ \Omega$, 试求 E_A, T_{dev}, P_{dev} 和电阻上消耗的功率。

*P16.36 带负载运行的直流电动机需固定的电磁转矩, 若 $V_T=180$ V, 转速为1200 rpm, $I_A=10$ A, 电枢绕组电阻为5 Ω, 励磁电流为常数, 如果 V_T 增加到250 V, 试求电动机的转速。

P16.37 一台永磁直流电动机 $R_A=7\ \Omega$, $V_T=240$ V, 在空载运行下的转速为1500 rpm, 且 $I_A=1$ A。当连接上负载后, 电机转速降到1300 rpm。试求电动机带负载运行的效率。设总损耗由电阻 R_A 的热损耗和转子的摩擦损耗组成, 且与转速无关。

16.4 节 并励与他励直流电动机

P16.38 若一台直流电动机的励磁电压 V_F 等于电枢绕组电压 V_T。(参见图16.14), 问额定运行状态下, 电流 I_A 和 I_F 哪一个大些? 为什么? 在满负载状态下, 估计 I_A/I_F 的比值如何最合理?

*P16.39 一台并励直流电动机 $R_A=0.1\ \Omega$, $V_T=440$ V, 输出功率为50马力, $n_m=1500$ rpm, $I_A=103$ A。如励磁电流为常数, 求: (a)求电磁功率、R_A 上的功率损耗及电机转动损耗。(b)设电动机转动损耗正比于转速, 求电动机空载时的转速。

P16.40 一台并励直流电动机, $R_A=4\ \Omega$, $V_T=240$ V, 转速为1000 rpm, 电枢绕组的感应电压为120 V。试画出电动机的机械特性曲线(T_{dev} 和 n_m 关系图)。

P16.41 一台并励直流电动机的磁化曲线如图P16.41所示。忽略转动损耗, 电压 $V_T=240$ V 且 $R_A=1.5\ \Omega$, 总电阻 $R_F+R_{adj}=160\ \Omega$。求: (a)求空载下的转速; (b)当负载运行时, 转速下降6%, 试求输出转矩、输出功率、电枢电流和励磁损耗及电枢绕组损耗。

*P16.42 若 $R_F+R_{adj}=240\ \Omega$, 重复上述各问。

P16.43 一台并励直流电动机, $R_A=0.5\ \Omega$, $R_F+R_{adj}=400\ \Omega$。若 $V_T=200$ V, 在空载运行状态下, 电动机的转速为1150 rpm, 线电流 $I_L=1.2$ A。求转动损耗。

P16.44 一台并励直流电动机的磁化曲线如图16.19所示, 电源电压 $V_T=200$ V, 电枢绕组电阻 $R_A=0.085\ \Omega$, 励磁电阻 $R_F=10\ \Omega$,

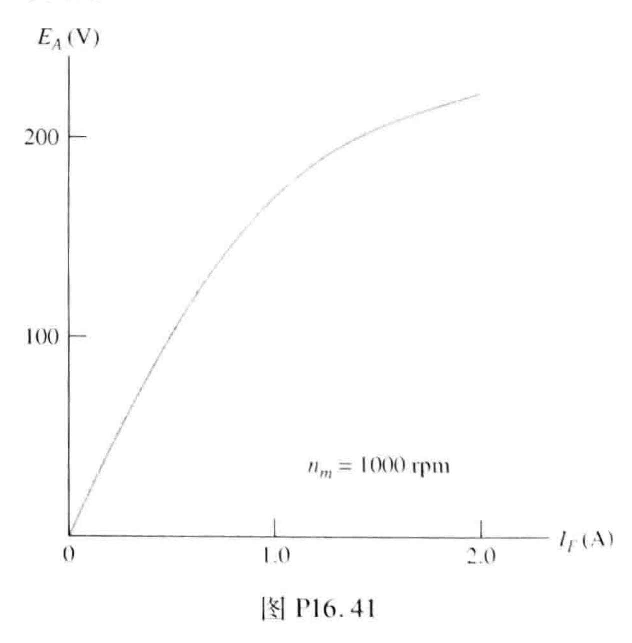


图 P16.41

变阻器 $R_{adj}=2.5\ \Omega$。在转速为 1200 rpm 时，转动损耗 $P_{rot}=1000$ W。若负载转矩 $T_{out}=200$ N·m，且与转速无关，求电动机的转速和效率。

*P16.45 一台并励直流电动机，$R_A=1\ \Omega$，$R_F+R_{adj}=200\ \Omega$，$V_T=200$ V，当转速为 1200 rpm 时，转动损耗为 50 W，且 $E_A=175$ V。求：(a)计算空载时的转速；(b)当电机转速从零增加到空载转速时，画出 T_{dev}、I_A 和 P_{dev} 随转速变化的曲线。

P16.46 一台并励直流电机，机械损耗为零且 $R_A=0\ \Omega$。设 R_F+R_{adj} 是常数((d)除外)，ϕ 正比于励磁电流。若 $V_T=200$ V，$P_{out}=2$ 马力，电动机转速为 1200 rpm。如发生下列情形，电流 I_A 和转速会怎样变化？(a)负载转矩加倍；(b)负载功率加倍；(c)P_{out} 不变，V_T 降到 100 V；(d)P_{out} 不变，R_F+R_{adj} 值加倍。

P16.47 一台并励直流电动机输出功率为 24 马力，转速为 1200 rpm，电源电压为 440 V，线电流 $I_L=50$ A。当电阻 $R_A=0.05\ \Omega$，$R_F+R_{adj}=100\ \Omega$ 时，试求电动机的电磁转矩和效率。

*P16.48 一台并励直流电动机，$K_\phi=1$ V/(rad/s)，$R_A=1.2\ \Omega$，$V_T=200$ V，试求电动机功率为 5 马力时的两种转速。忽略电磁损耗和转动损耗。试求两种转速下的 I_A 值和效率，问哪种答案更适合于电机的正常运行参数。

P16.49 工作在额定状态下的并励直流电动机，输出功率 5 马力，$V_T=200$ V，$I_L=23.3$ A，$n_m=1500$ rpm，且 $I_F=1.5$ A，$R_A=0.4\ \Omega$，试求：(a)输入功率；(b)提供给励磁电路的功率；(c)在电枢绕组上消耗掉的功率；(d)转动损耗；(e)效率。

P16.50 一台他励直流电动机(参见图 16.21 所示的等效电路)，$R_A=1.3\ \Omega$，$V_T=220$ V，输出功率为 3 马力，$n_m=950$ rpm，$I_A=12.2$ A。设励磁电流为常数。求：(a)电磁功率、电磁转矩、R_A 上的功率损耗及转动机械损耗；(b)设转动功率损耗与转速成正比，试求空载下的电动机转速。

*P16.51 永磁直流电动机是否需要磁化曲线？为什么？请解释。

P16.52 当一台永磁汽车的风扇电动机被锁住(即固定不动)时，从 12 V 电源上吸收 20 A 的电流。求：(a)计算电枢绕组电阻；(b)电动机能产生的最大电磁功率；(c)如果电动机的供电电源分别为 10 V(表示老旧的蓄电池)和 14 V(表示汽车引擎启动后对蓄电池充电时的端电压)，分别计算电动机的最大电磁功率。

P16.53 一个永磁汽车风扇电动机工作电压 $V_T=12$ V，吸收电流为 3.5 A，转速为 800 rpm。设负载(包含旋转功耗)所需的电磁转矩正比于转速的平方，试分别计算电动机在电压为 10 V 和 14 V 下的转速。

*P16.54 一台永磁直流电动机 $R_A=0.5\ \Omega$，在空载运行状态下，从电源 12.6 V 吸收电流为 0.5 A，转速为 1070 rpm。设旋转功率损耗正比于转速，当负载增加，转速下降到 950 rpm 时，计算电动机的输出功率和效率。

16.5 节 串励直流电动机

P16.55 设计一台串励直流电动机在可调负荷下运行，R_A 和 R_F 可忽略。为得到高效率，电动机必须有非常小的机械损耗。若负载转矩为 100 N·m，电机运行在最高额定转速 1200 rpm。求：(a)负载转矩为 300 N·m 时电动机的转速；(b)空载运行时的电动机转速。当电动机在负荷状态下运行时，突然断开负载而没有切断直流电源，会出现什么后果？

P16.56 一台串励直流电动机 $R_A=0.5\ \Omega$，$R_F=1.5\ \Omega$，拖动负荷的转速为 1200 rpm，电源电压 $V_T=220$ V，吸收电流 $I_A=20$ A，机械损耗为 150 W，试求电动机的输出功率和效率。

*P16.57 一台串励直流电动机 $R_F+R_A=0.6\ \Omega$，直流电源电压 $V_T=220$ V，电流 $I_A=40$ A，电机运行转速为 900 rpm，计算 $I_A=20$ A 时电动机的转速，设电流 I_A 和磁通 ϕ 为正比关系。

P16.58 一台串励直流电动机 $R_F+R_A=0.6\ \Omega$，直流电源电压 $V_T=220$ V，电流 $I_A=40$ A，电机转速为 900 rpm，机械损耗为 400 W，求输出功率和电磁转矩。如果负载转矩降低 20%，而且机械损耗正比于转速，试求电流 I_A 的值和转速。

P16.59 一台串励直流电动机的电源电压为 280 V，电枢绕组电流为 25 A，运行转速为 1200 rpm，励磁

绕组的电阻为0.2 Ω，电枢绕组的电阻为0.3 Ω。假设磁通正比于励磁电流，当电枢绕组电流为10 A时，电机转速为多少？

P16.60 电源电压为280 V，电枢绕组电流为25 A，转速为1200 rpm的一台串励直流电动机，励磁绕组的电阻为0.2 Ω，电枢绕组电阻为0.3 Ω，机械损耗为350 W且正比于转速。试求输出功率和电磁转矩。当负载转矩增加20%时，求电枢绕组电流和转速。

P16.61 与交流电动机相比，试列出通用电动机的四个优点。

P16.62 钟表采用通用电动机是否为更好的选择？应用于熔炉的风机又如何？适用于家用的咖啡研磨机吗？请给出理由。

P16.63 仔细观察单相交流电动机，与通用电动机相比，有什么特点可加以区别？

16.6节 直流电动机的速度控制

P16.64 列出常用的三种方法对直流电动机进行调速。哪些方法适用于并励直流电动机？哪些可用在他励直流电动机上？哪些适合永磁电动机？哪些适合串励直流电动机？

*P16.65 对下列各类型的他励直流电动机绘出相应的机械特性，要求：
(a)改变励磁电流；(b)改变电枢绕组两端的电压；(c)改变与电枢绕组串联的电阻。

P16.66 设一台并励直流电动机转速为800 rpm，运行在磁化曲线的线性部分。电动机以固定转矩拖动负载，设$R_A=0\ \Omega$，励磁电路中电阻$R_F=50\ \Omega$，$R_{adj}=25\ \Omega$。当电动机的转速升高到1200rpm时，试求R_{adj}的值；若调节R_{adj}使电动机转速减慢，此转速是多少？

P16.67 一台永磁直流电动机的电源电压为12 V，工作于空载下的转速为1700 rpm，忽略机械损耗问需多大电压才能获得空载转速1000 rpm？如果采用如图16.25所示的12 V斩波电路，试求占空比T_{on}/T。

*P16.68 一台串励电动机拖动固定负荷，电源电压为50 V，转速为1500 rpm，电阻$R_F=R_A=0$，忽略机械损耗。问需多大电压能够获得1000 rpm的电动机转速？采用如图16.25所示50 V的斩波电路，试求占空比T_{on}/T。

P16.69 如果负载转矩正比于转速，试重复习题P16.68中的各问。

P16.70 一台并励直流电动机的磁化曲线如图16.19所示，直流电压$V_T=200$ V，电枢绕组电阻$R_A=0.085\ \Omega$，励磁绕组电阻$R_F=10\ \Omega$，可调电阻$R_{adj}=2.5\ \Omega$。当电动机转速为1200 rpm，机械损耗$P_{rot}=1000$ W时，设机械损耗正比于转速：
(a)若负载转矩为$T_{load}=200$ N·m，且与转速无关，求稳态下的电枢绕组电流。
(b)设启动这台电动机时，励磁电路已处于稳态，但是电动机没有转动，功率将全部施加在电枢绕组电路中，求电流I_A的初始值、电磁转矩的启动值。同时，将答案与问题(a)的稳态值进行比较。
(c)要限定启动电流不超过200 A，需在电枢绕组上串联多大的电阻？串联电阻后的启动转矩为多少？

*P16.71 一台串励直流电动机的供电直流电源$V_T=75$ V，电动机转速为1400 rpm，电磁转矩(负荷转矩加上各损耗转矩)为25 N·m，电阻$R_F+R_A=0.1\ \Omega$，问电枢绕组需串联多大电阻可将电动机的转速限制到1000 rpm。

16.7节 直流发电机

P16.72 以图16.30为参考，将16.7节直流发电机的各种连接方式进行分类排序，排序方式为电源调整率从最高到最低。

P16.73 常用什么方法来增大如下直流发电机的负载电压：(a)他励型；(b)并励型。

P16.74 说出复励直流发电机的四种类型。

P16.75 如何计算满补偿复励直流发电机的电压调整率？

P16.76 他励直流发电机的磁化曲线如图P16.41所示，$V_F = 150$ V，$R_F = 40\ \Omega$，$R_{adj} = 60\ \Omega$，$R_A = 1.5\ \Omega$，原动力带动电枢绕组的转速为1300 rpm，求励磁电流，空载电压，额定电压，额定电流为10 A时的电压调整率百分比。假设整个发电机效率(不含励磁电路损耗)为80%，试求输出转矩、电磁转矩和总损耗，包括摩擦、气隙损耗、涡流和磁滞损耗在内。

* P16.77 他励直流发电机运行在额定状态下时负载电压为150 V，电流为20 A，转速为1500 rpm。若断开负荷，输出电压为160 V。试求额定状态下的电压调整率、负载电阻、电枢绕组电阻和电磁转矩。

* P16.78 习题P16.77中，如果转速减小为1200rpm，负载电阻一直不变，试求负载电流、负载电压和电磁功率。

测试题

以下是一套测试题，以此检测自己是否掌握了本章的重要概念。测试题的答案在附录E中，详细解答在网上Student Solutions文件中。附录F说明了Student Solutions的详细信息。

T16.1 一台并励直流电动机中两绕组的名称是什么？哪一个是定子？哪一个是转子？随着负载变化，哪一个电流会发生变化？

T16.2 对并励直流电动机绘出其机械特性。如果电动机略微轻载，且励磁绕组断开，电动机转速会如何变化？

T16.3 绘出串励直流电机的机械特性曲线。

T16.4 给出转速调整率百分比的定义。

T16.5 直流电动机的磁化曲线是如何测量的？

T16.6 简述并励直流电动机的功率损耗的各种类型。

T16.7 交直流两(通)用电动机是什么？与其他类型的交流电动机相比，其优点和不足是什么？

T16.8 列出直流电动机调速的三种方法。

T16.9 一台直流电动机产生感应电动势$E_A = 240$ V，转速为1500 rpm。问：(a)如果励磁电流保持不变，电动机转速为500 rpm时感应电动势是多少？(b)对于转速2000 rpm又如何呢？

T16.10 一台直流电动机的电枢绕组上感应电压为120 V，转速$n_{m1} = 1200$ rpm，如果励磁不变，电动机转速为$n_{m2} = 900$ rpm，电磁功率为4马力，问电枢绕组电流是多少？电磁转矩是多少？

T16.11 一台他励直流电动机(参见图16.21所示等效电路)，$R_A = 0.5\ \Omega$，$V_T = 240$ V，在额定运行状态下输出功率为6马力，$n_m = 1200$ rpm，$I_A = 20$ A，励磁电流为常数。要求：(a)计算电磁功率、电磁转矩、R_A上的功率损耗和转动机械损耗；(b)设转动功率损耗正比于转速，试求电机的转速调整率。

T16.12 一台串励直流电动机的电源电压为240 V，转速为1000 rpm，电枢绕组电流为20 A，励磁电阻为0.3 Ω，电枢绕组电阻为0.4 Ω。若磁通正比于励磁电流，求电枢绕组电流为10 A时的电机转速。

第 17 章　交 流 电 机

本章学习目标

- 掌握交流电机的选型以满足不同的应用需求
- 理解不同类型交流电机的机械特性
- 掌握交流电机电性能和机械性能参数的计算
- 理解交流电机铭牌数据
- 理解三相感应电动机、三相同步电机、单相交流电机、步进电机和无刷直流电机的机械特性

本章介绍

本章继续研究和分析电机。在阅读本章之前没必要学完第 16 章，但应该先学习 16.1 节，熟悉电机的整体概念。

17.1　三相感应电动机

对额定功率超过 5 马力的大多数应用场合都采用三相感应式电动机，如泵、电风扇、压缩机和研磨机以及其他工业方面的应用。本节将讨论这些重要设备的结构和工作原理。

17.1.1　定子的旋转磁场

三相感应式电动机的定子包含一组由三相电源提供能量的绕组，该绕组建立旋转磁场，旋转磁场通过气隙、定子和转子。该磁场可看作由南北极构成，且绕着定子作圆周旋转。（北极为磁力线离开定子处，南极是磁力线流入定子处。）因为南北极是成对出现的，所以总磁极数总是偶数。图 17.1 分别表示磁极为两极和四极的电动机，以此类推，三相感应电动机的磁极数有 6、8 甚至更多。

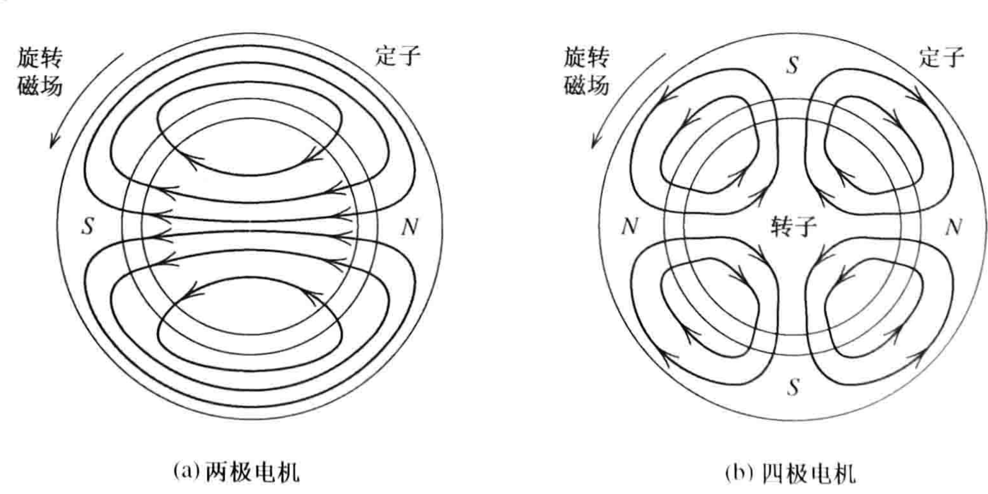


图 17.1　三相感应式电动机定子绕组产生的励磁磁场，磁极数为偶数，磁场以同步转速转动

接下来讨论定子绕组如何建立两极的旋转磁场。两极电动机的定子内壁上开凿了纵长型的内凹槽，用以嵌入三组绕组，图 17.2 显示了三相绕组中的一组。

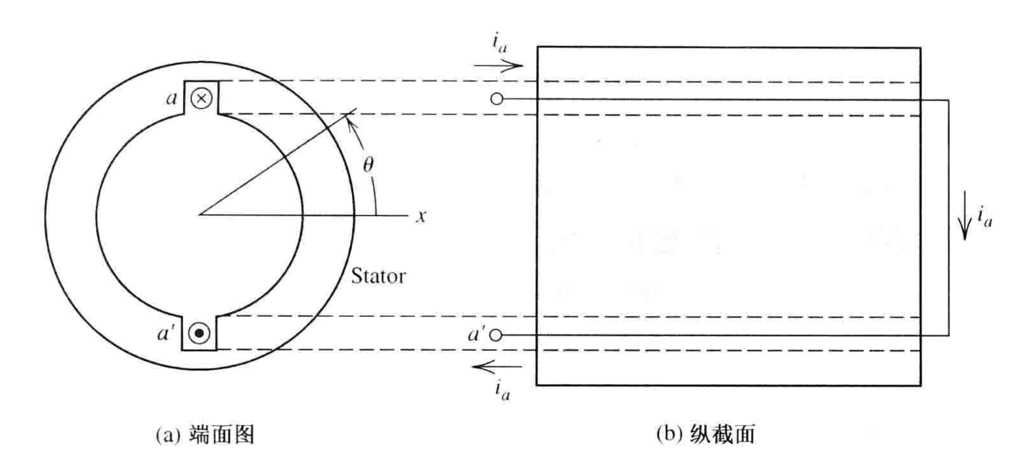


图 17.2 磁极数为2的定子绕组其中一相绕组的两种视图。为简化起见，只画了单匝绕组，一台电机实际上由许多匝绕组构成，分布在定子端面四周，气隙磁感应强度按照角度θ的正弦函数变化

为简化作图，每组绕组只画两根在定子两侧的导线。不过，实际上每组绕组包括大量的导线分布在各个凹槽内，这样，气隙内建立的磁场为θ角度变化的正弦函数(角度θ见图17.2中的定义)。a相绕组中电流i_a在气隙中产生的磁场为：

$$B_a = Ki_a(t)\cos(\theta) \tag{17.1}$$

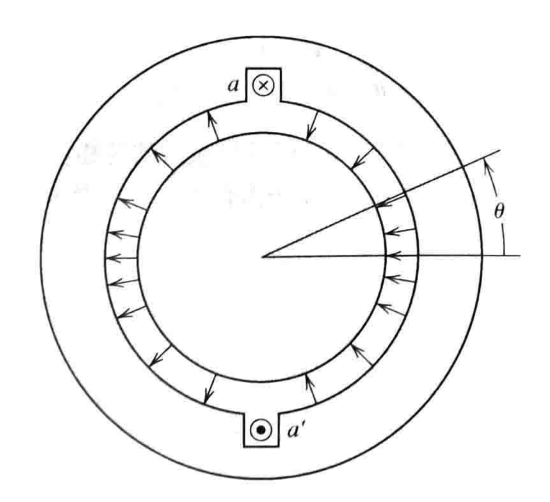
其中，K是常数，取决于定子绕组的结构尺寸和材料以及a相绕组的匝数。当磁力线从定子出、转子进时，B_a为正，反之为负。

a相绕组在气隙中产生的磁场如图17.3所示。注意，磁场在$\theta=0°$和$\theta=180°$时最强。虽然随着电流的变化，磁场在强度和极性上随之变化，但仅由a相绕组产生的磁场是静止而不是旋转的。接下来，分析由三相绕组构成的合成磁场如何转动。

b和c两相绕组与a相绕组一样，只是各自在空间位置上相差120°和240°。如图17.4所示，b相和c相绕组在气隙中产生的磁场由下式给出：

$$B_b = Ki_b(t)\cos(\theta - 120°) \tag{17.2}$$

$$B_c = Ki_c(t)\cos(\theta - 240°) \tag{17.3}$$



17.3 a相绕组在气隙圆周中产生按正弦规律变化的磁场。此刻的电流i_a达到正最大值。可见，角度$\theta=0°$和$\theta=180°$磁场强度幅值最大，且电流和磁场都按正弦规律变化。随着时间的推移，磁场消失到零后再建立反向磁场

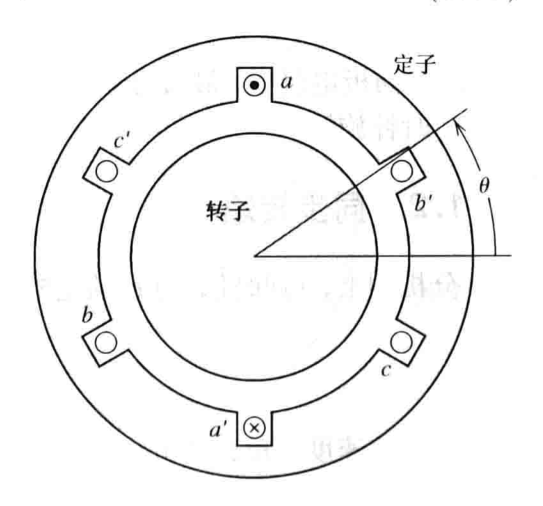


图 17.4 产生两极磁场的定子包含空间相隔120°的三相绕组

三相绕组在整个气隙中产生的合成磁场为

$$B_{gap} = B_a + B_b + B_c \tag{17.4}$$

将式(17.1)~式(17.3)代入式(17.4),有

$$B_{gap} = Ki_a(t)\cos(\theta) + Ki_b(t)\cos(\theta - 120°) + Ki_c(t)\cos(\theta - 240°) \tag{17.5}$$

在对称三相电源作用下,三相绕组中的电流表达式如下:

$$i_a(t) = I_m\cos(\omega t) \tag{17.6}$$

$$i_b(t) = I_m\cos(\omega t - 120°) \tag{17.7}$$

$$i_c(t) = I_m\cos(\omega t - 240°) \tag{17.8}$$

将以上三式代入式(17.5),有:

$$\begin{aligned} B_{gap} = {} & KI_m\cos(\omega t)\cos(\theta) + KI_m\cos(\omega t - 120°)\cos(\theta - 120°) \\ & + KI_m\cos(\omega t - 240°)\cos(\theta - 240°) \end{aligned} \tag{17.9}$$

对式(17.9)应用三角函数式:

$$\begin{aligned} B_{gap} = {} & \frac{3}{2}KI_m\cos(\omega t - \theta) + \frac{1}{2}KI_m[\cos(\omega t + \theta) \\ & + \cos(\omega t + \theta - 240°) + \cos(\omega t + \theta - 480°)] \end{aligned} \tag{17.10}$$

而且,有

$$[\cos(\omega t + \theta) + \cos(\omega t + \theta - 240°) + \cos(\omega t + \theta - 480°)] = 0 \tag{17.11}$$

这是因为三相绕组对称。图 17.5 是其相量图。(注意, -240° 相当于 120°, -480° 相当于 -120°。)由式(17.10)可推出:

$$B_{gap} = B_m\cos(\omega t - \theta) \tag{17.12}$$

其中,$B_m = (3/2)KI_m$,由式(17.12)可得出重要结论:气隙磁场随着角速度 ω 逆时针旋转。为验证该结果,通过观察可知最大磁通密度出现时,有

$$\theta = \omega t$$

由此,在两极电机中,最大磁通以角速度 $d\theta/dt = \omega$ 逆时针旋转。

图 17.5 式(17.11)左边的三相相位图。无论θ为何值,相位总和为零

17.1.2 同步转速

分析同上,可知极数为 P 的电机其旋转磁场角速度为

$$\omega_s = \frac{\omega}{P/2} \tag{17.13}$$

称为同步角速度。单位为 rpm 的同步转速为

$$n_s = \frac{120f}{P} \tag{17.14}$$

设电源频率为 60 Hz,表 17.1 给出了同步转速和磁极数的对应关系。

总之，定子绕组建立的旋转磁场包含磁极数为 P 以同步转速为 n_s 旋转的磁场，其中磁极数为 2 和 4 的电机磁场如图 17.1 所示。

表 17.1 电源频率 f=60 Hz 时同步转速和磁极数关系表

P	n_s
2	3600
4	1800
6	1200
8	900
10	720
12	600

练习 17.1 如果将三相电源中的 b 相和 c 相交换，则流过电动机三线绕组中的电流为

$$i_a(t) = I_m\cos(\omega t)$$
$$i_b(t) = I_m\cos(\omega t - 240°)$$
$$i_c(t) = I_m\cos(\omega t - 120°)$$

在这种情况下，旋转磁场改变为顺时针转动。

练习 17.1 的结果显示，任意对调电源三相中的两相导线，电机旋转磁场的方向与原来相反，即改变了电机的转向。这在三相电动机的实际应用中经常使用。

17.1.3 鼠笼式感应电动机

三相感应式电动机转子有两种形式。最简单、最便宜、最耐用的是鼠笼式转子，由铝制条杆和端部的短路环构成，如图 17.6 所示。鼠笼是将熔化的铝浇铸在铁芯(硅钢片)柱外侧的笼形沟槽而成。在鼠笼式感应电动机中，没有电源与转子相连。另外一种形式的转子就是绕线式，后面将讨论。

接下来讨论在鼠笼式感应电动机中如何产生转矩。之前知道，定子绕组建立磁极数为 P 且以同步转速旋转的磁场。随着磁场的转动，鼠笼式导体上将感应出电压。由于磁场方向、磁场和定子的相对运动方向及铝导条长度三者是相互垂直的，因此感应电压 v_c 由式(15.9)决定：

$$v_c = Blu \tag{17.15}$$

其中，B 是磁通密度(磁感应强度)，l 是导条长度，u 是导条和磁场的相对速度。

该感应电压在闭合回路的导条上产生感应电流，如图 17.7 所示，最大感应电压是在磁通密度 B 幅值为最大时，即导条在磁场磁极正下方时，而且，在南极下的导条上产生的电压极性和电流方向与北极下的相反，电流从北极下的导条流进，然后途经短路环，再从南极下的导条流出。

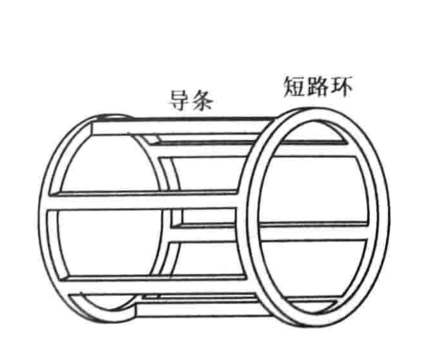


图 17.6 由铝材料构成的鼠笼式转子，端部连接成短路环，其中铝是浇铸在铁芯(硅钢片)槽中的

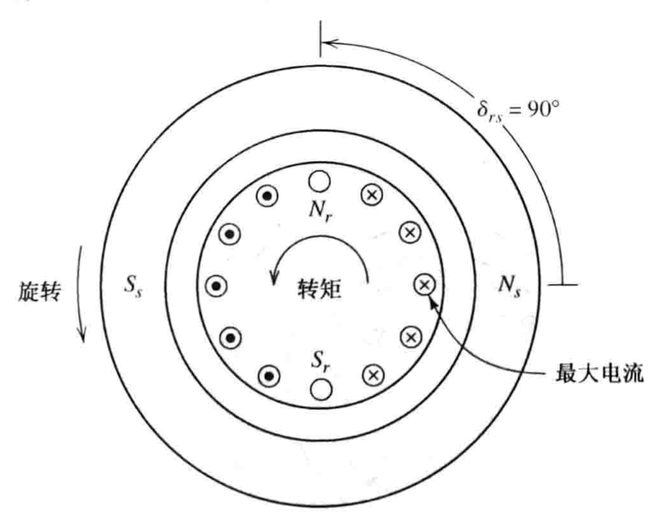


图 17.7 鼠笼式感应电动机的横截面图。定子中旋转磁场感应出转子上的电流并产生转子磁场磁极，两磁场相互作用产生转矩

转子上电流建立的磁极与定子上建立的旋转磁场磁极相互作用，产生转矩。转子上产生的磁北极 N_r 与定子上的磁南极 S_s 产生相反的电磁力。

如果转子上的阻抗为纯电阻，导条上的最大电流将出现在定子产生的磁场磁极 S_s 和 N_s 的正下方，如图 17.7 所示。因此，定子磁极相对转子磁极转移了 $\delta_{rs} = 90°$，如图 17.7 中两极电机所示。正因这两磁极偏移才有最大转矩产生。

17.1.4　转差率

转子上感应电压频率取决于定子产生的旋转磁场和转子的相对速度以及磁极数。定子磁场的同步转速标记为 ω_s 或 n_s，转子负载转速标记为 ω_m 或 n_m。在感应电动机中，转子负载转速 ω_m 可以从零变到几乎等于同步转速，因此，两者之间存在转速差为 $\omega_s - \omega_m$（或 $n_s - n_m$）。

转差率衡量的是相对运动速度，其定义如下：

$$s = \frac{\omega_s - \omega_m}{\omega_s} = \frac{n_s - n_m}{n_s} \tag{17.16}$$

当转子静止不动时，转差率为 1；当转子以同步转速转动时，转差率为 0。

鼠笼式感应电动机的感应电压的角频率又称为滑差，由下式给出：

$$\omega_{\text{slip}} = s\omega \tag{17.17}$$

同样，当负载转速接近同步转速时，感应电压频率接近为零。

17.1.5　转子电感对转矩的影响

图 17.7 中，设整个转子阻抗为纯电阻时分析了感应电动机产生转矩的原理。不过，转子导条的阻抗并非纯电阻，因为导条被嵌入铁芯材料。很显然，导条存在着串联感抗，转子导条的等效电路如图 17.8 所示，图中 $\mathbf{V}_c$ 是感应电压相量，R_C 是转子电阻，L_C 是转子电感。频率和感应电压的大小都与转差率成正比。

图 17.8　转子等效电路

已知转子感应电压频率 $\omega_{\text{slip}} = sw$，电抗为

$$Z_C = R_C + \mathrm{j}s\omega L_C \tag{17.18}$$

电流为

$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_C}{R_C + \mathrm{j}s\omega L_C} \tag{17.19}$$

因有电感存在，电流滞后于感应电压。随着转差率 s 的增加，相位滞后约 90°。因此，转子峰值电流出现在转子略微滞后经过定子磁极之时。这样，转子磁场方向与定子磁场方向相差不到 90°，如图 17.9 所示。因此，产生的电磁转矩减小。（如果定子和转子磁场电极平行，将没有转矩产生。）

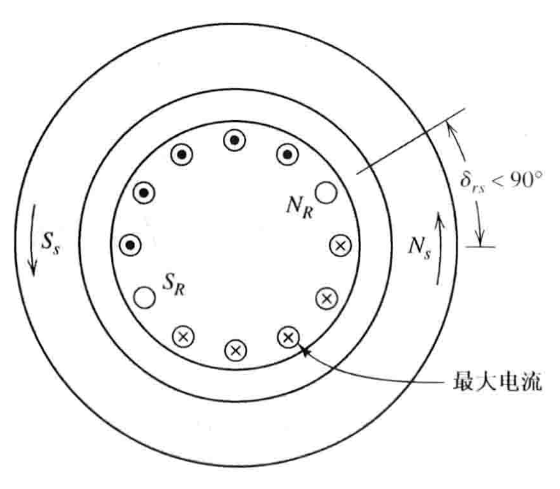


图 17.9　随着转差率的增加，导条上的电流滞后感应电压，以至于转子磁场磁极和定子磁场磁极间的角位移差 δ_{rs} 接近零

17.1.6　机械特性

现分析如图 17.10 所示鼠笼式感应电动机的机械特性。先设转子转速 n_m 等于同步转速 n_s（即转差率 s 等于零），此时，两者相对速度为零。根据式(17.15)，感应电压 v_c 为零；同样，转子电流为零，转矩为零。

当转子慢慢落后于同步转速时，定子产生的旋转磁场比转子转速要快，感应电压幅值与转差率成线性增加，当转差率比较小时，导条上的感抗 $s\omega L_c$ 可以忽略，转子上电流最大值与定子旋转磁场最大时一致，这是产生转矩的最佳位置。由于感应电压正比转差率而阻抗与转差率无关，电流也正比于转差率，因此，当转差率很小时，转矩与转差率成正比，如图 17.10 所示。

随着电动机转速进一步减慢，在式(17.19)中感抗起主要作用，电流幅值与转差率几乎无关。随着电动机转速下降，转矩趋向平缓。因为转子产生的磁极和定子的磁极趋向一致，随着转子转速下降到零，转矩也下降，当转速为零时对应的转矩为启动转矩。转矩最大值时称为失步转矩，也称最大转矩。

以上分析揭示了三相感应电动机的总的特点。设计电动机时可以通过选择电动机的结构和材料来调节机械特性。感应电动机的机械特性的例子如图 17.11 所示，然而电动机设计的相关内容不在本书讨论范围内。

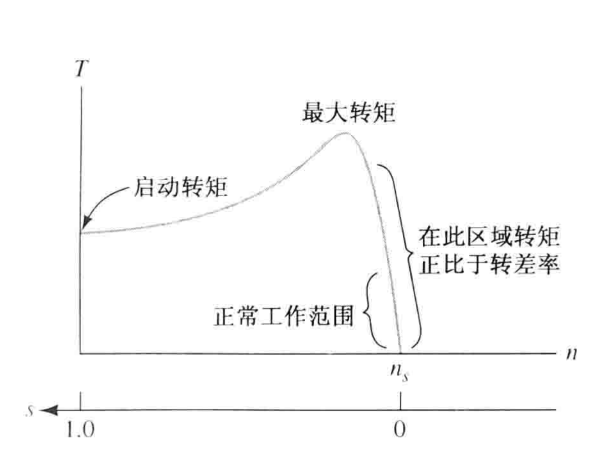


图 17.10 三相感应电动机的机械特性

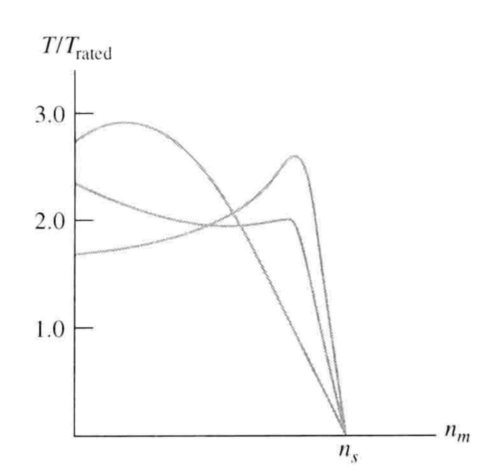


图 17.11 为满足各种设计要求，三相感应电动机的机械特性调节参数满足各种特殊场合

练习 17.2 电源为 60 Hz，5 马力，磁极数为 4 的三相感应电动机，额定状态下以 1750 rpm 的转速旋转。试求转子电流在额定状态下的转差率及频率，如果负载转矩下降一半，估算转子转速。

答案：$s = 50/1800 = 0.02778$，$f_{slip} = 1.667$ Hz，$n = 1775$ rpm。

17.2 感应电动机等效电路和参数计算

17.1 节量化分析了感应电动机原理和机械特性，本节运用等效电路来计算感应电动机的性能参数。

如感应电动机的转子被固定不动，那么定子产生的磁场通过转子线圈，感应电流在转子内部流动。该类型的感应电动机基本类似于三相变压器，其定子绕组即一次绕组，转子绕组则类似于短路的二次绕组。由此，可得到电动机单相绕组的等效电路，如图 15.28 所示。当然，将变压器等效电路应用到电动机的等效电路时有必要加以修改，因为电动机存在旋转电场和电能到机械能之间的能量转换。

17.2.1 转子等效电路

某相转子绕组的等效电路如图 17.12(a)所示。(除电流和电压的相位不同外，其他两相的

等效电路相同。)在定子不动的情况下，$\mathbf{E}_r$ 表示 a 相绕组的感应电压，前面已讨论过，转子感应电压和转差率成正比，在转动时，感应电压可以表示为 $s\mathbf{E}_r$。

已知转子电流频率为 $s\omega$，(每相)转子电感 L_r 的感抗为 $\mathrm{j}s\omega L_r = \mathrm{j}sX_r$，其中 $X_r = \omega L_r$ 是转子不动时的感抗，电阻为 R_r，转子上每相电流相量为 $\mathbf{I}_r$，由下式给出：

$$\mathbf{I}_r = \frac{s\mathbf{E}_r}{R_r + \mathrm{j}sX_r} \tag{17.20}$$

上式分子和分母同时除以 s，得

$$\mathbf{I}_r = \frac{\mathbf{E}_r}{R_r/s + \mathrm{j}X_r} \tag{17.21}$$

等效电路如图 17.12(b)所示。

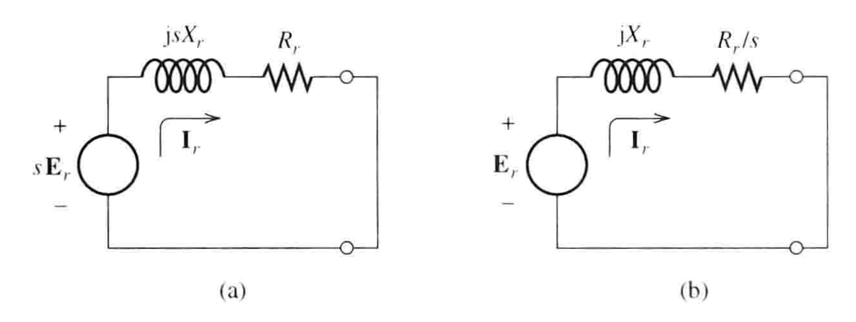


图 17.12 转子某相绕组的两种等效电路

图 17.13 所示的等效电路为分析感应电动机提供了很方便的参考电路。

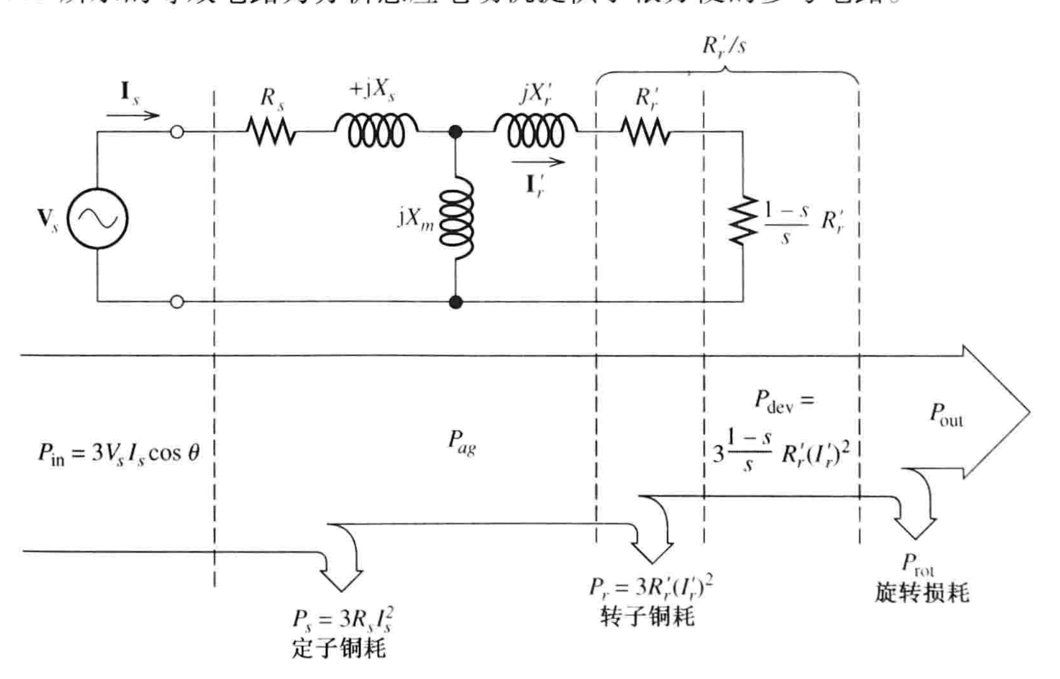


图 17.13 感应电动机某相绕组的等效电路和功率流图。其中，V_s 是相电压有效值，I_s 是相电流有效值

17.2.2 感应电动机的完整等效电路

作为变压器，转子不动时的转子感应电压和定子电压的变比为匝数比。这样，可把转子的阻抗(见图 17.12(b))折算到等效电路的定子一侧，即把转子感抗 X_r 和 R_r/s 各自折算到定子上分别为 X'_r 和 R'_r/s。

感应电动机的某相完整等效电路如图 17.13 所示，定子绕组的电阻为 R_s，漏感抗为 X_s，产生旋转磁场的励磁电感为 X_m。除了符号不同外，该等效电路和变压器等效电路类似。

17.2.3 相与线的电量转换

图 17.13 所示等效电路中的 $\mathbf{V}_s$ 和 $\mathbf{I}_s$ 分别表示每相绕组的相电压和相电流。

三相感应电动机中的绕组要么接成三角形(△形)要么接成星形(Y形)。在三角形连接时，线电压等于相电压，线电流是相电流的 $\sqrt{3}$ 倍。(本书 5.7 节已经介绍过。)如下式：

$$V_s = V_{\text{line}}$$
$$I_{\text{line}} = I_s\sqrt{3}$$

同样，对于Y形连接，有

$$V_s = \frac{V_{\text{line}}}{\sqrt{3}}$$
$$I_{\text{line}} = I_s$$

电动机的额定电压均为线电压。对已知的三相电源，如果是Y型连接，那么电动机绕组的相电压要除以 $\sqrt{3}$ 。

感应电动机的启动电流比额定电流大得多，有时，为减小启动电流，对于△形连接运行的电动机，在启动时采用Y形连接启动，当接近额定转速时再切换到△形连接。

17.2.4 功率和转矩的计算

图 17.13 中，折算电阻 R'_r/s 由以下两部分组成：

$$\frac{R'_r}{s} = R'_r + \frac{1-s}{s}R'_r \tag{17.22}$$

感应电动机的功率流图如图 17.13 所示，电阻 $[(1-s)/s]R'_r$ 所消耗的能量转化为机械能形式，作为输入功率的一部分，称为电磁功率，记为 P_{dev}。某相等效电路如图 17.13 所示，那么整个三相电磁功率为

$$P_{\text{dev}} = 3 \times \frac{1-s}{s}R'_r(I'_r)^2 \tag{17.23}$$

另一方面，被转子电阻 R'_r 所消耗的功率转化为热量，通常，由 I^2R 计算出来的损耗称为铜损(尽管导条有时是铝材料制作的)。整个转子的铜损为

$$P_r = 3R'_r(I'_r)^2 \tag{17.24}$$

那么定子铜损为

$$P_s = 3R_sI_s^2 \tag{17.25}$$

三相电源输入的功率为

$$P_{\text{in}} = 3I_sV_s\cos(\theta) \tag{17.26}$$

其中，$\cos(\theta)$ 为功率因数。

一部分功率被消耗于摩擦和风阻，另一部分功耗则是磁滞和涡流引起的铁心损耗。有时候，我们将一个电阻 r 与磁阻抗 jX_m 并联用于计算铁心损耗。不过，铁心损耗属于转动损耗的一部分，转动损耗正比于转速(在电机静止状态下则为零)。因此，电动机的输出功率等于电磁功率减去转动损耗。

$$P_{out} = P_{dev} - P_{rot} \tag{17.27}$$

通常，电动机效率为

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} \times 100\%$$

则电磁转矩为

$$T_{dev} = \frac{P_{dev}}{\omega_m} \tag{17.28}$$

功率 P_{ag}是经过气隙后进入到转子，并由转子电阻消耗掉的部分。由此，该功率等于电磁功率加上转子电阻消耗掉的部分，将式(17.23)和式(17.24)代入得

$$P_{ag} = P_r + P_{dev} \tag{17.29}$$

$$P_{ag} = 3R'_r(I'_r)^2 + 3 \times \frac{1-s}{s}R'_r(I'_r)^2 \tag{17.30}$$

$$P_{ag} = 3 \times \frac{1}{s}R'_r(I'_r)^2 \tag{17.31}$$

比较式(17.23)和式(17.31)，有

$$P_{dev} = (1-s)P_{ag} \tag{17.32}$$

将式(17.32)代入式(17.28)中，得

$$T_{dev} = \frac{(1-s)P_{ag}}{\omega_m} \tag{17.33}$$

将 $\omega_m = (1-s)\omega_s$代入式(17.33)中，得

$$T_{dev} = \frac{P_{ag}}{\omega_s} \tag{17.34}$$

当电动机启动时，电动机启动转矩一定要大于负载所需转矩。启动时 $\omega_m = 0$，$s = 1$，$P_{ag} = 3R'_r(I'_r)^2$，再利用式(17.34)计算启动转矩。

例 17.1 感应电动机的参数计算

感应电动机磁极数为 4，输出 30 马力，电源频率为 60 Hz，电压有效值为 440 V，三角形连接。电动机参数为

$$R_s = 1.2\ \Omega \qquad R'_r = 0.6\ \Omega$$
$$X_s = 2.0\ \Omega \qquad X'_r = 0.8\ \Omega$$
$$X_m = 50\ \Omega$$

在负荷下工作，电动机转速为 1746 rpm，机械损耗为 900 W，试求功率因数、线电流、输出功率、铜损耗、输出转矩和效率。

解: 根据表 17.1，磁极数为 4 的电动机同步转速为 1800 rpm，利用式(17.16)计算为转差率

$$s = \frac{n_s - n_m}{n_s} = \frac{1800 - 1746}{1800} = 0.03$$

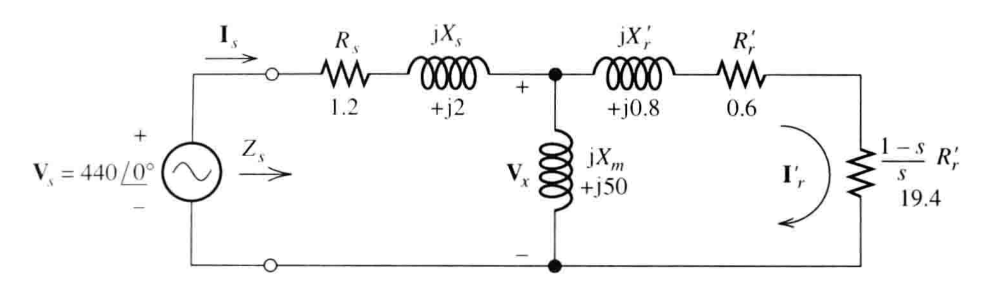


图 17.14 例 17.1 感应电动机中某相的等效电路

利用已知数据绘图如图 17.14 所示的单相等效电路，计算出电源这边的复阻抗为

$$
\begin{aligned}
Z_s &= 1.2 + \mathrm{j}2 + \frac{\mathrm{j}50(0.6 + 19.4 + \mathrm{j}0.8)}{\mathrm{j}50 + 0.6 + 19.4 + \mathrm{j}0.8} \\
&= 1.2 + \mathrm{j}2 + 16.77 + \mathrm{j}7.392 \\
&= 17.97 + \mathrm{j}9.392 \\
&= 20.28\angle 27.59° \ \Omega
\end{aligned}
$$

功率因数是复阻抗的余弦函数。因为阻抗是呈电感性的，所以电流滞后电压，功率因数为

$$\text{功率因数} = \cos(27.59°) = 88.63\% \ \text{滞后}$$

由于电动机是三角形连接，则相电压等于线电压，电压有效值为 440 V。计算相电流如下：

$$\mathbf{I}_s = \frac{\mathbf{V}_s}{Z_s} = \frac{440\angle 0°}{20.28\angle 27.59°} = 21.70\angle -27.59° \ \text{A rms}$$

由此，线电流为

$$I_{\text{line}} = I_s\sqrt{3} = 21.70\sqrt{3} = 37.59 \ \text{A rms}$$

则输入功率为

$$
\begin{aligned}
P_{\text{in}} &= 3I_sV_s\cos\theta \\
&= 3(21.70)440\cos(27.59°) \\
&= 25.38 \ \text{kW}
\end{aligned}
$$

接下来，计算 $\mathbf{V}_x$ 和 $\mathbf{I}_r$：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}_x &= \mathbf{I}_s\frac{\mathrm{j}50(0.6 + 19.4 + \mathrm{j}0.8)}{\mathrm{j}50 + 0.6 + 19.4 + \mathrm{j}0.8} \\
&= 21.70\angle -27.59° \times 18.33\angle 23.78° \\
&= 397.8\angle -3.807° \ \text{V rms}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}'_r &= \frac{\mathbf{V}_x}{\mathrm{j}0.8 + 0.6 + 19.4} \\
&= \frac{397.8\angle -3.807°}{20.01\angle 1.718°} \\
&= 19.88\angle -5.52° \ \text{A rms}
\end{aligned}
$$

在定子和转子中的铜损耗分别为

$$
\begin{aligned}
P_s &= 3R_sI_s^2 \\
&= 3(1.2)(21.70)^2 \\
&= 1695 \ \text{W}
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
P_r &= 3R'_r(I'_r)^2 \\
&= 3(0.6)(19.88)^2 \\
&= 711.4 \ \text{W}
\end{aligned}
$$

最后，电磁功率为

$$\begin{aligned} P_{\text{dev}} &= 3 \times \frac{1-s}{s} R_r'(I_r')^2 \\ &= 3(19.4)(19.88)^2 \\ &= 23.00 \text{ kW} \end{aligned}$$

经检验，满足式

$$P_{\text{in}} = P_{\text{dev}} + P_s + P_r$$

在误差范围内。

输出功率为电磁功率减去机械损耗：

$$\begin{aligned} P_{\text{out}} &= P_{\text{dev}} - P_{\text{rot}} \\ &= 23.00 - 0.900 \\ &= 22.1 \text{ kW} \end{aligned}$$

此功率对应为29.62马力，因此电动机可以在额定状态下运行，其输出转矩为

$$\begin{aligned} T_{\text{out}} &= \frac{P_{\text{out}}}{\omega_m} \\ &= \frac{22\,100}{1746(2\pi/60)} \\ &= 120.9 \text{ Nm} \end{aligned}$$

效率为

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \times 100\% \\ &= \frac{22\,100}{25\,380} \times 100\% \\ &= 87.0\% \end{aligned}$$

例17.2 启动电流和启动转矩

对例17.1的电动机计算其启动线电流和启动转矩。

解： 电动机从静止时启动，有 $s=1$，其等效电路如图17.15(a)所示，计算图中虚线右边的复阻抗为

$$Z_{\text{eq}} = R_{\text{eq}} + \text{j}X_{\text{eq}} = \frac{\text{j}50(0.6+\text{j}0.8)}{\text{j}50+0.6+\text{j}0.8} = 0.5812 + \text{j}0.7943\ \Omega$$

复阻抗的等效电路如图17.15(b)所示。

从电源一侧看过去的等效复阻抗为

$$\begin{aligned} Z_s &= 1.2 + \text{j}2 + Z_{\text{eq}} \\ &= 1.2 + \text{j}2 + 0.5812 + \text{j}0.7943 \\ &= 1.7812 + \text{j}2.7943 \\ &= 3.314\angle 57.48^\circ\ \Omega \end{aligned}$$

因此，启动相电流为

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{s,\ \text{starting}} &= \frac{\mathbf{V}_s}{Z_s} = \frac{440\angle 0^\circ}{3.314\angle 57.48^\circ} \\ &= 132.8\angle -57.48^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

由于电动机是三角形连接，因此启动线电流为

$$I_{\text{line, starting}} = \sqrt{3} I_{s,\ \text{starting}} = 230.0 \text{ A rms}$$

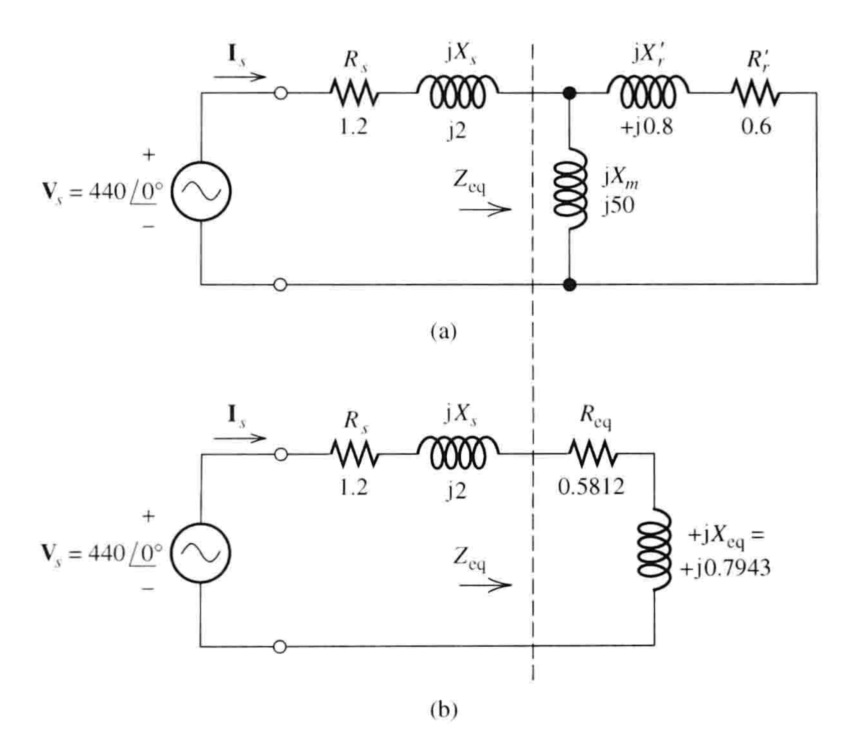


图 17.15　例 17.2 的等效电路

在例 17.1 中，当电动机在接近满载运行时，额定线电流 $I_{line} = 37.59\text{A}$。其启动电流几乎是额定电流的 6 倍多，这是三相感应电动机的典型特点。

通过气隙的功率是传递到图 17.15 所示虚线右侧的功率的 3 倍，计算 P_{ag} 功率为

$$\begin{aligned} P_{ag} &= 3R_{eq}(I_{s,\ starting})^2 \\ &= 30.75\ \text{kW} \end{aligned}$$

利用式(17.34)计算启动转矩，为

$$\begin{aligned} T_{dev,\ starting} &= \frac{P_{ag}}{\omega_s} \\ &= \frac{30\,750}{2\pi(60)/2} \\ &= 163.1\ \text{Nm} \end{aligned}$$

注意，电动机的启动转矩比在额定状态下运行时的输出转矩大得多，这也是感应电动机的一个特点。

例 17.3　感应电动机性能参数的计算

工作于电压 220 V，频率为 60 Hz，线电流为 31.87A 的一台三相Y形连接感应电动机，功率因数为滞后 0.75。定子总的铜损为 400 W，转子铜损为 150 W，机械损耗为 500 W。试求通过气隙后的功率损耗 P_{ag}，电磁功率 P_{dev}，输出功率 P_{out} 和电机效率？

解：相电压 $V_s = V_{line}/\sqrt{3} = 127.0\ \text{Vrms}$。计算电源的输入功率为：

$$\begin{aligned} P_{in} &= 3V_sI_s\cos(\theta) \\ &= 3(127)(31.87)(0.75) \\ &= 9107\ \text{W} \end{aligned}$$

功率 P_{ag} 等于输入功率减去定子上的铜损耗：

$$\begin{aligned} P_{ag} &= P_{in} - P_s \\ &= 9107 - 400 \\ &= 8707\ \text{W} \end{aligned}$$

电磁功率等于输入功率减去电机全部铜损耗

$$P_{dev} = 9107 - 400 - 150 = 8557 \text{ W}$$

在此基础上减去机械损耗，得到输出功率为

$$\begin{aligned} P_{out} &= P_{dev} - P_{rot} \\ &= 8557 - 500 \\ &= 8057 \text{ W} \end{aligned}$$

最后，计算效率为

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{P_{out}}{P_{in}} \times 100\% \\ &= 94.0\% \end{aligned}$$

练习 17.3　设电动机转速为 1764 rpm，再次计算例 17.1 中的各问。

答案： $s = 0.02$；功率因数为 82.62%；$P_{in} = 17.43$ kW；$P_{out} = 15.27$ kW；$P_S = 919$ kW；$P_r = 330$ kW；$T_{out} = 82.66$ N · m；$\eta = 87.61\%$。

练习 17.4　如果转子电阻增加到 1.2 Ω，求启动转矩，并与例 17.2 比较。

答案： $\mathbf{I}_{s,starting} = 119.7\angle -50°$；$T_{dev,\ starting} = 265.0$ Nm

17.2.5　绕线式转子感应电动机

感应电动机的另一种转子形式是绕线式的，称为绕线式感应电动机，其定子和鼠笼式感应电动机一样。不同于铝材料制作的鼠笼式转子，绕线式转子改用三相绕组线圈嵌入转子槽中，结构上保证转子产生的磁极数与定子相同，通常绕线式接成Y形连接，通过滑环再连接到外端部。

练习 17.4 的结果表明，感应式电动机的启动转矩是随着转子的电阻增加而增加的。通过用可变电阻连接到转子端部，电动机的机械特性可调，如图 17.16，因此，通过改变可调电阻即可调节电动机的转速。但是，随着转子电阻的增加，电动机效率会越来越低。

绕线式感应电动机的不足之处在于比鼠笼式电动机的价格贵，耐用性也差。

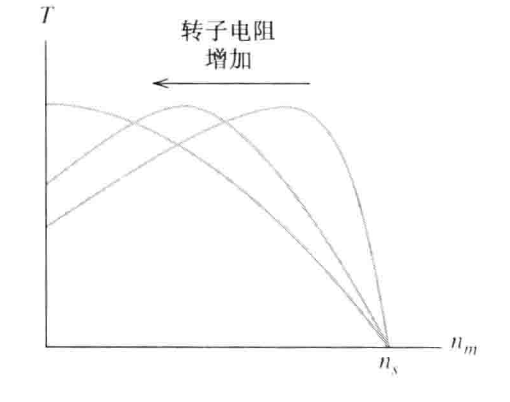


图 17.16　随着绕线式感应电动机串联电阻不同，电动机的机械特性会发生变化

17.2.6　感应式电动机的选择

选择感应式电动机时优先考虑的因素如下：

1. 效率；
2. 启动转矩；
3. 最大转矩；
4. 功率因数；
5. 启动电流。

电动机最希望的性能是前四项参数要大但启动电流要小。遗憾的是，设计满足所有理想的标准值的电动机比较难。事实证明，目前只能设计出综合满意度高的电动机，如转子电阻值越高却导致电动机效率越低；漏感抗的增加会导致较低的启动电流以及降低的功率因数。可见，电机设计工程师必须比较各种类型的电机，并选取一种能最好地满足实际需要的电机。

17.3 同步电机

本节讨论交流同步电机。这种电机主要用在发电企业，作为电动机则多用于高功率、低转速的场合，与感应式电动机的应用场合完全不同。与交流电动机和直流电动机不同的是，同步电动机的转速不因机械负荷变化而变化(假设电源频率为常数)，而是以同步转速 ω_s 旋转，该转速由式(17.13)决定：

$$\omega_s = \frac{\omega}{P/2}$$

(其中，ω 是交流电源的角频率，P 是旋转磁场的磁极数。)除非另作说明，本书假定同步电机一直以同步转速转动。

同步电机的定子和三相感应电动机结构一样，如 17.1 节所述，复习一下前面三相感应式电动机的内容，三相绕组建立定子磁场，该磁场的磁极数为 P，分布于定子圆周，旋转磁场南北极交替变化，以同步转速转动。在同步电机中，定子中的绕组称为电枢绕组。

同步电机中的转子通入直流电流，其励磁绕组建立极数为 P 的磁场。(在小型电机中，转子可以被永磁体取代，不过本节主要研究励磁绕组类型的同步电动机。)用直流电源提供励磁电流，通过静止电刷到滑环，滑环内部滑片间和转轴间都彼此绝缘。另外一个方法就是设置一个小的交流发电机，称为励磁机，通过二极管整流为直流电，从而避免了对电刷和滑环的维护。

极数为 2 和 4 的同步电动机如图 17.17 所示，转子可以为圆柱体(隐极式)，如图 17.17(a)所示，也可以是四极凸极式电动机，如图 17.17(b)所示。一般凸极式电动机价格便宜但转速低，磁极数较多。高速电机通常是圆柱形转子(隐极式同步电机)。凸极式电动机常用于水力发电，而隐极式电动机常用于热(煤、核能等)电站。

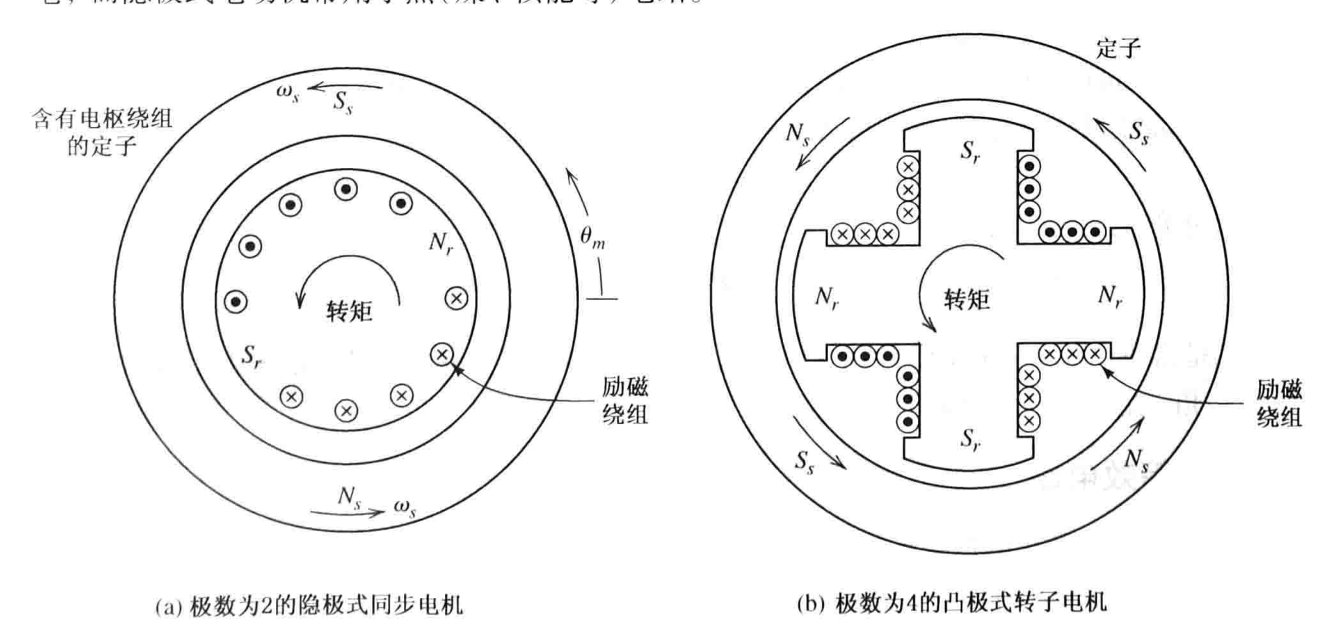


图 17.17　两种同步电动机的横截面图。定子中的磁极和转子中的磁极相对位置如图，因为转子中的磁极与定子中的磁极产生相反的电磁力，产生了转矩

17.3.1 汽车的交流发电机

大多数汽车的交流发电机都是同步电机，除非电枢没有连接到独立的交流电源。因此，交流电机的转速不是固定值。当转子旋转时，旋转磁场切割电枢导体，感应产生交流电压。此交

流电压被整流为直流电压，用于车灯照明、电池充电等。交流电压的频率与幅值随着转速加快而增大，感应电压的幅值与磁通呈正比，而磁通量又取决于磁场电流值。一个电控电路(或者是稳压电路)改变着磁场电流值，以保证整流电路的输出电压大约维持在 14 V。

17.3.2 电动机的运行状态

将定子中的电枢绕组连接至三相电源，则同步电机可作为电动机应用。这时，在电枢绕组中将有三相电流流通，建立旋转磁场。转子按照同步转速旋转，其转子磁极滞后于旋转磁场的磁极一个角度，由于转子磁极力求与旋转磁极同步，故产生电磁转矩，如图 17.17 所示。

17.3.3 电角度

如图 17.17(a)所示，定义绕着气隙偏移的角位移为 θ_m。有时，测量角位移作为电角度比较方便，因为 180°表示磁北极与磁南极之间的角度差。因此，一个两极电机的电角度为 360°，四极电机为 720°，那么六极电机的电角度为 3 ×360°。电角度用 θ_e 表示，则电角度和机械的角位移关系式如下：

$$\theta_e = \theta_m \frac{P}{2} \tag{17.35}$$

17.3.4 磁场分量

气隙中存在的合成旋转磁场由转子中的励磁直流电流和定子电枢绕组中的交流电流共同产生，其磁通是时间和角位移的函数。磁力线垂直于气隙面，因这样路径最短，所受阻力最小。这样，在任意点上，磁力线均垂直于定子槽内电枢绕组的导条。

同步电机多数设计成磁通密度是 θ_m 的正弦函数，由于磁场以固定速度旋转，气隙中任何一点的磁通密度都随时间按正弦规律变化。当 $\theta_m = 0$ 时，磁场量分别用相量 $\mathbf{B}_s$，$\mathbf{B}_r$ 和 $\mathbf{B}_{\text{total}}$ 表示，分别对应着定子的磁通分量，转子的磁通分量和总磁通如下式：

$$\mathbf{B}_{\text{total}} = \mathbf{B}_s + \mathbf{B}_r \tag{17.36}$$

转子中的电磁转矩为

$$T_{\text{dev}} = KB_r B_{\text{total}} \sin(\delta) \tag{17.37}$$

其中，K 是常数，取决于电机结构和材料。B_{total} 和 B_r 分别是相量 $\mathbf{B}_{\text{total}}$ 和 $\mathbf{B}_r$ 的幅值。δ 是电角度，又叫转矩角，是转子磁场滞后于定子磁场的角度。

17.3.5 等效电路

各旋转磁场分量在电枢绕组中感应出相应的电压。以电枢绕组的 a 相为例，除了相位各偏移 ±120°外，其他两相的感应电压和电流与 a 相类似。

转子磁通的感应电压分量用相量表示如下：

$$\mathbf{E}_r = k\mathbf{B}_r \tag{17.38}$$

其中，k 是常数，取决于电机的结构特点。

由定子产生的旋转磁场感应出的另一个电压分量为

$$\mathbf{E}_s = k\mathbf{B}_s \tag{17.39}$$

可见，定子磁场由电枢绕组中的电流建立，定子是一个互感耦合的三相电抗器，定子磁场的感

应电压由下式给出：

$$\mathbf{E}_s = \mathrm{j}X_s\mathbf{I}_a \tag{17.40}$$

其中，X_s是感抗，称为同步电抗；$\mathbf{I}_a$ 是电枢电流的相量。（实际上，定子电枢绕组也有电阻，如果需要更精确地计算，感应电压分量应是 $\mathbf{E}_s = (R_a + \mathrm{j}X_s)\mathbf{I}_a$。但是，电阻 R_a比电抗小很多，因此式(17.40)已经足够准确。）

在电枢绕组端部的电压是这两个电压分量的总和：

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_s \tag{17.41}$$

其中，$\mathbf{V}_a$ 是 a 相绕组的电压相量。将式(17.40)代入式(17.41)中，有

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{E}_r + \mathrm{j}X_s\mathbf{I}_a \tag{17.42}$$

另外，可以写出

$$\mathbf{V}_a = k\mathbf{B}_{\mathrm{total}} \tag{17.43}$$

这是因为总电压与总磁通成正比。

同步电机的等效电路如图 17.18 所示，其中只画出了 a 相电枢绕组。三相电源中的 $\mathbf{V}_a$ 提供电流给电枢绕组，在转子的励磁作用下，在电枢绕组上感应出交流电压 $\mathbf{E}_r$。直流电压源 V_f提供直流电流 I_f给转子，可调电阻 R_{adj}串联在励磁电路中，方便调节励磁电流的大小，同时也调整了转子磁场 $\mathbf{B}_r$ 和感应电压 $\mathbf{E}_r$。

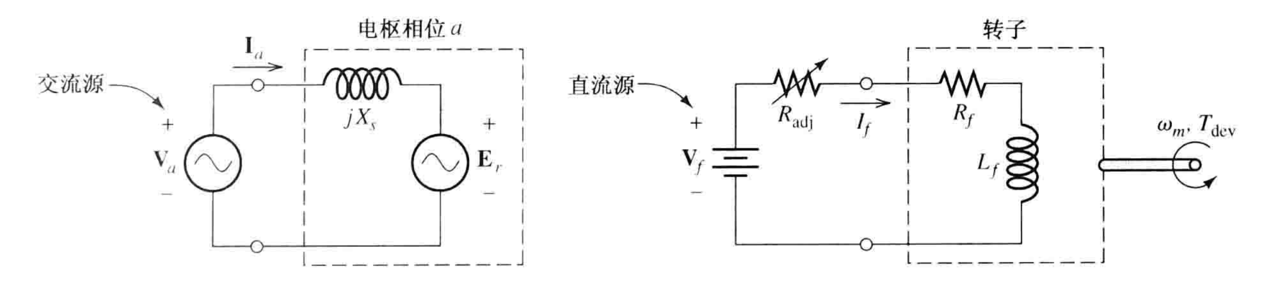


图 17.18　同步电动机的等效电路。基于式(17.42)的电枢绕组等效电路

电机中的电枢绕组可以连接成星形，也可以连接成三角形。本书没有具体考虑它是哪种连接方式，因为无论哪一种方式，$\mathbf{V}_a$ 都表示 a 相绕组的两端电压相量。在星形连接中，$\mathbf{V}_a$ 对应的是相电压相量，而在三角形连接中则对应的是线电压相量。类似地，$\mathbf{I}_a$ 是流过 a 相绕组中的电流，在星形连接中对应的是线电流，而在三角形连接中却是相电流。无论哪种连接方式，最重要的是知道 $\mathbf{V}_a$ 始终是 a 相绕组两端的电压，电流 $\mathbf{I}_a$ 是流过 a 相绕组中的电流。

由于转子励磁磁场滞后于总磁场，电磁转矩[由式(17.37)计算]和输出功率都是正值，即该电机作为电动机在运行。

由三相交流电源提供输入功率给电动机，输入功率表达式如下：

$$P_{\mathrm{dev}} = P_{\mathrm{in}} = 3V_aI_a\cos(\theta) \tag{17.44}$$

其中，功率因数在三相绕组中都一样，因此总功率为单相功率乘 3。由于等效电路没有考虑各种损耗，因此输入功率等于机械功率。

17.3.6　功率因数校正的含义

三相绕组吸收的总无功功率为

$$Q = 3V_aI_a\sin(\theta) \tag{17.45}$$

其中，θ 定义为相电压 $\mathbf{V}_a$ 超前相电流 $\mathbf{I}_a$ 的相位角。

如图 17.19(a)所示，由于相电流超前相电压，所以相位角 θ 为负值，计算出该台电机的无功功率为负，表明同步电机可以提供无功功率(此时，同步电机作为同步补偿机用)。这是同步电机的一个重要优点，因为大多数企业都有一个滞后的总功率因数(很大程度上是由于使用了电感性的电动机)。功率因数极低导致输电线和变电站变压器的电流增大。这样，电力公司就要向这些客户收取更多的电力费用。但如果在工厂里采用了同步补偿电机，部分无功功率就地被同步补偿机抵消，因而降低了电能费用。如果今后你被聘为企业的工程师，你将被要求深入了解这些概念与原理。

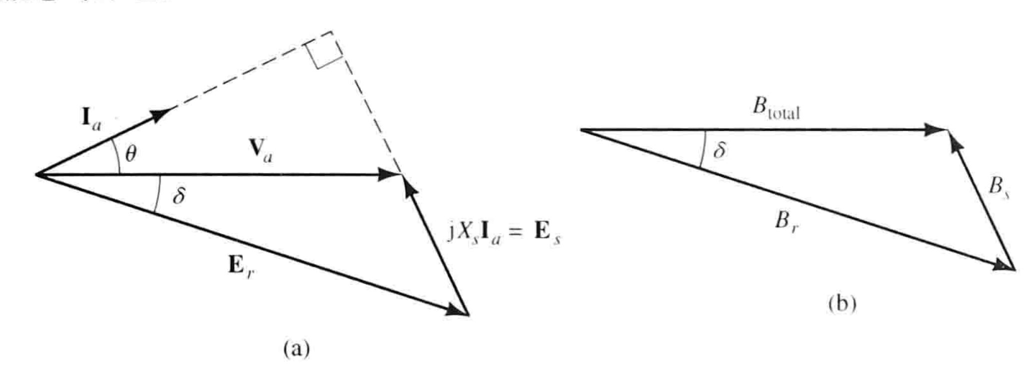


图 17.19 同步电动机的电压和电流相量图。注意，定子部分的电压 $\mathbf{E}_s = \mathrm{j}Xs\mathbf{I}_a$ 与电流$\mathbf{I}_a$的角度差是正确的。转矩公式为$T_{\text{dev}} = KB_rB_{\text{total}}\sin\delta$，功率因数是$\cos(\theta)$

有时企业安装一台无负载的同步电机，其目的就是为了校正功率因数。由于无负载(并忽略各种损耗)，则转子磁场和总磁场的电角度一致，其转矩角 δ 为零。根据式(17.37)，电磁转矩为零，无载同步电机的相量图如图 17.20 所示。

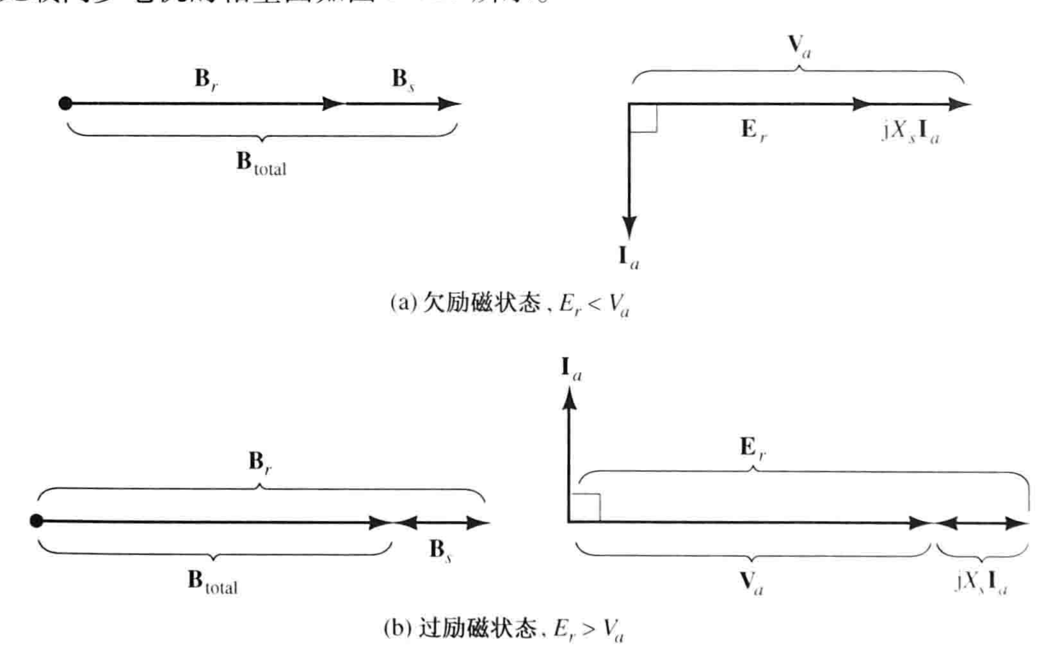


图 17.20 无载同步电机的相量图。当一台电机满足 $E_r > V_a$ 时，电流 $\mathbf{I}_a$ 超前于电压$\mathbf{V}_a$90°。电机的各相等效为一个电容器，这时电机提供无功功率

如果满足：

$$V_a > E_r\cos(\delta) \tag{17.46}$$

就称电机是欠励磁的。对于无载电机的相位角 $\delta = 0$，如果 $\mathbf{E}_r$ 幅值小于相电压 $\mathbf{V}_a$ 的幅值，那么电机为欠励，则电流 $\mathbf{I}_a$ 滞后电压 $\mathbf{V}_a$ 为 $\theta = 90°$，因而供应的有功功率[由式(17.44)计算]为零，

这正是无载(忽略各损耗)同步电机所希望的。欠励同步电机吸收了无功功率，这与大多数电动机的应用需求是相反的。

但是，如果励磁电流一直增加到满足：

$$V_a < E_r \cos(\delta) \tag{17.47}$$

则称电机为过励磁。无载过励磁电机的相量图如图 17.20(b)所示，在这种情况下，电流超前电压 90°，表明该电机提供无功功率，相当于一个纯电容容抗。同步电机在这种运行状态下称为同步补偿机(电容器)。

17.3.7　电机在恒定励磁电流和变负荷情况下的运行

电机通常运行在交流电压源的幅值和相位稳定的情况下。结合式(17.43)可知，总磁通相量 $\mathbf{B}_{total}$ 的幅值和相位固定不变。因为同步电机转速为常数，所以功率和转矩成正比，也就是和 $B_r\sin(\delta)$ 成正比，如式(17.37)所示，即

$$P_{dev} \propto B_r \sin(\delta) \tag{17.48}$$

如图 17.21(a)所示。

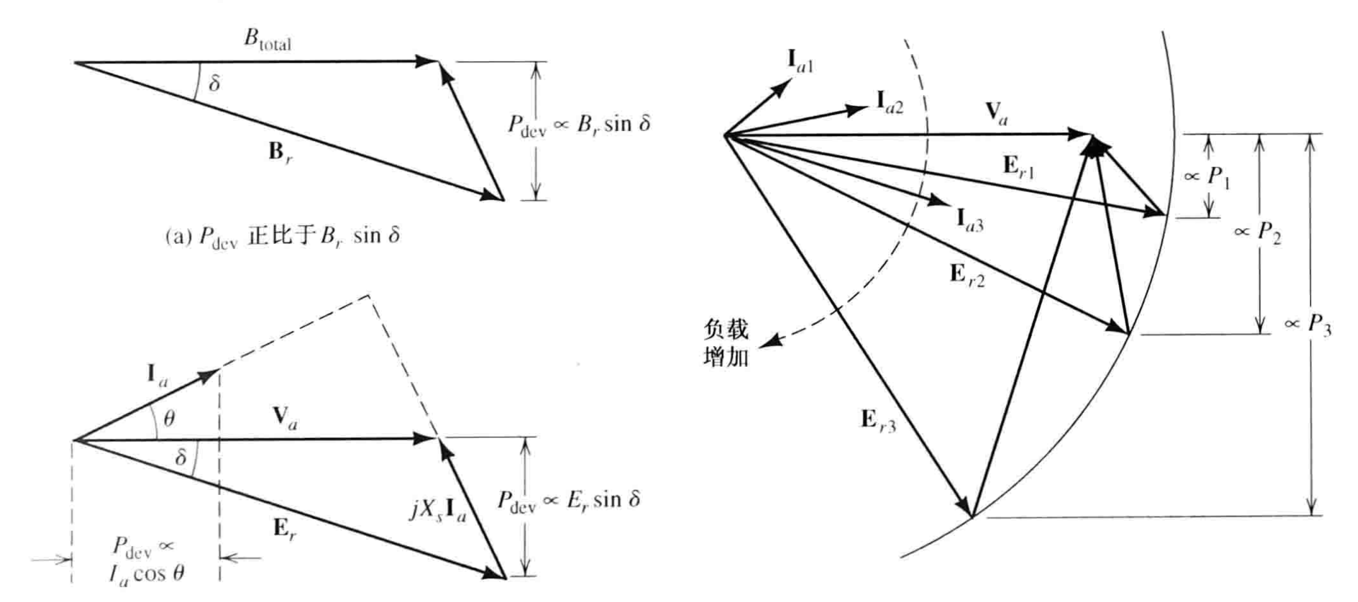


图 17.21　同步电动机的相量图

而且，E_r 正比于 B_r，因此

$$P_{dev} \propto E_r \sin(\delta) \tag{17.49}$$

由于 $P_{dev} = P_{in} = 3V_aI_a\cos(\theta)$(忽略定子的铜损)，因为 V_a 是常数，有

$$P_{dev} \propto I_a \cos(\theta) \tag{17.50}$$

式(17.49)和式(17.50)如图 17.21(b)所示。

假设同步电机运行在励磁电流恒定、负载可变的情况下。由于励磁电流恒定，$\mathbf{E}_r$ 的幅值不变。随着负载变化，$\mathbf{E}_r$ 相位发生变化，但是幅值不变。因此相量 $\mathbf{E}_r$ 的变化轨迹是个圆周，即负载可变的电动机电压相量的变化过程如图 17.21(c)所示。我们注意到随着负载的增加，功率因数角从超前变为滞后。

例 17.4 同步电动机的性能

一台电源额定电压有效值为 480 V，频率 60 Hz，功率为 200 马力，极数为 8，三角形连接的同步电动机，以 50 马力的电磁功率(包含各损耗)开始运行，功率因数为超前 90%，同步感抗 $X_s = 1.4\ \Omega$。试求：(a)同步电动机的转速和电磁转矩。(b)求相量 $\mathbf{I}_a$ 和 $\mathbf{E}_r$ 及转矩角？(c)假设保证励磁电流为常数，负载转矩一直增加到电磁功率为 100 马力，再求相量 $\mathbf{I}_a$、$\mathbf{E}_r$、转矩角和功率因数。

解：

(a)由式(17.14)可求出电动机的磁场转速为

$$n_s = \frac{120f}{P} = \frac{120(60)}{8} = 900\ \text{rpm}$$

$$\omega_s = n_s \frac{2\pi}{60} = 30\pi = 94.25\ \text{rad/s}$$

在最初的运行条件下，其电磁功率为

$$P_{\text{dev1}} = 50 \times 746 = 37.3\ \text{kW}$$

电磁转矩为

$$T_{\text{dev1}} = \frac{P_{\text{dev1}}}{\omega_s} = \frac{37{,}300}{94.25} = 396\ \text{Nm}$$

(b)额定电压指的是线电压的有效值，由于线圈是三角形连接，有 $V_a = V_{\text{line}} = 480\ \text{V rms}$，代入式(17.44)中，解得 I_a 值

$$I_{a1} = \frac{P_{\text{dev1}}}{3V_a\cos(\theta_1)} = \frac{37{,}300}{3(480)(0.9)} = 28.78\ \text{A rms}$$

接下来，由功率因数 $\cos(\theta_1) = 0.9$，求得：

$$\theta_1 = 25.84°$$

由此得到相量 $\mathbf{I}_{a1}$：

$$\mathbf{I}_{a1} = 28.78\underline{/25.84°}\ \text{A rms}$$

由式(17.42)得：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{r1} &= \mathbf{V}_{a1} - \text{j}X_s\mathbf{I}_a = 480 - \text{j}1.4(28.78\underline{/25.84°})\\ &= 497.6 - \text{j}36.3\\ &= 498.9\underline{/-4.168°}\ \text{V rms}\end{aligned}$$

因此，转矩角度 $\delta_1 = 4.168°$。

(c)当励磁恒定(例如 I_f、B_r、E_r 为常数)，负荷转矩增加时，转矩角也必然增加。在图 17.21(b)中，电磁功率与 $\sin(\delta)$ 成正比。因此，有

$$\frac{\sin(\delta_2)}{\sin(\delta_1)} = \frac{P_2}{P_1}$$

代入值并解得 $\sin(\delta_2)$ 为

$$\sin(\delta_2) = \frac{P_2}{P_1}\sin(\delta_1) = \frac{100\ \text{hp}}{50\ \text{hp}}\sin(4.168°)$$

$$\delta_2 = 8.360°$$

由于 E_r 幅值是常数，得

$$\mathbf{E}_{r2} = 498.9\underline{/-8.360°}\ \text{V rms}$$

(可见，$\mathbf{E}_{r2}$ 滞后 $\mathbf{V}_a = 480\angle 0°$，此时该机作为电动机使用。)

接下来，求出新的电流为

$$\mathbf{I}_{a2} = \frac{\mathbf{V}_a - \mathbf{E}_{r2}}{\mathrm{j}X_s} = 52.70\angle 10.61^\circ \text{ A rms}$$

最后，新功率因数为

$$\cos(\theta_2) = \cos(10.61^\circ) = 98.3\% \text{ leading}$$

练习 17.5 对例 17.4 的电动机，设励磁恒定，负载转矩增加到电磁功率 $P_{\text{dev3}}=200$ 马力。试重新计算相量 $\mathbf{I}_a$、$\mathbf{E}_r$、转矩角和功率因数。

答案： $\mathbf{I}_{a3}=103.6\angle -1.05^\circ$；$\mathbf{E}_{r3}=498.9\angle -16.90^\circ$；$\delta_3=16.90^\circ$；功率因数 $=99.98\%$ 滞后。

17.3.8 电机运行在负载恒定和励磁电流变化下

当电机运行在恒定电磁功率 P_{dev} 时，如图 17.21(b)所示，$I_a\cos\theta$ 和 $E_r\sin\theta$ 都是恒定的。在此基础上，如果励磁电流增加，则磁场 E_r 幅值增加，各个励磁电流的相量图如图 17.22 所示。随着励磁电流增加，电枢绕组电流减小，减小到最小值 $\theta=0^\circ$（功率因数为 1）。接下来，功率因数角将会超前并不断增大。当电流相量 $\mathbf{I}_a$ 和电压相量 $\mathbf{V}_a$ 相位相同（例如 $\theta=0$ 时，功率因数为 1）时，电流幅值达到最小。I_a 随励磁电流的变化图如图 17.23 所示，该图因形状为 V 形又称为 V 形图。

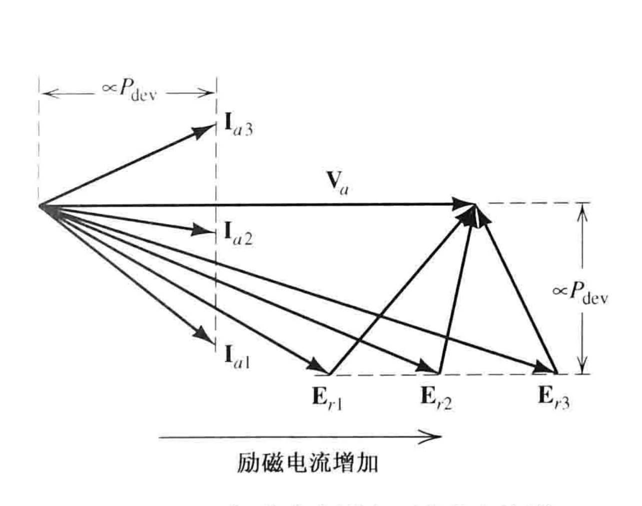


图 17.22 电磁功率不变，励磁电流增加情况下电动机的相量图

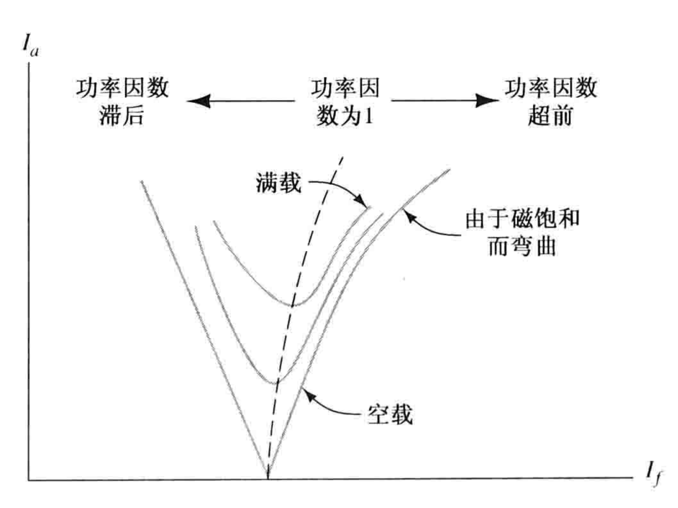


图 17.23 同步电机在励磁电流变化下的 V 形图

例 17.5 功率因数调整

一台额定电压 480 V，频率 60 Hz 的三相电源供电给磁极数为 8、三角形连接的同步电机，其电磁功率（包括各损耗）为 200 马力，功率因数为滞后 85%，呈感性。同步电机的感抗为 $X_s=1.4\ \Omega$。如果励磁电流 $I_f=10\text{A}$，求功率因数为 1 时所需励磁电流是多少？假设不考虑磁饱和，即 B_r 正比于电流 I_f。

解： 先求 E_r 的初始值。因为最初的功率因数为 $\cos(\theta_1)=0.85$，可得

$$\theta_1 = 31.79^\circ$$

相电流为

$$I_{a1} = \frac{P_{\text{dev}}}{3V_a\cos(\theta_1)} = \frac{200(746)}{3(480)0.85} = 121.9 \text{ A rms}$$

电流相量为

$$\mathbf{I}_{a1} = 121.9\angle{-31.79^\circ} \text{ A rms}$$

感应电压为

$$\mathbf{E}_{r1} = \mathbf{V}_{a1} - \mathrm{j}X_s\mathbf{I}_{a1} = 480 - \mathrm{j}1.4(121.9\angle{-31.79^\circ})$$
$$= 390.1 - \mathrm{j}145.0$$
$$= 416.2\angle{-20.39^\circ} \text{ V rms}$$

最初励磁相量图如图 17.24(a)所示。

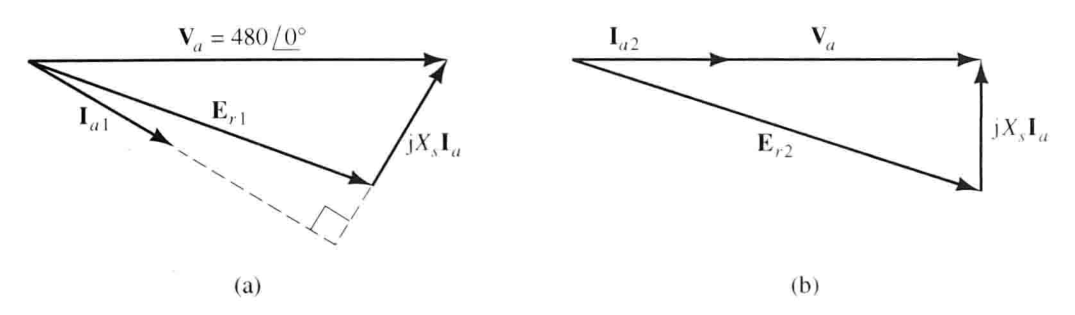


图 17.24　例 17.5 相量图

为达到功率因数为 1，需增加励磁电流和 $\mathbf{E}_r$ 幅值，直到 $\mathbf{I}_a$ 和 $\mathbf{V}_a$ 相位一致，如图 17.24(b)所示。则电流幅值为

$$I_{a2} = \frac{P_{\text{dev}}}{3V_a\cos(\theta_2)} = \frac{200(746)}{3(480)} = 103.6 \text{ A rms}$$

由此，可得到

$$\mathbf{E}_{r2} = \mathbf{V}_{a2} - \mathrm{j}X_s\mathbf{I}_{a2} = 480 - \mathrm{j}1.4(103.6)$$
$$= 480 - \mathrm{j}145.0$$
$$= 501.4\angle{-16.81^\circ} \text{ V rms}$$

已知 $\mathbf{E}_r$ 幅值正比于励磁电流，因此有

$$I_{f2} = I_{f1}\frac{E_{r2}}{E_{r1}} = 10\frac{501.4}{416.2} = 12.05 \text{ A dc}$$

练习 17.6　在例 17.5 中，如果电动机需获得功率因数为 0.9，问励磁电流为多少？

答案： $I_f = 13.67\text{A}$。

17.3.9　最大转矩

如图 17.37 所示为同步电机的电磁转矩：

$$T_{\text{dev}} = KB_rB_{\text{total}}\sin(\delta)$$

如图 17.25 所示。即在转矩角 $\delta = 90°$时输出最大转矩。

$$T_{\max} = KB_rB_{\text{total}} \tag{17.51}$$

一般额定转矩约为最大转矩的 30%。

设同步电动机最初无负载，$\delta = 0°$以同步转速转动。随着负载增加，电机速度下降，δ 增加到电磁转矩满足至负载需要，此时，电机又以新的同步转速转动。

不过，如果加在同步电动机上的负载转矩超过最大转矩，那么电动机无法驱动负载按照同步转速而转动。δ 将一直增加，在电动机上来回产生一个巨大冲击，导致电动机剧烈振动。当同步电机转速与旋转磁场转速一致时，转矩下降到零，电动机转速减慢至停止。

同步电动机的机械特性如图 17.26 所示，一般希望同步电动机以过励磁状态(即 I_f、B_r 和 E_r

比较大)运行，有几个原因：第一，电动机产生无功功率；第二，如式(17.51)所示，最大转矩随着B_r的增大而增大。

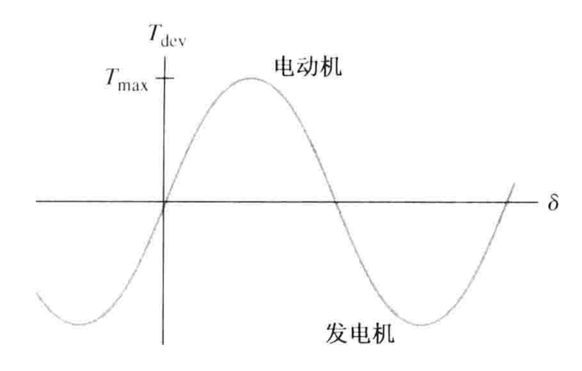


图 17.25　转矩随转矩角的变化图。其中T_{max}是同步电动机的最大转矩

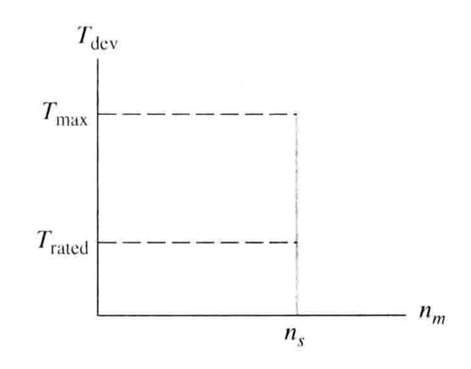


图 17.26　同步电动机的机械特性图

17.3.10　启动方法

由于同步电动机是从零转矩启动的，因此需要制造一个特殊装置来启动，可采用下面几种方法：

1. 改变交流电源的频率(启动频率不到 1 Hz)，通过逐渐加大电源频率来达到电动机的运行转速。此方法由电力电子电路来实现，如单周变换器可将 60 Hz 电源频率转化为任意所需的频率，这样的电路通常用来对转速进行精确调节。
2. 用一个原动机带动同步电动机加速启动。此时，同步电动机连接上交流电源和负荷，不过，必须等到电枢绕组感应电压的相位和线电压的相位匹配时才能接通交流电源。换句话说，仅当转矩角δ接近零时才合上交流电源，否则，当转子磁场力争迅速和定子磁场保持同步时，会出现过电流和过转矩。
3. 许多同步电动机的转子都有阻尼器或阻尼导体，其作用类似于感应电动机中的鼠笼式转子导条。在励磁绕组短接且无负载的情况下，同步电动机类似于感应电动机的启动，当电动机接近同步转速后，接入直流电源来产生励磁，电动机进入同步状态，然后接入负载。

阻尼导体除了用来启动外，还有另一个作用。当同步电动机的转速在同步速度上下摆动时会引起转矩角δ的来回变化，类似于钟摆。如果接入阻尼导条，则摆动会渐次减弱。当以同步转速转动时，在阻尼导条上将无感应电压，不再有摆动效应。

练习 17.7　在转矩角$\delta=90°$时，同步电动机产生最大转矩和最大功率，且$P_{max}=3(V_aE_r/X_s)$和$T_{max}=3(V_aE_r/\omega_mX_s)$，试画出该情况下的相量图。

答案：如图 17.27 所示相量图。

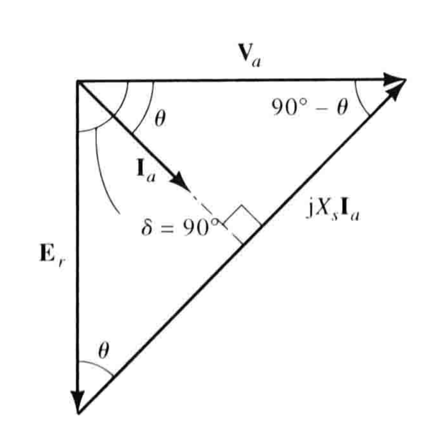


图 17.27　在最大电磁转矩和最大功率条件下的相量图，见练习17.7

17.4　单相电动机

第 16 章分析了通用电动机，即单相交流电动机。本节简略介绍单相交流电动机的其他类型。在家庭、办公室还有小工厂里，单相交流电动机是很重要的，因为在这些地方没有三相电源供电。

和多数感应电动机相比，通用电动机有更高的功率/重量比，但是它们的寿命却不长，因为存在电刷磨损的难题。如果电源频率一定，那么感应电动机就是转速固定的设备。反之，通用电动机的转速也可通过改变供电电压频率来进行调节。

17.4.1 典型的单相感应电动机

如图 17.28 所示为典型的单相感应电动机，连接交流电源的是电动机定子中的主绕组(接下来会介绍用于启动辅助绕组)。如图 17.6 所示，单相电动机也有一个和三相鼠笼式感应电动机一样的鼠笼形转子。

理想情况下，气隙中的磁通在铁芯横截面圆周按正弦规律变化，如下式：

$$B = Ki(t)\cos(\theta) \tag{17.52}$$

除符号不同外，上式与式(17.1)表示的三相感应电动机中 a 相产生的磁感应强度相一致。定子电流如下：

$$i(t) = I_m\cos(\omega t) \tag{17.53}$$

将上述表达式代入式(17.52)，有：

$$B = KI_m\cos(\omega t)\cos(\theta) \tag{17.54}$$

此磁通是脉动的而非旋转的，每周期换向两次。

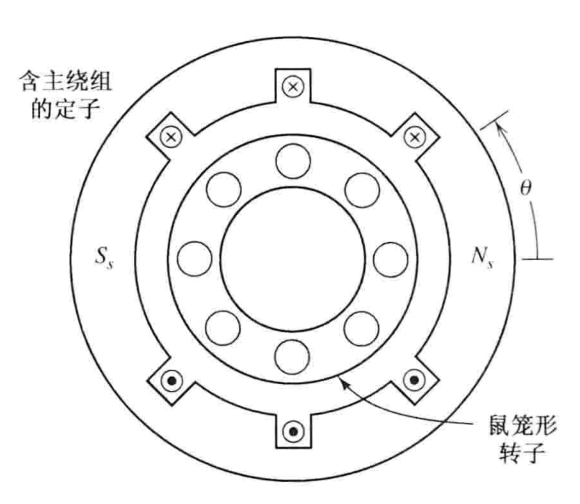


图 17.28 典型的单相感应电动机的横截面图

然而，通过应用余弦三角函数恒等式，可将式(17.54)写成：

$$B = \frac{1}{2}KI_m\cos(\omega t - \theta) + \frac{1}{2}KI_m\cos(\omega t + \theta) \tag{17.55}$$

式(17.55)等号右边第一项表示磁通逆时针旋转(因为 θ 角为正)，而第二项表示的是顺时针转动。因此，单相感应电动机的磁通量可分解成两个转动方向相反的磁通量。然而，三相感应电动机的磁通只向一个方向转动。

设电机以速度 ω_m 逆时针转动，与转子转动方向相同的一个励磁分量称为前向分量磁场，另一个则称为反向分量磁场。这两个分量中的每一个都产生转矩，但是两者转矩方向相反。每一个分量产生的机械特性和三相感应电动机类似，由前向磁场、反向磁场和总磁场产生的转矩如图 17.29 所示。

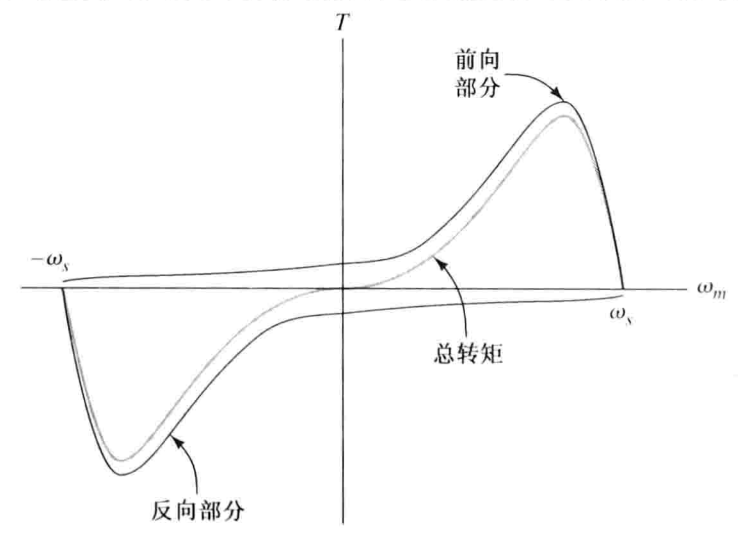


图 17.29 主绕组产生两个反向旋转的磁通分量，每一个分量都能在转子上感应转矩。主绕组不能单独感应出启动电压

注意，该电动机的启动转矩为零，因此，主绕组产生的磁场不能启动负荷。不过，一旦电动机启动，则电机将加速负载的转速直至接近同步转速。其运行特点（以同步转速转动）和三相感应电动机类似。由于机械特性的对称性，典型的单相电动机能朝任意方向运行良好。

17.4.2 辅助绕组

在多数应用场合下，上述单相感应电动机不具备启动转矩是严重的障碍。不过，可以通过修改完善驱动电路，使典型单相感应式电动机具备启动转矩并提高其运行特性，现已表明（详见习题 P17.11）若将幅值相同、相位相差 90°的两电流流入绕组，则可产生前向磁通转动分量（这和三相感应电动机在相位相差 120°的线圈中感应产生旋转磁场类似）。如果这两电流在相位上相差不到 90°（但至少大于 0°），那么前向分量磁通比反向分量磁通大，将产生净启动转矩。这样，几乎所有单相感应电动机都需要一个辅助绕组，与主绕组在空间位置上相差 90°。为使在主绕组和辅助绕组中的两电流产生要求的相位偏移，单相感应电动机通过不同的结构设计来满足此需要。

一种办法就是采用比主绕组线径更细的导线来加工辅助绕组，以获得更高的电阻/感抗比，那么在辅助绕组中电流的相位角与主绕组中的不同。采用该方法的电动机称为分相电动机（如图 17.30 所示）。通常，设计该辅助绕组仅在启动电动机时用，一旦电动机速度接近额定转速，开关将切断与辅助绕组的连接。（比较常见的故障是如果该开关不能切断，则会导致辅助绕组过热而被烧坏。）

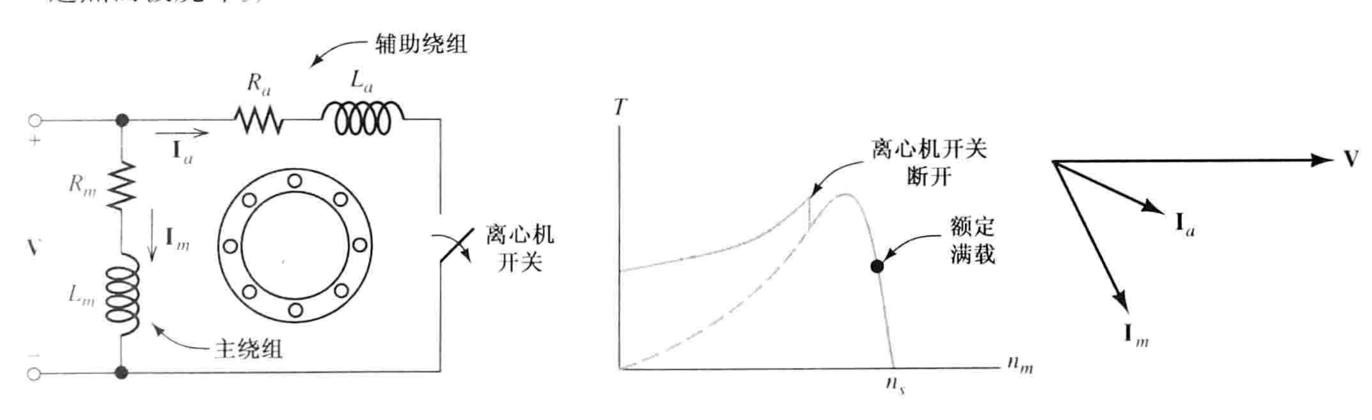


图 17.30 分相式的单相感应电动机

当单相感应电动机在主绕组驱动下旋转时，其转矩会以电源频率的两倍发生脉动变化，因为当定子电流过零时，不会产生转矩。另外，在三相感应电动机中转矩恒定是因为至少任意瞬间三相中的两相电流为非零值。因此，相比之下，单相感应电动机会有更多的噪音和振动。而且，与同功率的三相电动机相比，单相电动机的体积更大，重量更重。

在电容式启动的单相电动机中，将一个电容器与辅助绕组串联，这会比分相式电动机产生更大的启动转矩，因为主绕组和辅助绕组两者的电流相差近 90°。不过，在电容式运行电动机中，辅助绕组是电路中的固定部分，可产生更平滑的机械特性曲线，并使振动减少。将上述二者结合起来构成的电容启动与电容运行电动机的结构如图 17.31 所示。

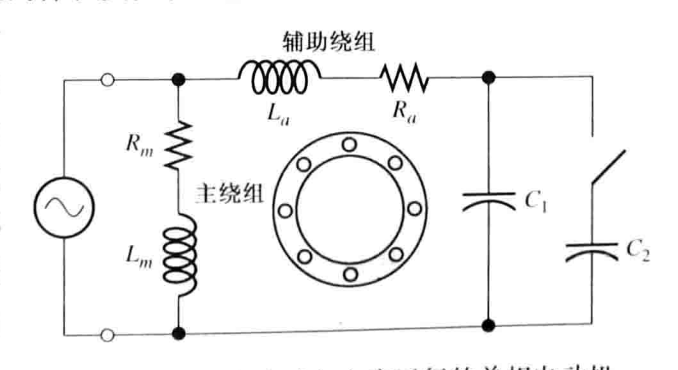


图 17.31 电容启动与电容运行的单相电动机

17.4.3 罩极式电动机

最经济的一种方法就是为单相感应电动机提供自行启动方式，称为罩极式电动机，如图 17.32 所示。电动机各个磁极的表面设有一副短路铜环。当电动机磁场建立之后，电极罩极环上产生感应电流，使磁极上被罩部分的磁场比未罩住部分的磁场滞后些，因而磁极产生旋转磁场，形成启动转矩。这种方法仅用于小功率电动机(例如，功率为 1/20 马力或更小)。

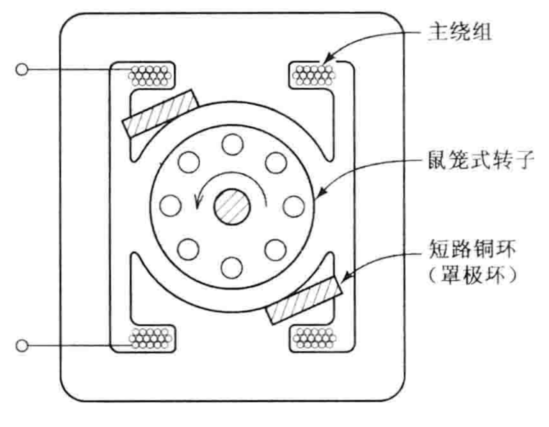


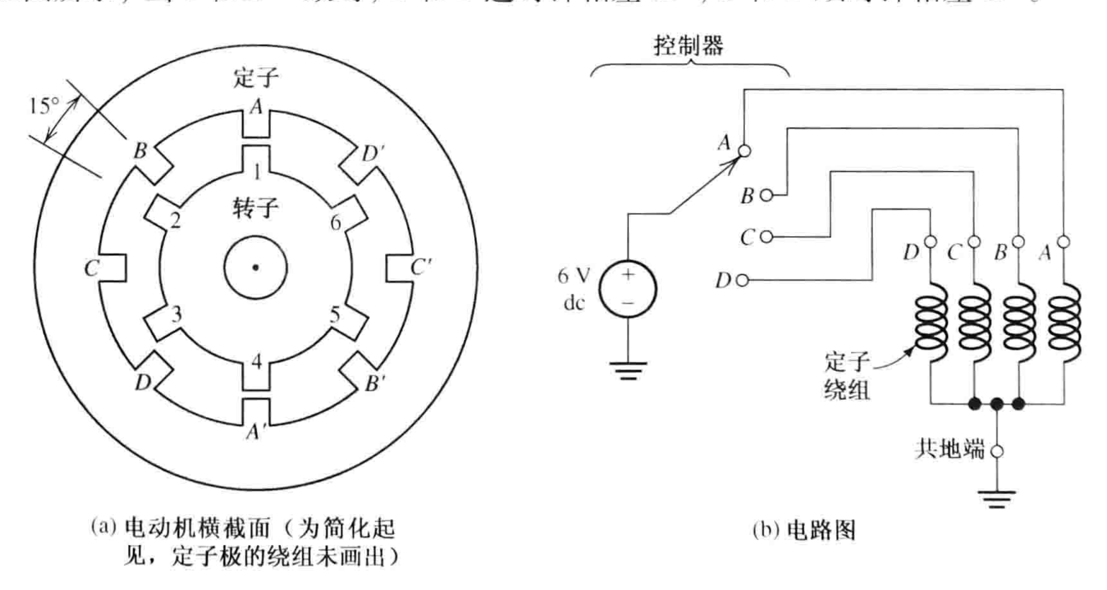
图 17.32 罩极式电动机

17.5 步进电动机和无刷直流电动机

17.5.1 步进电动机

步进电动机用于精确、反复地定位，例如机床加工应用或喷墨打印机的喷头移动。通过步进控制器将电脉冲送往电动机的励磁绕组，实现脉冲驱使电动机轴按照任意方向转动对应的一个角度(步进角)，该步进角范围可从最小 0.72°(每周 500 步)到最大 15°(每周 24 步)。步进电动机的精度保证在每步不到 3% 的误差范围内，但此精度不是步进电动机往复运动的累积误差。通过控制施加到电动机绕组的电脉冲频率，可持续控制步进电动机的转速从零达到最大值，最大转速取决于电动机结构与负载大小。

步进电动机有几种类型，图 17.33(a)所示为最简单的电动机(称之为可变磁阻步进电动机)的横截面。定子上有八个凸极，各自相隔 45°。另外，转子上还有六个凸极，彼此相隔 60°，这样，如图所示，当 1 和 A 一致时，2 和 B 逆时针相差 15°，3 和 D 顺时针相差 15°。



(a) 电动机横截面（为简化起见，定子极的绕组未画出）

(b) 电路图

图 17.33 可变磁阻步进电动机

定子中包含四个绕组(横截面图中未画出)。如图 17.33(b)所示，步进控制器每次仅给一个绕组提供能量。A 绕组线圈一部分绕在 A 磁极，另一部分绕在 A'磁极。当施加电流之后，A 极为磁北极，A'为磁南极。于是，转子转动到使气隙(磁极 A 或者 A' 与转子之间)减小的角度。

只要给 A 绕组提供电流，转子固定在图中所示位置。但是，如果通过移动控制开关，将能量从磁极 A 转移到磁极 B，则转子将顺时针移动 15°，为的是 2 和 B 相一致。这样，施加到绕组的功率的相序 3 为 $ABCDABC\cdots$，这样逆时针旋转的增量为 15°。通过改变开关频率，可改变电动机的转速(从零到最大值)；而且，如果改变开关的连通顺序为 $ADCBADCB\cdots$，则转子实现反方向转动。

另外一种类型是永磁式步进电动机，它的转子为圆筒型(又叫听装罐式转子)，有个永磁极，其南北极沿着转子圆周分布。永磁电动机的定子结构类似于磁阻式电动机。对于磁阻类型，当一系列脉冲作用于定子绕组时，则转子位置步进改变。混合式步进电动机则是可变磁阻与永磁式电动机的组合结构。当然，步进电动机的详细特征可从生产厂家的网站上查到。

17.5.2 无刷直流电动机

直流电动机特别适合于要求转速高而且直流电源方便使用的场合，如飞机和汽车。但由于直流电动机有换向器和电刷，传统的直流电动机有几点不足之处：①因换向器和电刷经常磨损，导致直流电动机使用寿命短，尤其在高速运转的工作环境下。②电刷在换向片间的移动产生电弧，如果工作在易爆环境下则容易引起危害，同时会产生严重的电磁干扰。由此，目前新开发了一种无刷直流电动机，提供了一个比传统直流电动机更好的选择。

无刷直流电动机实质就是在永磁步进电动机装配位置传感器和增强功能的控制器。步进电动机的电源每次提供给一个定子绕组。当位置传感器提示转子磁场和定子磁场即将达到一致时，控制器自动切换开关，把能量输入到下一个定子绕组，实现电动机连续、平滑的运转。通过改变施加在定子绕组的脉冲的幅度和脉宽，可方便地调节电动机的转速。因此，无刷直流电动机由直流电源驱动，却具备了类似于传统并励直流电动机的运行特点。

无刷直流电动机主要应用在小功率的场合，其优点是效率比较高，极少维护，寿命长，无电磁干扰，能运行在具有爆炸化学物质的环境下，也具有很高的转速(50 000 rpm 或更高)。

本章小结

1. 在感应电动机中，给定子绕组提供三相电源，在气隙中产生同步转速的旋转磁场。如果任意交换电源的两相线，则电动机的转向反向。
2. 鼠笼式电动机的铝导条嵌入在转子中，当励磁磁场转动时，转子中感应出电流并产生转矩，图 17.10 是其机械特性图。在稳定运行状态下，通常电动机运行在转差率 0% ~ 5%，且输出功率和转矩几乎正比于转差率。
3. 计算感应电动机的性能时，图 17.13 所示单相等效电路是有用的。
4. 在选择感应电动机时最重要的考虑因素是：效率、启动转矩、最大转矩、功率因数和启动电流。
5. 通常，感应电动机的启动转矩是满载额定转矩的 1.5 倍或更高。这样，感应电动机能够启动任何负载转矩在额定转矩以内的负载。额定电压下启动电流通常是满载额定电流的 5 ~ 6 倍。
6. 三相同步电动机中的定子绕组用来产生磁极数为 P、同步转速的励磁磁场，转子具有电磁性，电动机以同步转速转动，图 17.26 为该电动机的机械特性图。
7. 如果在过励磁状态下运行，同步电动机将产生无功功率，有助于调节工厂企业的功率因数，减少能量损耗，节约费用。

8. 图 17.18 是三相同步电动机的等效电路，常用来进行性能参数的计算。
9. 同步电动机的启动转矩为零，可通过特殊装置来保证其启动。
10. 单相感应电机有主绕组和辅助绕组，它们的安放位置相差电角度 90°。当仅给主绕组提供能量时，电动机能运行，但启动转矩为零。由于电阻/电抗比值不一样或因在电路中存在电容，在两绕组中的电流出现相位差，从而产生启动转矩。一般来说，当电动机接近额定转速时，断开启动绕组与直流电源的连接。
11. 对于具有同样额定功率的电动机，单相感应电动机比三相感应电动机更重且振动也大。
12. 步进电动机常用在需要多次精确定位的场合。
13. 工作在低功率情况下的无刷直流电动机比传统直流电动机更好，具有寿命长，维护少，高转速，无电磁干扰，可在具有爆炸性物质的场合使用。

习题

17 1 节 三相感应电动机

*P17.1 需要一台频率 60 Hz、转速接近 850 rpm 的感应电动机，问该电动机需要的磁极数是多少？该转速下的转差率是多少？

P17.2 在频率 50 Hz 下给三相感应电动机制作一份表格，标明不同磁极下该电动机的同步转速，设电动机最高磁极数为 8，当电源频率为 400 Hz 时再重复上述问题。

P17.3 解释为什么感应电动机在同步转速下的转矩为零。

P17.4 一台功率 10 马力，磁极数为 6，电源频率 60 Hz 的三相感应电动机在额定状态下以 1160 rpm 转速运行。试求电动机转差率和转子频率。当负载下降一半时，计算电动机转速。

P17.5 如图 17.7 所示感应电动机，如果原动机以高于同步转速的速度带动转子，要求重新作图，标明转子上的电流方向、转子上的磁极数和电磁转矩方向。再分别分析电机工作于电动机状态还是发电机状态。

P17.6 感应电动机中定子绕组在气隙中产生的励磁磁场为 $B = B_m\cos(\omega t - 2\theta)$，其中 θ 是图 17.4 中逆时针方向旋转的角位移。试问该电机磁极数多少？如果电源频率为 50 Hz，试求磁场的转速，问磁场究竟是顺时针还是逆时针旋转？如果励磁磁场为 $B = B_m\cos(\omega t + 3\theta)$，再重复上述各问。

*P17.7 一台极数为 4 的感应电动机，负载下转速为 2500 rpm。如将 400 V 直流电转化为三相交流电提供给该电动机，假设转差率为 4%，试求该交流电所需的频率，设负载功率为 2 马力。如果直流-交流转化器效率为 88%，电动机效率为 80%，求从直流电源中获得的电流。

P17.8 一个电动汽车设计方案中，将磁极数为 4 的三相感应电动机的转轴直接连接到汽车驱动轴上，无需齿轮连接。轮胎的外径为 20 英寸。不用变速器，采用电子变换器从 48V 蓄电池中获得可调频率的三相交流电，设转差率变化可忽略，试求当电动汽车以每小时 5 ~ 70 英里行驶时，所需频率的变化范围。包括蓄电池和驾乘人员之内，整个电动汽车重量为 1000 公斤，直流转换为交流的逆变器的效率为 85%，电动机的效率为 89%。当汽车在 10 秒内从 0 加速到 40 英里每小时(加速度为常数)时，试求电流的时间函数，忽略风阻力和路面摩擦力。

P17.9 在上题中，假设汽车以恒定功率加速，试解答 P17.8 中的各问。

*P17.10 当电源频率从额定值开始减小时，为什么必须减小供给感应电动机的电压？

P17.11 如图 P17.11 所示，磁极数为 2 的感应电动机有空间位置相差 90°的两绕组。由励磁绕组产生的磁场 $B_a = Ki_a(t)\cos(\theta)$ 和 $B_b = Ki_b(t)\cos(\theta - 90°)$，这两相电源分别产生的电流为 $i_a(t) = I_m(t)\cos(\omega t)$ 和 $i_b(t) = I_m(t)\cos(\omega t - 90°)$。试绘图说明总磁场的转动原理，并求其转速和方向，用 K 和 I_m 表示最大的磁通密度。

P17.12　如果上题中 b 绕组接反，试说明磁场如何反方向转动。

* P17.13　两极感应电动机的磁通密度(磁感应强度)：$B = B_m\cos(\omega t - \theta)$，其中 B_m 是最大磁通密度，θ 是绕气隙转动的角位移，假设电动机顺时针转动，试分别写出磁极数为 4 和磁极数为 6 的感应电动机磁通密度的表达式。

P17.14　假设感应电动机用超导材料做成转子导条(即转子只有纯电感和零电阻)，这能否改善电机性能？从电动机的机械特性出发来解释。

图 P17.11　两极感应电动机

17.2 节　感应电动机的等效电路和参数计算

P17.15　感应电动机转子的两种基本结构是什么？哪一个更经久耐用？

* P17.16　交流电源频率为 60 Hz，电压有效值为 220 V，试画出磁极数为 4、输出功率 5 马力、三角形连接的三相感应电动机的机械特性。计算并标出关键性能参数，如电机额定状态下的转速、电磁转矩、最大转矩和启动转矩。分别计算额定运行和启动时的线电流。

P17.17　列出选择电动机时最重要的五个规格参数(除价格成本以外)，并指出每个参数是希望大些好还是小些好。

P17.18　一频率为 60 Hz 电源供电的绕线式感应电动机，转差率为 40%，通过增加转子的电阻来调速。假设定子绕组的电阻可忽略，也忽略转动中的各损耗，试求这台电动机的效率。

P17.19　一磁极数为 8，电源频率为 60 Hz 的交流感应电动机，转速为 850 rpm，输出功率为 2 马力，转动机械损耗为 100 W，试求该电机的转差率、定子电流的频率、转子电流的频率及转子的铜损。

* P17.20　为了将启动电流降到要求值，感应电动机通过降电压启动，当电机转速接近额定转速时，再将电压增加到所需额定值。见例 17.2，如启动电压为 220 V，试计算该电动机的启动电流和电磁转矩，将计算结果和例 17.2 的结果进行比较并评价。

P17.21　限制启动电流的另外一个方法是在电机启动时将定子绕组串联一个外电阻，当电机接近额定速度时，切断此电阻的连接。如例 17.1 和例 17.2 的启动电流要求限制在 $50\sqrt{3}$ A，分别计算所需串联的电阻值，并计算串联电阻后的启动转矩，与例 17.2 比较启动转矩的大小并给出评价。

P17.22　额定电压有效值为 240 V，频率 60 Hz 的电源，供给磁极数为 4、三角形连接的三相感应式电动机，该电动机有 $R_s = 1\ \Omega$，$R'_r = 0.5\ \Omega$，$X_s = 1.5\ \Omega$，$X'_r = 0.8\ \Omega$，$X_m = 40\ \Omega$。电动机在负载下运行速度为 1728 rpm，机械损耗 200 W。试求电动机功率因数、输出功率、铜损和效率。

* P17.23　上题的电动机忽略其机械损耗，试求空载下的转速、线电流和功率因数。

P17.24　如习题 P17.22 中的电动机，忽略各损耗，试求电机启动转矩和启动线电流。

P17.25　一台磁极数为 6，电压有效值为 440 V，电源频率为 60 Hz 三角形连接感应电动机，其 $R_s = 0.08\ \Omega$，$R'_r = 0.06\ \Omega$，$X_s = 0.20\ \Omega$，$X'_r = 0.15\ \Omega$，$X_m = 7.5\ \Omega$。负载运行状态下，电动机的转差率为 4%，机械损耗 2kW，试求功率因数、输出功率、铜损、输出转矩和效率。

P17.26　如习题 P17.25 的电动机，忽略其机械损耗，求空载下的转速、线电流和功率因数？

P17.27　如习题 P17.25 的电动机，忽略其各种损耗，试求电动机的启动转矩和启动电流。

P17.28　一台功率 2 马力、磁极数为 6、频率为 60 Hz、三角形连接的三相感应电动机。转速为 1140 rpm，电压有效值为 220 V，线电流为 5.72 A，功率因数为 80% 滞后，求电动机的额定效率。

* P17.29　一台线电压有效值为 440 V，频率 60 Hz，星形连接的三相感应式电动机，功率因数为 80%，电感性，输出电流为 16.8 A，其定子铜损耗是 350 W，转子铜损耗为 120 W，总的转动损耗为 400 W。

试求气隙损失功率 P_{ag}、电磁转矩 P_{dev}、输出功率 P_{out} 和效率。

P17.30 一台电源频率的 60 Hz 感应式电动机，其机械特性曲线见图 P17.30。试求电动机的极数有多少，在稳定运行状态下，求转速、转差率、输出功率和转子铜损耗。忽略转动损耗。

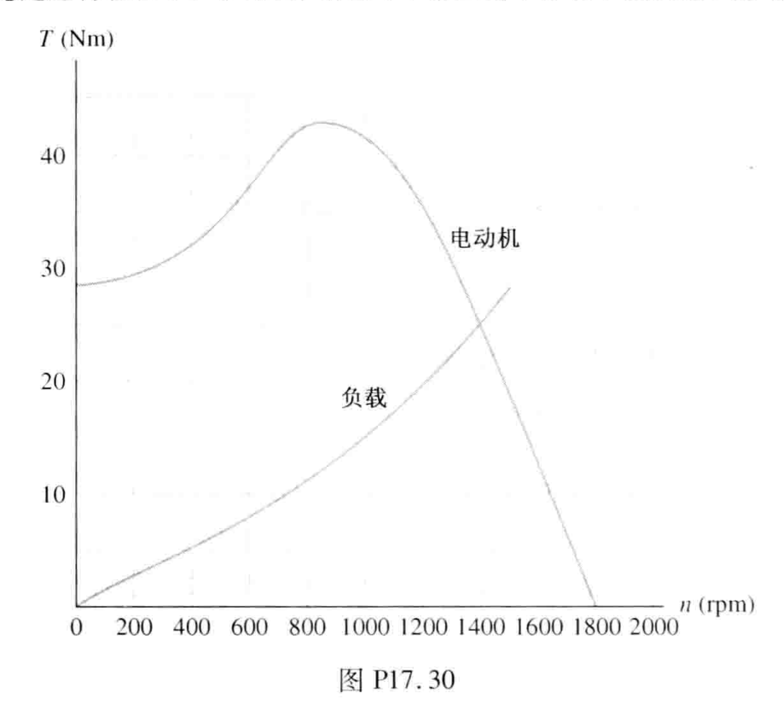


图 P17.30

P17.31 在上题中，设电动机和负载的转动惯性为 5 kgm²。计算电动机从静止加速到 1000 rpm 所需的时间。(提示：在正常转速范围内，电动机的输出转矩和负载转矩之差大约为 25 N · m。)

*P17.32 磁极数为 2，频率为 60 Hz 的感应电动机转速为 3500 rpm，输出功率为 5 马力。空载运行状态下，速度为 3598 rpm。设转矩损耗与转速无关，求转速在 3500 rpm 时的机械损耗。

P17.33 一台磁极数为 4，频率为 60 Hz，电压有效值为 240 V 的感应式电动机，转速为 1750 rpm，输出功率 2 马力。若负载为起重机，要求输出转矩与转速曲线为常数，假设电动机运行在转矩正比于转差率的情形下，当电动机工作在额定电压时写出电机转矩和转差率的关系式。当电压有效值降到 220V 时，计算此时电动机的转速。

17.3 节 同步电机

P17.34 给出同步电动机在工业应用中比感应式电动机更适合的两种场合。

*P17.35 列出同步电动机启动的几种措施。

P17.36 什么是同步电动机的电容器？用它有什么实际好处？

P17.37 画出同步电动机的 V 曲线，并标注坐标。指出哪部分是功率因数超前，哪部分是滞后？并画出对应 V 曲线的最小点处的相量图。

*P17.38 同步电动机工作在单位功率因数、负载功率为输出额定功率的 75% 的状态下。如果负载功率增加到额定功率，问下列各物理量如何变化？(a)励磁电流；(b)机械速度；(c)输出转矩；(d)电枢绕组电流；(e)功率因数；(f)转矩角。

P17.39 同步电动机运行在额定状态、单位功率因数时，如果励磁电流增加，下列各量会如何变化？(a)输出功率；(b)机械速度；(c)输出转矩；(d)电枢绕组电流；(e)功率因数；(f)转矩角。

P17.40 一台电动机的磁极数为 6，电源频率为 60 Hz，电磁功率为 5 马力，转矩角 5°。试求电机转速和最大电磁转矩。假设负荷转矩增加到电磁转矩的两倍，求转矩角、最大转矩和最大电磁功率。

*P17.41 一台磁极数为 10，电源频率为 60 Hz，电磁功率为 100 马力的电动机，当电动机在额定状态下运行时转矩角为 20°。画出该电动机的机械特性图，并标明额定转矩和最大转矩。

P17.42 一台磁极数为8，电源电压有效值为240 V，频率60 Hz，三角形连接的同步电动机以稳定电磁功率50马力运行，功率因数为1，转矩角15°。如果通过增加B_r来增加励磁电流20%，试求此时的转矩角和功率因数，功率因数是超前还是滞后？

P17.43 一台磁极数为6，电源电压为240 V，频率为60 Hz，三角形连接的同步感应电动机运行在电磁功率为50马力、单位功率因数、转矩角为15°的状态下。求该电动机的相电流。假设去掉负荷使得电磁功率为零，求此时的电流值、功率因数和转矩角。

*P17.44 一台电压有效值为480 V、三角形连接的同步感应电动机运行在电磁功率为零，输入相电流为15 A（相位滞后电压）。若同步电动机感抗为5 Ω，励磁电流为5 A。设转子磁场幅值正比于励磁电流，需要多大励磁电流可将电枢绕组的电流减小到零？

P17.45 一台电压有效值为240 V、三角形连接，输出功率100马力，电源频率为60 Hz，磁极数为6的同步感应电动机，电磁功率（包括损耗在内）为50马力，功率因数为90%超前，同步电动机的电抗$X_s=0.5\ \Omega$。(a)求该电动机的转速和电磁转矩；(b)求相量$\mathbf{I}_a$，$\mathbf{E}_r$和转矩角；(c)设励磁为常数，负载转矩一直增加直到电磁功率为100马力，试求新的相量$\mathbf{I}_a$，$\mathbf{E}_r$，转矩角和功率因数。

P17.46 一台电源电压有效值为240 V、频率为60 Hz、磁极数为6、功率为100马力、三角形连接的同步感应电动机运行在电磁功率100马力（包含损耗在内）、功率因数85%滞后、电抗为$X_s=0.5\ \Omega$、励磁电流为$I_f=10\text{A}$的状态下。若需功率因数为100%，则励磁电流为多大？设没出现磁饱和，且B_r正比于I_f。

*P17.47 (a)一台磁极数为12、电源频率为60 Hz的同步感应电动机驱动磁极数为10的发电机。问在发电机电枢绕组上感应的电压频率是多少？(b)设驱动负载实现转速为1000 rpm，要求频率60 Hz的三相电源的功率多大？画出整个同步电机驱动负载的系统图，并标明磁极数和各台电机的运行频率。（提示：有多个正确答案。）

P17.48 设同步电动机作为仪器来测量电枢绕组的电流与电压以及励磁电流。励磁电路中电位器来调节励磁电流大小。讨论如何调节励磁电流以得到单位功率因数？

P17.49 一台电源频率为60 Hz，电压有效值为480 V，功率为200马力的三角形连接的同步感应电动机空载下运行，其励磁电流可调到最小值16.45 A，每相电枢绕组的复阻抗为$R_s+jX_s=0.05+j1.4$（本章一直忽略R_s，但其对电机效率的计算却很重要）。求电动机工作在功率因数90%超前、负载满载运行下的电动机效率。

17.4节 单相电动机

*P17.50 一台额定功率1马力，电压有效值120 V，转速1740 rpm，频率60 Hz，电容式启动的感应单相电动机在额定状态下运行，从电源处吸收电流10.2A，电动机效率80%。试求(a)电动机的功率因数；(b)满负载状态下的电动机阻抗；(c)电动机的极数。

P17.51 在微小转差率下，单相感应电动机输出功率$P_{\text{out}}=K_1s-K_2$，其中K_1和K_2是常数，s是转差率。若电动机额定转速为3500 rpm，功率为0.5马力，空载下转速为3595 rpm，试求输出功率为0.2马力时的转速。

P17.52. 一台电源频率为60 Hz，功率为0.5马力的电动机在启动时的励磁阻抗如图P17.52所示。试求需要多大电容C，使得相量$\mathbf{I}_a$和$\mathbf{I}_m$相位角相差90°？

*P17.53 密歇根州北部一个农场的房子坐落在乡间道路尽头。从配电箱的电源线看去，其戴维南等效阻抗为$0.2+j0.2\ \Omega$，等效电压为频率60 Hz，有效值240 V的交流电源。一台功率为2马力，电压有效值为240 V，电容启动式的单相电动机用来抽水。在额定状态下，电动机的功率因数为75%，效率为80%。设启动电流是额定电流的6倍。若电动机启动开始抽水，最糟糕情形下房子的电压降百分比是多少？

P17.54 如何让电容启动式单相感应式电动机的转向反向？

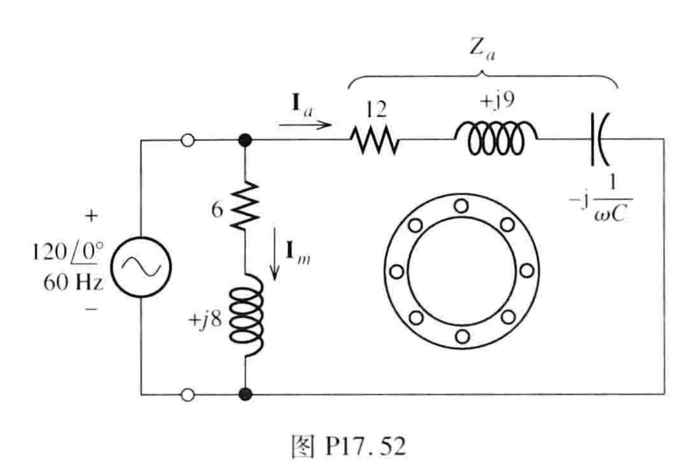


图 P17.52

P17.55 哪一种电动机更适合使用在便携式真空除尘器中，是感应式电动机还是通用电动机？对于取暖系统的扇叶呢？对于冰箱的压缩机呢？对于可调速的手持式电钻呢？给出以上每个答案的理由。

17.5 节 步进电动机和无刷直流电动机

P17.56 对于一台有 6 个定子极数、8 个转子极数的单相感应电动机，试参考图 17.33(a)，画出步进电机磁阻的横截面图，标出转子绕组及顺时针转动次序。什么是步进电动机每一步的旋转角？

P17.57 利用网络查找更多有关步进电动机的资料。

P17.58 和传统直流电动机相比，无刷直流电动机有哪些优点？

测试题

以下是一套测试题，以此检测自己是否掌握了本章的基本概念。测试题的答案在附录 E 中，详解则在网上学生资源文档中。附录 F 说明了学生资源的详细信息。

T17.1 (a)一台极数为 4 的三相感应电动机定子绕组电流在气隙中产生磁场，试定性描述一下该磁场。(b)写出磁通密度(是时间和角位移的函数)的表达式，并给出各物理量的定义。

T17.2 除了价格低廉外，感应电动机的其他五个好的性能是什么？

T17.3 一台电源频率为 60 Hz、电压有效值为 240 V、磁极数为 8、星形连接的三相感应式电动机参数为：$R_s=0.5\ \Omega$，$R'_r=0.5\ \Omega$，$X_s=2\ \Omega$，$X'_r=0.8\ \Omega$，$X_m=40\ \Omega$。在负荷状态下，电动机转速为 864 rpm，机械损耗为 150 W。求电动机的功率因数、输出功率、线电流、铜损耗、输出转矩和效率。

T17.4 一台电源频率为 60 Hz、磁极数为 8、功率为 20 马力的三相感应电动机在额定状态下转速为 850 rpm，试求额定状态下的转差率和转子电流频率。另外，当负载转矩下降了 20% 时，计算该电动机的转速。

T17.5 描述一台电源频率为 60 Hz、磁极数为 6 的三相同步电动机的结构和工作原理。

T17.6 一台电源频率为 60 Hz、电压有效值为 440 V、磁极数为 8、三角形连接的同步电动机，电磁功率恒定为 20 马力，功率因数为 1，转矩角为 10°。当 B_r 下降 25% 时，试计算励磁电流下降了多少？求转矩角和功率因数，是超前还是滞后？

附录A　复　　数

在第5章，如果将电压和电流全部用复数表示(即采用相量表示)，那么稳定条件下的正弦电路的分析就更为简单。在本附录中，我们将复习复数的有关知识。

复数的基本概念

复数含有虚数 $j=\sqrt{-1}$(电气工程中用j来表示 -1 的平方根而不用i，因为i常用来表示电流)，如 $3+j4$ 和 $-2+j5$。

我们说复数 $Z=x+jy$，其中 x 称为复数的实部，y 称为复数的虚部，复数也可以在复平面上表达。在复平面上实部用横坐标表示，虚部用纵坐标表示，那么该复数就是从原点出发指向由横坐标和纵坐标确定的该点的有向线段，如图 A.1 所示。

纯虚数如 j6，其实部为零。另外，纯实数如5，虚部为零。

复数的代数形式 $x+jy$ 在复平面图上可用直角坐标表示，共轭复数就是改变原复数的虚部符号得到的。如 $Z_2=3-j4$，其共轭复数为 $Z_2^*=3+j4$(注意用符号 * 表示共轭复数)。

复数在复平面上的加、减、乘和除运算类似于代数运算，需要用 $j^2=-1$ 替换。

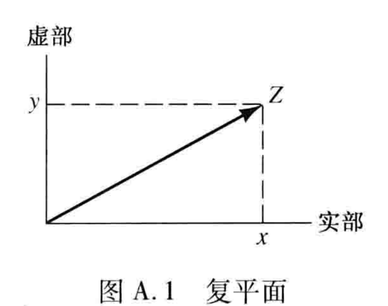


图 A.1　复平面

例 A.1　代数形式的复数运算。

已知 $Z_1=5+j5$，$Z_2=3-j4$，试求 Z_1+Z_2，Z_1-Z_2，Z_1Z_2 和 Z_1/Z_2 的代数形式。

解：对于复数的加法，有

$$Z_1+Z_2=(5+j5)+(3-j4)=8+j1$$

注意，复数的加法运算就是复数的实部和实部相加，虚部和虚部相加。

对于复数的减法，有

$$Z_1-Z_2=(5+j5)-(3-j4)=2+j9$$

在这个例子中，Z_2 的各部分与 Z_1 的相应部分相减。

对于复数的乘法，有

$$\begin{aligned}Z_1Z_2&=(5+j5)(3-j4)\\&=15-j20+j15-j^220\\&=15-j20+j15+20\\&=35-j5\end{aligned}$$

注意，我们将二项式的乘积展开，然后再应用 $j^2=-1$。

对于复数的除法，有

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{5+j5}{3-j4}$$

为将式子化简为代数形式，可以通过将分子和分母同乘以分母的共轭复数，这样分母就变为纯实部，然后分子的各部分都除以实数分母，有

$$\begin{aligned}\frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{5+\mathrm{j}5}{3-\mathrm{j}4}\times\frac{Z_2^*}{Z_2^*}\\ &= \frac{5+\mathrm{j}5}{3-\mathrm{j}4}\times\frac{3+\mathrm{j}4}{3+\mathrm{j}4}\\ &= \frac{15+\mathrm{j}20+\mathrm{j}15+\mathrm{j}^2 20}{9+\mathrm{j}12-\mathrm{j}12-\mathrm{j}^2 16}\\ &= \frac{15+\mathrm{j}20+\mathrm{j}15-20}{9+\mathrm{j}12-\mathrm{j}12+16}\\ &= \frac{-5+\mathrm{j}35}{25}\\ &= -0.2+\mathrm{j}1.4\end{aligned}$$

练习 A.1 已知 $Z_1 = 2 - \mathrm{j}3$, $Z_2 = 8 + \mathrm{j}6$, 试求 $Z_1 + Z_2$, $Z_1 - Z_2$, Z_1Z_2 和 Z_1/Z_2 的代数形式。

答案: $Z_1 + Z_2 = 10 + \mathrm{j}3$, $Z_1 - Z_2 = -6 - \mathrm{j}9$, $Z_1Z_2 = 34 - \mathrm{j}12$, $Z_1/Z_2 = -0.02 - \mathrm{j}0.36$。

极坐标形式的复数

复数可以用极坐标形式表示，有向线段的长度表示复数的大小，有向线段与正实轴的夹角表示极坐标的角度，复数的极坐标形式如

$$Z_3 = 5\angle 30^\circ \quad 和 \quad Z_4 = 10\angle -45^\circ$$

如图 A.2 所示。有向线段的长度表示复数 Z 的绝对值大小，称为复数的模。

复数可以由极坐标转化为直角坐标，反之亦然，之间的转化通过复数的模 $|Z|$、复数的实部 x 以及复数的虚部 y 构成的直角三角形实现，如图 A.3 所示。在这个三角形中，可得：

$$|Z|^2 = x^2 + y^2 \tag{A.1}$$

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \tag{A.2}$$

$$x = |Z|\cos(\theta) \tag{A.3}$$

$$y = |Z|\sin(\theta) \tag{A.4}$$

用这些公式可以将极坐标形式的复数转化为直角坐标形式，反之亦然。

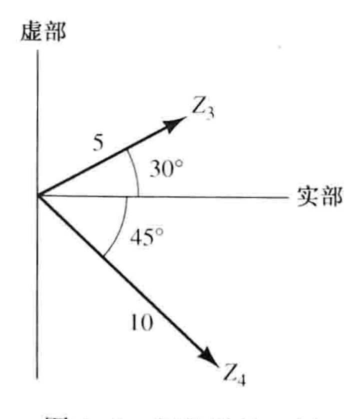


图 A.2 复数的极坐标

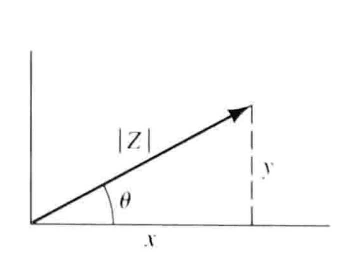


图 A.3 复数形式的转换

例 A.2 极坐标转化为直角坐标。

将复数 $Z_3 = 5\angle 30^\circ$ 转化为直角坐标形式。

解：根据式(A.3)和式(A.4)，有

$$x=|Z|\cos(\theta)=5\cos(30^\circ)=4.33$$

$$y=|Z|\sin(\theta)=5\sin(30^\circ)=2.5$$

即有

$$Z_3=5\angle 30^\circ=x+\mathrm{j}y=4.33+\mathrm{j}2.5$$

例 A.3 直角坐标转化为极坐标。

将复数 $Z_5=10+\mathrm{j}5$ 和复数 $Z_6=-10+\mathrm{j}5$ 转化为极坐标形式。

解：如图 A.4 所示，根据式(A.1)，求出每个复数的模，有

$$|Z_5|=\sqrt{x_5^2+y_5^2}=\sqrt{10^2+5^2}=11.18$$

$$|Z_6|=\sqrt{x_6^2+y_6^2}=\sqrt{(-10)^2+5^2}=11.18$$

根据式(A.2)，有

$$\tan(\theta_5)=\frac{y_5}{x_5}=\frac{5}{10}=0.5$$

对上式两边取反正切，有

$$\theta_5=\arctan(0.5)=26.57^\circ$$

即

$$Z_5=10+\mathrm{j}5=11.18\angle 26.57^\circ$$

如图 A.4 所示。

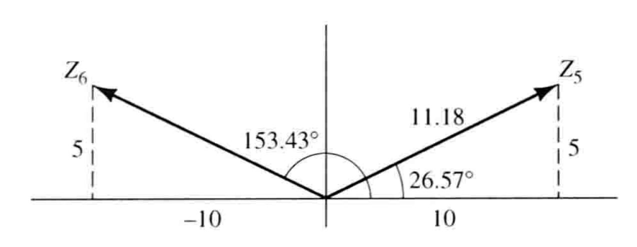


图 A.4 例 A.3 的复数极坐标图

根据式(A.2)求 Z_6，有

$$\tan(\theta_6)=\frac{y_6}{x_6}=\frac{5}{-10}=-0.5$$

对上式两边取反正切，有

$$\theta_6=-26.57^\circ$$

根据图 A.4 所示的 $Z_6=-10+\mathrm{j}5$，所求的角度显然是不对的，原因是反正切函数所求的值有多个，而实际上通过计算器获得的值只是基本值。如果复数在虚轴的左半部(也就是实部为负数)，则应该将该基本值加(或减)180°。这样负数 Z_6 真实的角度为

$$\theta_6=180+\arctan\left(\frac{y_6}{x_6}\right)=180-26.57=153.43^\circ$$

最后，可得

$$Z_6=-10+\mathrm{j}5=11.18\angle 153.43^\circ$$

例 A.2 和例 A.3 演示的过程只需要一台比较简单的计算器就可完成。但是，必须重视通过反正切运算获取相位角。如果该复数实部为正，那么计算器所求的角度就是真实角度；如果复数实部为负，那么其真实角度为

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \pm 180° \qquad (A.5)$$

多数科学计算器都能通过简单的操作把复数从极坐标转化为直角坐标，反之亦然。可用自己的计算器练习并熟悉该操作，建议在复平面图上画出该复数，并检查运算结果。

练习 A.2 将复数 $Z_1 = 15\angle 45°$，$Z_2 = 10\angle -150°$ 及 $Z_3 = 5\angle 90°$ 转换为直角坐标形式。

答案： $Z_1 = 10.6 + j10.6$，$Z_2 = -8.66 - j5$，$Z_3 = j5$。

练习 A.3 将复数 $Z_1 = 3 + j4$，$Z_2 = -j10$，$Z_3 = -5 - j5$ 转换为极坐标形式。

答案： $Z_1 = 5\angle 53.13°$，$Z_2 = 10\angle -90°$，$Z_3 = 7.07\angle -135°$。

欧拉公式

欧拉公式揭示了复数和正弦量之间的关系，欧拉公式表述为

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad (A.6)$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \qquad (A.7)$$

欧拉公式的另外一种形式为

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \qquad (A.8)$$

$$e^{-j\theta} = \cos(\theta) - j\sin(\theta) \qquad (A.9)$$

由此，复数 $e^{j\theta}$ 的实部为 $\cos(\theta)$，虚部为 $\sin(\theta)$，如图 A.5 所示，其幅值为

$$|e^{j\theta}| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}$$

由 $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$，上式化为

$$|e^{j\theta}| = 1 \qquad (A.10)$$

而且，复数 $e^{j\theta}$ 的角度为 θ，因此有

$$e^{j\theta} = 1\angle\theta = \cos(\theta) + j\sin(\theta) \qquad (A.11)$$

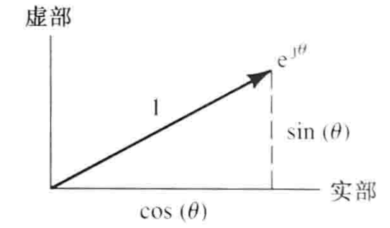


图 A.5 欧拉公式

类似有

$$e^{-j\theta} = 1\angle -\theta = \cos(\theta) - j\sin(\theta) \qquad (A.12)$$

其中，$e^{-j\theta}$ 是复数 $e^{j\theta}$ 的共轭复数。

复数 $A\angle\theta$ 可以写成

$$A\angle\theta = A \times (1\angle\theta) = Ae^{j\theta} \qquad (A.13)$$

把 $Ae^{j\theta}$ 称为复数的指数形式，由此，每个给定的复数可用 3 种形式表示——直角坐标形式、极坐标形式以及指数形式。将式(A.11)代入式(A.13)，可得到复数的 3 种形式之间的变换关系：

$$A\angle\theta = Ae^{j\theta} = A\cos(\theta) + jA\sin(\theta) \qquad (A.14)$$

例 A.4 复数的指数形式。

用指数形式和直角坐标形式表述复数 $Z = 10\angle 60°$，并在复平面图上画出。

解： 根据式(A.13)把复数极坐标形式转换为指数形式，有

$$Z = 10\angle 60° = 10e^{j60°}$$

根据式(A.8)可得到复数的直角坐标形式：

$$Z = 10 \times (e^{j60^\circ})$$
$$= 10 \times [\cos(60^\circ) + j\sin(60^\circ)]$$
$$= 5 + j8.66$$

复数 Z 如图 A.6 所示。

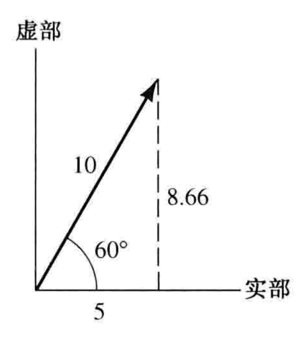


图 A.6　例 A.4 的图

练习 A.4　将复数 $Z_1 = 10 + 10j$ 和 $Z_2 = -10 + j10$ 用极坐标和指数形式表示。

答案： $Z_1 = 14.14\underline{/\ 45^\circ} = 14.14e^{j45^\circ}$，$Z_2 = 14.14\underline{/\ 135^\circ} = 14.14e^{j135^\circ}$

运用复数的极坐标和指数形式进行算术运算

进行复数的加减运算时，必须首先把复数转化为直角坐标形式，然后再将实部和实部相加减，虚部和虚部相加减。

已知两个指数形式的复数如下：

$$Z_1 = |Z_1|e^{j\theta_1} \quad \text{和} \quad Z_2 = |Z_2|e^{j\theta_2}$$

其对应的极坐标形式如下：

$$Z_1 = |Z_1|\underline{/\theta_1} \quad \text{和} \quad Z_2 = |Z_2|\underline{/\theta_2}$$

进行复数的乘法运算时，用指数形式，有

$$Z_1 \times Z_2 = |Z_1|e^{j\theta_1} \times |Z_2|e^{j\theta_2} = |Z_1||Z_2|e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

类似地，用极坐标表示复数的乘法，有

$$Z_1 \times Z_2 = |Z_1|\underline{/\theta_1} \times |Z_2|\underline{/\theta_2} = |Z_1||Z_2|\underline{/\theta_1 + \theta_2}$$

由此，极坐标形式的复数相乘时，把幅度相乘、角度相加。

对于复数的除法，其指数形式有

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|e^{j\theta_1}}{|Z_2|e^{j\theta_2}} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

如果采用极坐标形式则有

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|\underline{/\theta_1}}{|Z_2|\underline{/\theta_2}} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}\underline{/\theta_1 - \theta_2}$$

由此，采用极坐标形式进行复数相除时，则幅值相除、角度相减。

例 A.5　极坐标形式的复数运算。

已知 $Z_1 = 10\underline{/\ 60^\circ}$ 和 $Z_2 = 5\underline{/\ 45^\circ}$，试求 Z_1Z_2、Z_1/Z_2 及 $Z_1 + Z_2$ 的极坐标形式。

解： 对于复数乘法，有

$$Z_1 \times Z_2 = 10\underline{/60^\circ} \times 5\underline{/45^\circ} = 50\underline{/105^\circ}$$

对于复数的除法，有

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{10\underline{/60^\circ}}{5\underline{/45^\circ}} = 2\underline{/15^\circ}$$

对于复数的加减，必须先将复数转化为直角坐标形式，根据式(A.14)，有

$$Z_1 = 10\underline{/60^\circ} = 10\cos(60^\circ) + j10\sin(60^\circ)$$
$$= 5 + j8.66$$
$$Z_2 = 5\underline{/45^\circ} = 5\cos(45^\circ) + j5\sin(45^\circ)$$
$$= 3.54 + j3.54$$

把两个复数相加，得到其和 Z_s 为

$$\begin{aligned} Z_s &= Z_1 + Z_2 = 5 + \mathrm{j}8.66 + 3.54 + \mathrm{j}3.54 \\ &= 8.54 + \mathrm{j}12.2 \end{aligned}$$

再把 Z_s 转化为极坐标形式：

$$|Z_s| = \sqrt{(8.54)^2 + (12.2)^2} = 14.9$$

$$\tan\theta_s = \frac{12.2}{8.54} = 1.43$$

对等式两边取反正切，有

$$\theta_s = \arctan(1.43) = 55°$$

因为 Z_s 的实部为正值，所求的反正切基本角为正确的(即55°是正确的)，从而可得

$$Z_s = Z_1 + Z_2 = 14.9\angle 55°$$

练习 A.5 已知 $Z_1 = 10\angle 30°$ 和 $Z_2 = 20\angle 135°$，试求 Z_1Z_2、Z_1/Z_2、$Z_1 - Z_2$ 和 $Z_1 + Z_2$ 的极坐标形式。

答案: $Z_1Z_2 = 200\angle 165°$，$Z_1/Z_2 = 0.5\angle 105°$，$Z_1 - Z_2 = 24.6\angle -21.8°$；$Z_1 + Z_2 = 19.9\angle 106°$。

小结

1. 复数可以表示成直角坐标形式、极坐标形式及指数形式。对于稳定条件下的交流正弦电路向量法的分析，掌握复数的加、减、乘和除运算是必要的。

2. 通过欧拉公式将正弦量和复数联系在一起。

习题

PA.1 已知 $Z_1 = 2 + \mathrm{j}3$，$Z_2 = 4 - \mathrm{j}3$，请计算 $Z_1 + Z_2$，$Z_1 - Z_2$，Z_1Z_2 和 Z_1/Z_2，并转换为直角坐标式。

PA.2 已知 $Z_1 = 1 - \mathrm{j}2$，$Z_2 = 2 + \mathrm{j}3$，请计算 $Z_1 + Z_2$，$Z_1 - Z_2$，Z_1Z_2 和 Z_1/Z_2，并转换为直角坐标式。

PA.3 已知 $Z_1 = 10 + \mathrm{j}5$ 和 $Z_2 = 20 - \mathrm{j}20$，请计算 $Z_1 + Z_2$，$Z_1 - Z_2$，Z_1Z_2 和 Z_1/Z_2，并转换为直角坐标式。

PA.4 试将以下复数分别转换为极坐标式和指数式的复数：(a) $Z_a = 5 - \mathrm{j}5$；(b) $Z_b = -10 + \mathrm{j}5$；(c) $Z_c = -3 - \mathrm{j}4$；(d) $Z_d = -\mathrm{j}12$.

PA.5 请将以下复数转换为直角坐标式和指数式：(a) $Z_a = 5\angle 45°$；(b) $Z_b = 10\angle 120°$；(c) $Z_c = -15\angle -90°$；d. $Z_d = -10\angle 60°$。

PA.6 请将以下复数转换为直角坐标式和极坐标式：(a) $Z_a = 5\mathrm{e}^{\mathrm{j}30°}$；(b) $Z_b = 10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}45°}$；(c) $Z_c = 100\mathrm{e}^{\mathrm{j}135°}$；d. $Z_d = 6\mathrm{e}^{\mathrm{j}90°}$。

PA.7 请将以下复数转换为直角坐标式：

(a) $Z_a = 5 + j5 + 10\angle 30°$

(b) $Z_b = 5\angle 45° - j10$

(c) $Z_c = \dfrac{10\angle 45°}{3 + j4}$

(d) $Z_d = \dfrac{15}{5\angle 90°}$

附录 B　电阻的色标法(色环标注法)

有几种系列的电阻被广泛应用于电子电路中。容差为 5%、10% 和 20%，具有碳薄膜和有一定碳含量的电阻，可用于各种各样的功率等级(如 1/8 W，1/4 W 和 1/2 W)。这类电阻应用于非紧急的场合，比如偏置电阻。

容差为 1% 的具有金属薄膜的电阻用于具有更高精度要求的场合，比如我们经常使用金属薄膜电阻作为运算放大器的反馈电阻。

线绕电阻可用于大功耗等级的电路。线绕电阻通常由电阻丝在某些材料(如陶瓷)上绕制而成，通常带有一定大小的电感值。因此，它们不适合在高频电路中作为纯电阻使用。

容差为 5%、10%、20% 的电阻可以通过表面的色环来表示该电阻的阻值及容差，如图 B.1 所示。最靠近电阻一端的色环为第 1 条线。第 1 条线和第 2 条线代表电阻值的非零位数值，第 3 条线代表乘数的指数大小，第 4 条线代表电阻的容差，第 5 条线表示电阻是否可以满足某些军用可靠性标准，供选择参考。

表 B.1 综合了电阻表面彩色线条的信息，列出了容差为 5%、10% 和 20% 的电阻的标准非零位阻值。表 B.2 列出了容差为 1% 的电阻的标准非零位阻值。

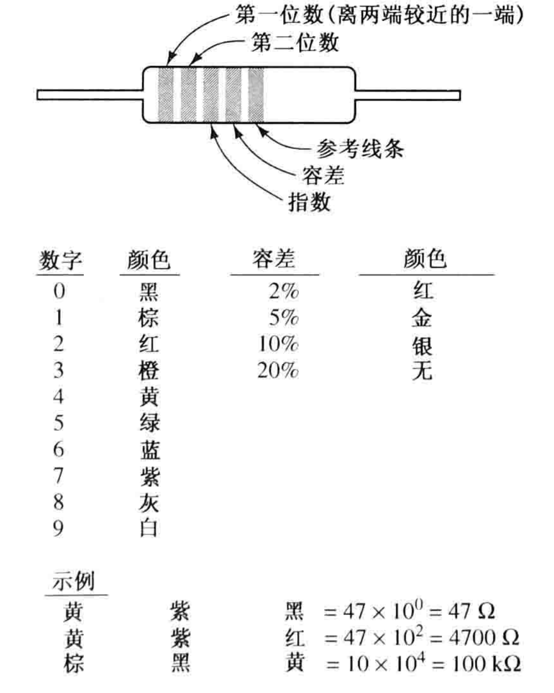


图 B.1　电阻色环读值

表 B.1　5%容差电阻标注值[a]

10	16	**27**	43	**68**
11	**18**	30	**47**	75
12	20	**33**	51	**82**
13	**22**	36	**56**	91
15	24	**39**	62	

a. 10% 和 20% 容差电阻只能取加粗值。

表 B.2 1%容差金属薄膜电阻标准值

100	140	196	274	383	536	750
102	143	200	280	392	549	768
105	147	205	187	402	562	787
107	150	210	294	412	576	806
110	154	215	301	422	590	825
113	158	221	309	432	604	845
115	162	226	316	442	619	866
118	165	232	324	453	634	887
121	169	237	332	464	649	909
124	174	243	340	475	665	931
127	178	249	348	487	681	953
130	182	255	357	499	698	953
133	187	261	365	511	715	
137	191	267	374	523	732	

附录 C　工程考试基础

成为一个授权的专业工程师(PE)是迈向成功工程职业生涯最重要的一步。在美国，所有50 个州都要求工程师持有 PE 证书，他们的工作可能会影响生命、健康、财产或向公众提供服务的人们。因此，对于许多类型的工作是绝对要求持有认证证书的。此外，持有证书的工程师比其他工程师拥有更多的机会和赚取更高的薪水(高出 15% ~25%)。

获取证书的要求由各州自己设置，但每个州都类似。此外，通过互惠协议，许多州都承认在其他州获得的证书。一般来说，获得 ABET(认证工程计划的学位)需要 4 年的相关工作经验，并成功完成两个州的考试。到 2020 年，硕士学位和同等学力有可能成为专业注册的要求。考试由国家工程勘察评审会准备和打分。该考试的基础工程考试(FE)可以在任何时间进行，工程考试(PE)的原理和实践部分必须至少 4 年的工作经验才能进行。

作为一名工程师，建议在你毕业之前或之后不久参加 FE 考试，越早越好，因为考试题目的题材十分广泛。为了通过 FE 考试，许多工程师努力去重新学习知识点，以至于使他们回忆起毕业的时候。如果你是一名机械工程师、土木或化学工程师，你的工作不会经常用到电路知识。经过 10 年或更多年后，你也许不能回答关于电路的问题，但当你使用本书完成这门课程学习后就很容易解答了。因此，在你大四这年参加考试是最好的。考试在每年的 4 月和 10 月进行。在参加 FE 考试之前，可使用本书复习电路知识。

FE 考试分为一个上午会议(120 题)，针对所有学科的共同题目；一个下午会议(60 题)，针对每个单独的学科。为了反映工程实践中的变化，FE 考试的规格在不断更新。在你参加考试的时候，应当参考张贴在 www. ncees. org 网站上的考试指南。目前，上午的会议包含 120 个题目，涉及数学、工程概率统计、化学、计算机、职业道德和商业惯例、工程经济学、工程力学(静力学和动力学)、材料强度、材料特性、流体力学、电磁学和热力学。电磁学的问题包括以下主题：

- 电荷，能量，电流，电压，功率
- 一个移动电荷在电场中做功(电压和功之间的关系)
- 电荷之间的力
- 电流和电压定律(基尔霍夫，欧姆)
- 等效电路(串联，并联)
- 电容和电感
- 电抗和阻抗，电纳和导纳
- 交流电路
- 基本复合代数

除了电场和电荷之间的力，所有的主题都在本书中提到。

下面列出了一些在考试的上午会议中出现的典型电路问题。正确答案在本附录的最后列出，解题步骤包括在学生资源文件中。

PC1　一个 3 A 的直流电流流过最初不带电的电容器。两微秒后，电容器一个极板上净电荷的幅值最接近的是：

a. 3μC　　b. 6 μC　　c. 0 μC　　d. 0.667 μC

PC2 图 PC.2 中的电路，在 10 Ω 电阻上的功耗最接近的是：

a. 22.5 W　　b. 8.27 W

c. 1.84 W　　d. 7.35 W

图 PC.2

PC3 两个初始不带电的电容分别为 6 μF 和 12 μF。电容器串联，且一个 200 V 的直流源接入电路中。从电源获取的电荷最接近的是：



a. 800 μC　　b. 3600 μC

c. 600 μC　　d. 1200 μC

PC4 输出一个功率 2 马力电压 220 Vrms 的单相异步电动机工作在满负荷时的效率是 80%，功率因数是 0.75，电动机电流的幅值最接近的是：

a. 4.07 A　　b. 11.3 A　　c. 6.35 A　　d. 8.78 A

PC5 一个 30 Ω 的电阻，一个电抗是 80 Ω 的纯电容和一个电抗是 40 Ω 的纯电感串联，这个串联组合的阻抗值最接近的是：

a. 150 Ω　　b. 50 Ω　　c. 14.1 Ω　　d. 17.1 Ω

PC6 在交流电路中，提供给负载的视在功率是 2000VA，功率因数是 0.6。无功功率最接近的是：

a. 1200 VAR　　b. 3333 VAR　　c. 1600 VAR　　d. 2500 VAR

PC7 一个 150 mF 的电容充电到电压为 100 V，一个 50 Ω 的电阻放置在电容的两端。经过 20 个时间常数后，传递给电阻的总能量最接近的是：

a. 1.5 J　　b. 0 J　　c. 0.75 J　　d. 15×10^{-3} J

PC8 在图 PC.8 所示的电路中流过 50Ω 电阻的电流最接近的是：

a. 1.56 A rms　　b. 1.10 A rms　　c. 2.20 A rms　　d. 0.52 A rms

PC9 时间 t 大于 0，图 PC.9 中流过 25Ω 电阻电流的数学表达式是：

a. $1-\exp(-2t)$ A　　b. $1-\exp(-t/2)$ A　　c. $\exp(-2t)$ A　　d. $\exp(-t/2)$ A

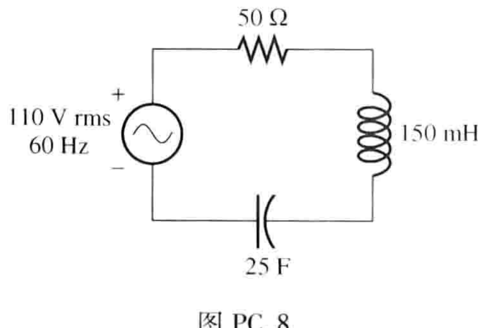


图 PC.8

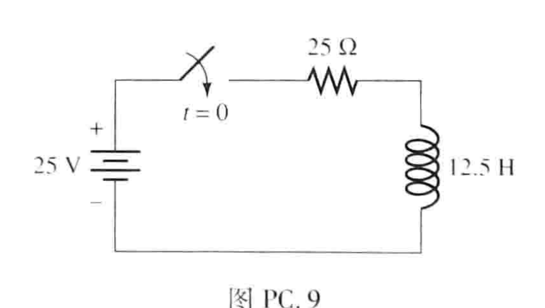


图 PC.9

PC10 在电路中有 A，B，C 3 个点的电流和电压，$V_{AC}=200$ V，$V_{CB}=50$ V。将一个 0.2 C 的电荷从 B 点移动到 A 点需要的能量大约是：

a. 30 J　　b. 40 J　　c. 10 J　　d. 50 J

答案：

PC1 b　　PC2. d　　PC3. a　　PC4. b　　PC5. b　　PC6. c　　PC7. c

PC8. a　　PC9. a　　PC10. d

附录 D　基于 SPICE 软件的计算机辅助电路分析

最早的电路分析程序称为 SPICE(模拟集成电路仿真程序的缩写)，是由美国加州大学电子研究实验室在 20 世纪 70 年代初开发的。一些已经生产的商业版本的 SPICE 包括各种在源程序上有用的扩展，其中之一是 National Instruments 公司开发的 Multisim。

MULTISIM

本书中的许多电路都可以用 Multisim 很容易地解决。使用该软件的步骤是绘制电路，并在需要测量电流和节点电压的电路中的相应点上放置测量探针，指定所需类型的分析，并运行仿真。结果将显示在电路图中或绘制在一个单独的窗口中。举个例子，图 D.1 展示了一个电路和仿真的结果。

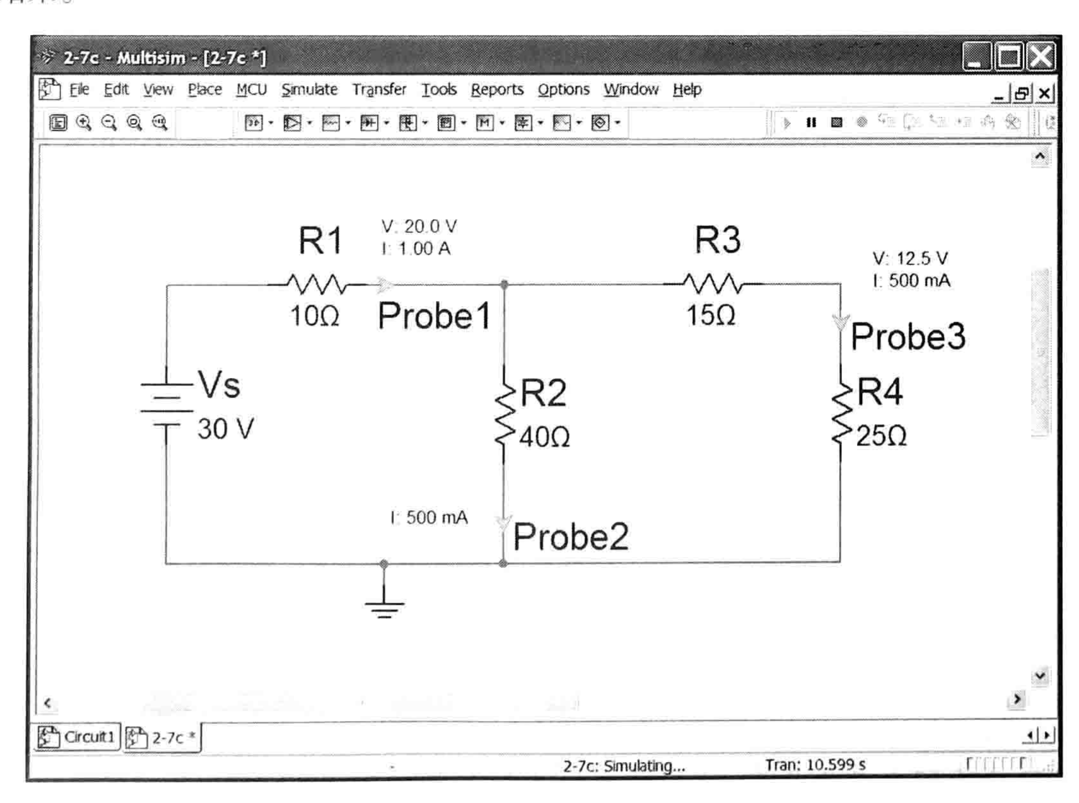


图 D.1　一个简单直流电路的 Multisim 结果

为了使用 Multisim，首先在你的计算机上安装程序。然后，将 Hambley Multisim 10.1 文件夹复制到硬盘驱动器的方便位置上。可以从链接 www.Pearsonhighered.com/hambley 下载 Hambley Multisim 10.1 文件夹。

启动 Multisim 10.1，其包含在 National Instruments/Circuit Design Suite 10.1 程序组中。然后，执行 File > > Open . . . 命令(即左击 File，然后在下拉菜单中左击 Open. . .)。然后到你之前复制到硬盘上的 Hambley Multisim 10.1 文件夹中双击 Hambley Multisim Tutorial 1 Drawing Circuits。根据本教程中的指令，通过自己的方式学习。完成之后，再继续教程 2。

当完成教程 6 时，你就能够使用 Multisim 来检查第 2 章的几乎所有问题的答案。教程 7 和 8 涉及第 4 章讨论的瞬态分析。最后，教程 9 和 10 将让你学会检查第 6 章的伯德图。

ORCAD CAPTURE CIS

基于 SPICE 的另外一种流行的软件包是 Cadence 公司的 OrCAD Capture CIS 16.2。在阅读该书的同时，可以从以下网站下载一个免费的 OrCAD 软件的演示版本：

http://www.cadence.com/products/orcad/Pages/downloads.aspx

当然，当你读到这里时，这个网站也可能改变了。但是，你可以使用搜索引擎搜索 Cadence，找到下载站点，然后下载 OrCAD。

可以从以下链接下载一个文件夹，其中包含适合学生使用的本书的电路文件和 OrCAD 教程：www.pearsonhighered.com/hambley。看看文件夹中所包含的 ReadMe.pdf，并按照说明和教程学习。

附录 E　测试题答案

T1.1　(a)4；(b)7；(c)16；(d)18；(e)1；(f)2；(g)8；(h)3；(i)5；(j)15；(k)6；(l)11；(m)13；(n) 9；(o)14。

T1.2　(a) $v_{ab} = -6$ V。(b)电压源输出功率为30 W。(c)共3个节点。(d)电流源吸收功率为12 W。

T1.3　(a) $v_{ab} = -8$ V。(b) 电流源 I_1 输出功率24 W，电流源 I_2 吸收功率8 W。(c) $P_{R1} = 5.33$ W, $P_{R2} = 10.67$ W。

T1.4　(a) $v_1 = 8$ V；(b) $i = 2$ A；(c) $R_2 = 2\ \Omega$。

T1.5　$i_{sc} = -3$ A。

T2.1　(a)6；(b)10；(c)2；(d)7；(e)10 或 13；(f)1 或 4；(g)11；(h)3；(i)8；(j)15；(k)17；(l)14。

T2.2　$i_s = 6$ A；$i_4 = 1$ A。

T2.3

```
G = [0.95 -0.20 -0.50; -0.20 0.30 0; -0.50 0 1.50]
I = [0; 2; -2]
V = G\ I % As an alternative, we could use V = inv(G)*I
```

T2.4　一个合适的方程组由下面3个方程组的任意两个组成：

1. KVL 回路1：

$$R_1 i_1 - V_s + R_3(i_1 - i_3) + R_2(i_1 - i_2) = 0$$

2. 结合回路2和3的KVL方程：

$$R_4 i_2 + R_2(i_2 - i_1) + R_3(i_3 - i_1) + R_5 i_3 = 0$$

3. 电路外围的KVL方程：

$$R_1 i_1 - V_s + R_4 i_2 + R_5 i_3 = 0$$

结合电流源方程：

$$i_2 - i_3 = I_s$$

T2.5　$V_t = 24$ V，$R_t = 24\ \Omega$，$I_n = 1$ A，I_n 的参考方向指向 b 端，参考电压 V_t 的正极在 b 的一端。

T2.6　通过叠加，流过5 Ω电阻25%的电流归因于5 V电源，功率不能叠加，但是从整个电路的分析可以看到所有的功率由15 V的电源提供，因此5 Ω电阻中没有功率是由5 V电源产生的。

T3.1　$v_{ab}(t) = 15 - 15\exp(-2000t)$ V；$w_C(\infty) = 1.125$ mJ

T3.2　$C_{eq} = 5\ \mu$F。

T3.3　$C = 4248$ pF。

T3.4　$v_{ab}(t) = 1.2\cos(2000t)$ V；$w_{peak} = 90\ \mu$J。

T3.5　$L_{eq} = 3.208$ H。

T3.6　$v_1(t) = -40\sin(500t) - 16\exp(-400t)$ V；

$v_2(2) = 20\sin(500t) - 24\exp(-400t)$ V。

T3.7　一组命令得到相应的 $v_{ab}(t)$ 的结果为：

```
syms vab iab t
iab = 3*(10^5)*(t^2)*exp(-2000*t);
vab = (1/20e-6)*int(iab,t,0,t)
subplot(2,1,1)
ezplot(iab, [0 5e-3]), title('\iti_a_b\rm (A) versus \itt\rm (s)')
subplot(2,1,2)
ezplot(vab, [0 5e-3]), title('\itv_a_b\rm (V) versus \itt\rm (s)')
```

$$v_{ab}=\frac{15}{4}-\frac{15}{4}\exp(-2000t)-7500t\exp(-2000t)-7.5\times10^{6}t^{2}\exp(-2000t)$$

可以用 MATLAB 软件测试命令，验证是否得到这样的结果和图形。

T4.1 (a) $i_1(0_-)=10$ mA, $i_2(0_-)=5$ mA, $i_3(0_-)=0$, $i_L(0_-)=15$ mA, $v_c(0_-)=10$ V。

(b) $i_1(0+)=15$ mA, $i_2(0+)=2$ mA, $i_3(0+)=-2$ mA, $i_L(0+)=15$ mA, $v_c(0+)=10$ V。

(c) $i_L(t)=10+5\exp(-5\times10^5t)$ mA。

(d) $v_c(t)=10\exp(-200t)$ V。

T4.2 (a) $2\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+i(t)=5\exp(-3t)$。

(b) $\tau=L/R=2s, i_c(t)=A\exp(-0.5t)$ A。

(c) $i_p(t)=-\exp(-3t)$ A。

(d) $i(t)=\exp(-0.5t)-\exp(-3t)$ A。

T4.3 (a) $\frac{\mathrm{d}^2vc(t)}{\mathrm{d}t^2}+2000\frac{\mathrm{d}vc(t)}{\mathrm{d}t}+25\times10^6vc(t)=375\times10^6$。

(b) $v_{cp}(t)=15$ V。

(c) 欠阻尼；$v_{Cc}(t)=K_1\exp(-1000t)\cos(4899t)+K_2\exp(-1000t)\sin(4899t)$ V。

(d) $v_c(t)=15-15\exp(-1000t)\cos(4899t)-(3.062)\exp(-1000t)\sin(4899t)$ V。

T4.4 指令如下：

```
syms vC t
S = dsolve('D2vC + 2000*DvC + (25e6)*vC = 375e6', 'vC(0) = 0, DvC(0) = 0');
simple(vpa(S,4))
```

指令存放在以 T_4_4 命名的 M 文件中，可以在 MATLAB 文件夹中找到，有关访问此文件夹的信息，请参见附录 F。

T5.1 $I_{rms}=\sqrt{8}=2.828$ A；$P=400$ W。

T5.2 $v(t)=9.914\cos(wt-37.50°)$。

T5.3 (a) $V_{1rms}=10.61$ V；(b) $f=200$ Hz；(c) $w=400\pi$ rad/s；(d) $T=5$ ms；(e) $\mathbf{V}_1$ 滞后 $\mathbf{V}_2$ 15° 或 $\mathbf{V}_2$ 超前 $\mathbf{V}_1$ 15°。

T5.4 $\mathbf{V}_R=7.071\angle-45°$ V；$\mathbf{V}_L=10.606\angle-45°$ V；$\mathbf{V}_C=5.303\angle-135°$ V。

T5.5 $\mathbf{S}=5500\angle40°=4213+j3535$ VA；

$P=4213$ W；$Q=3535$ VAR；视在功率 = 5500 VA

功率因数 = 76.6%（滞后）

T5.6 $\mathbf{I}_{aA}=54.26\angle-23.13°$ A。

T5.7 指令：

```
Z = [(15+i*10) -15; -15 (15-i*5)]
V = [pin(10,45); -15]
I = inv(Z)*V
pout(I(1))
pout(I(2))
```

T6.1　所有的时域信号(通常是随时间变化的电流或电压)都可由各种频率、幅值以及相位的正弦波求和得到。滤波器的传递函数是频率的函数，其表达了生成输出量时输入量的幅值和相位是如何改变的。

T6.2　$v_{out}(t) = 1.789 + 3.535$。

T6.3　(a)低频渐近线的斜率是 +20 dB/十倍频。(b)高频渐近线的斜率为 0。(c)渐近线所交的坐标为 20log(50) = 34 dB, 200 Hz。(d)这是一个一阶高通滤波器。(e)截止频率是 200 Hz。

T6.4　(a)1125 Hz;(b)28.28;(c)39.79 Hz;(d)5 Ω;(e)无穷大阻抗;(f)无穷大阻抗。

T6.5　(a)159.2 kHz;(b)10.0;(c)15.92 kHz;(d)10 kΩ;(e)零阻抗;(f)零阻抗。

T6.6　(a)一阶低通滤波器;(b)二阶低通滤波器;(c)二阶带阻(陷波)滤波器;(d)一阶高通滤波器。

T6.7　一套指令是:

```
f = logspace(1,4,400);
H = 50*i*(f/200)./(1 + i*f/200);
semilogx(f,20*log10(abs(H)))
```

其他指令也能有效工作，以检验命令所生成的图形是否与上述指令所生成的一致。

T7.1　(a)12;(b)19(18 是错误的，因为其遗漏了第一步，反转变量);(c)20;(d)23;(e)21;(f)24;(g)16;(h)25;(i)7;(j)10;(k)8;(l)1(BCD 中不含十六进制符号 A 到 F 的二进制编码)。

T7.2　(a) 101100001;(b)541.7;(c)$161E_{16}$;(d) $001101010011.100001110101_{BCD}$。

T7.3　(a) $+97_{10}$; (b) -70_{10}。

T7.4　(a) $\overline{A}\,\overline{B} + \overline{(B + C)}$。(b)其只在真值表的行和与图中 $ABC = 000, 001, 100$ 相对应的单元中。(c) $D = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{B}\,\overline{C}$; (d) $D = \overline{B}(\overline{A} + \overline{C})$ 。

T7.5　(a)其只在与 $B_8B_4B_2B_1 = 0001, 0101, 1011, 1111$ 相对应的单元中。(b) $G = B_1\overline{B_2}\,\overline{B_8} + B_1B_2B_8$ 。(c) $G = B_1(\overline{B_1} + B_8)(B_2 + \overline{B_8})$ 。

T7.6　连续状态是 $Q_0Q_1Q_2 = 100$ (初始状态), 110,111,011,001,100,111。在 5 次变化过后寄存器返回其初始状态。

T8.1　(a)11; (b)17; (c)21; (d)24; (e)27; (f)13; (g)26; (h)9; (i)20; (j)12; (k)15; (l)16; (m)8; (n)29; (o)23; (p)30。

T8.2　(a)direct, 61; (b)indexed, F3; (c)inherent, FF; (d)inherent, 01; (e)immediate, 05; (f)immediate, A1。

T8.3　执行 4 个命令后，寄存器的内容和存储单元是:

A: 32	1034: 00
B: 32	1035: 19
SP:1034	1036: 58
X: 1958	1037: 19
	1038: 58
	1039: 00
	103A: 00
	103B: 00
	103C: 00

T9.1 4 个主要元素是传感器、DAQ 板、软件和通用计算机。

T9.2 系统(固有)误差的 4 种类型分别是:偏移、刻度误差、非线性和滞后。

T9.3 固有误差是指在相同条件下重复测量,但每个测量结果不同的随机误差。

T9.4 当传感器和放大器的输入端单独接地时会发生接地回路。其影响是会在所需信号中添加噪声(通常等于电源线频率及其谐波)。

T9.5 如果使用一个一端接地的传感器,则应该选择一个差分输入放大器,以避免接地回路。

T9.6 同轴电缆或屏蔽双绞线电缆。

T9.7 如果需要检测开路电压,放大器的输入阻抗应该比传感器的内部阻抗大很多。

T9.8 采样率应该是信号组件最高频率的两倍以上。否则,更高的频率分量看起来便是较低的频率分量,称为混淆现象。

T10.1 (a) $i_D \approx 9.6$ mA ;(b) $i_D \approx 4.2$ mA 。

T10.2 二极管导通,$v_x = 2.286$,$i_x = 0.571$ mA 。

T10.3 电阻为 1 kΩ,电压为 3 V。

T10.4 结果与图 10.28 相同,即使位置不同,它也可能是正确的。检查有 4 个二极管,电流从电源发出通过第一个正向导通的二极管,然后流过负载,最后流过第二个正向导通的二极管返回到电源负极。在相反的半周期中,电流的路径应该是通过其他两个二极管中的一个,再流过负载,电流方向与之前通过负载的电流方向相同,然后通过第四个二极管返回到电源另一极。

T10.5 结果与图 10.29(a)相同,将 6V 的电源转化成 5 V,将 9 V 的电源转换成 4 V,交流电压峰值改变为 10 V。然而,所呈现的结果可能有所不同。例如,只要电源的极性和二极管方向不改变,4 V 的电源和二极管 B 可以交换位置;同理,5 V 的电源和二极管也可以交换位置(也就是说,在串联连接中改变元件的位置并不影响电路工作),并联分支可以互换位置。这个问题没有给出足够的信息来正确选择电阻值,但是在 1 kΩ ~ 1 MΩ之间的任意一个电阻值都是可以接受的。

T10.6 表格应与图 10.33(a)相对应,该图中用 4 V 的电源代替了 5 V 的电源。时间常量 RC 应该比电压源周期大很多,因此选择元件值应使 $RC \gg 0.1$ s。

T10.7 二极管的小信号等效电路即是一个 10.4 Ω 的电阻。

T11.1 $A_{voc} = 1500$; $R_i = 60\ \Omega$; $R_0 = 40\ \Omega$ 。

T11.2 答案与表 11.1 相似。

T11.3 (a)跨导放大器;(b)电流放大器;(c)电压放大器;(d)互阻放大器。

T11.4 $A_{voc} = 250$(无单位或 V/V);$R_{moc} = 50$ kΩ;$G_{msc} = 0.25$ S。

T11.5 $P_d = 12$ W;$\eta = 60\%$ 。

T11.6 为避免线性波形失真,电压增益应该保持不变,并且在 1 ~ 10 kHz 频率范围内,相位响应为频率的线性函数。当增益为 100 且输入尖峰为 100 mV 时,则输出峰值为 10 V,这时放大器不应该出现削波或者 10V 输出时的非线性失真。

T11.7 运放的补偿电流、偏置电流和补偿电压的作用是添加一个直流分量到放大信号。

T11.8 当一标准正弦信号加到运放的输入端时可能会引起谐波畸变。若输出信号的频率是输入的整数倍,则在输出端就会发生畸变。谐波畸变是由于输入电压和输出电压间的非线性关系引起的。

T11.9 共模抑制比(CMRR)是差分运算放大器的差模增益与共模增益之比。理想情况下,

共模增益为 0，运放的输出信号只有差分信号。当我们关注差模信号而想要抑制共模信号时，CMRR 就显得十分重要。例如，在记录心电图时，两个电极连接到病人，我们所关注的两电极接收到的差分信号即是心电信号。另外，共模信号即是由 60 Hz 的工频电源引起的。

T12.1　$v_{GS} = 0.5\ \text{V}$，三极管截止，栅极电流为 0，这是因为小于门限电压，因此，$v_{GS} = 0.5\ \text{V}$ 的栅极电流曲线在横轴上。$v_{GS} = 4\ \text{V}$ 的栅极电流曲线在图 12.11 中给出。

T12.2　负载线分析结果是 $V_{DS\min} \approx 1.0\ \text{V}$，$V_{DSQ} \approx 2.05\ \text{V}$；$V_{DS\max} \approx 8.2\ \text{V}$。

T12.3　$R_S = 2.586\ \text{k}\Omega$。

T12.4　$g_m = 2.5\ \text{mS}$，工作点 $V_{DSQ} = 5\ \text{V}$，$V_{GSQ} = 2\ \text{V}$，$I_{DQ} = 0.5\ \text{mA}$。

T12.5　(a) 短路；(b)短路；(c)开路。

T12.6　见图 12.31(b)和(c)。NMOS 开通，PMOS 关断。

T13.1　(a)3；(b)2；(c)5；(d)7 和 1；(e)10；(f)7；(g)1；(h)7；(i)15；(j)12；(k)19。

T13.2　$V_{CE\min} \approx 0.2\ \text{V}$，$V_{CEQ} \approx 5.0\ \text{V}$，$V_{CE\max} \approx 9.2\ \text{V}$。

T13.3　$\alpha = 0.9615$，$\beta = 25$，$\gamma_\pi = 650\ \Omega$。小信号等效电路图如图 13.26 所示。

T13.4　(a)$I_C = 0.8830\ \text{mA}$，$V_{CE} = 4.850\ \text{V}$；(b)$I_C = 1.872\ \text{mA}$，$V_{CE} = 0.2\ \text{V}$。

T13.5　我们需要更换对地短路和耦合电容短路的 V_{CC} 值，以及等效电路的 BJT。

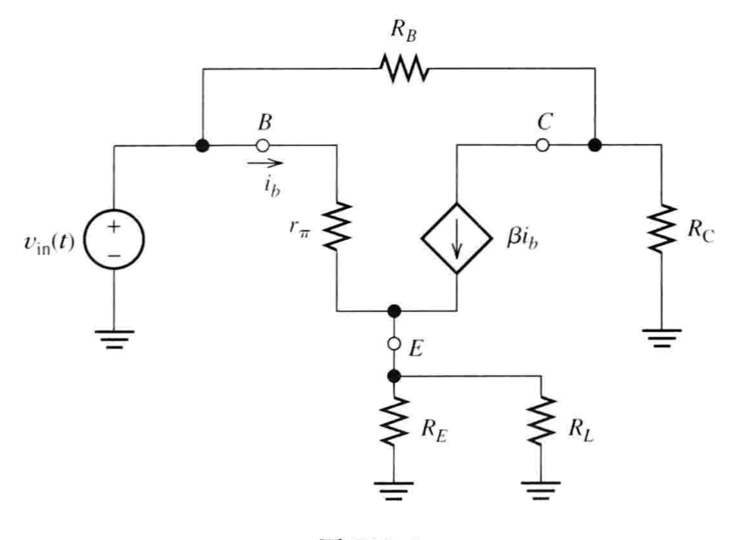


图 T13.5

T13.6　$A_v = -243.0$，$Z_{in} = 761.4\ \Omega$。

T14.1　(a)电路如图 14.4 所示，电压增益 $A_v = -R_2/R_1$。(当然，也可以利用不同的电阻符号，只要代入相应的计算公式即可。) (b)电路如图 14.11 所示，电压增益 $A_v = 1 + R_2/R_1$。(c)电路如图 14.12 所示，电压增益 $A_v = 1$。

T14.2　$A_v = -8$。

T14.3　(a)$f_{BCL} = 10\ \text{kHz}$；(b)$v_o(t) = 0.4975\cos(2\pi \times 10^5 t - 84.29°)$。

T14.4　(a)$f_{FP} = 707.4\ \text{kHz}$；(b)$V_{om} = 1\ \text{V}$；(c)$V_{om} = 4.5\ \text{V}$；(d)$V_{om} = 0.637\ \text{V}$。

T14.5　请参阅图 14.29 所示的电路图。偏置电流、补偿电流和补偿电压对放大电路的主要影响是给已有的输出信号添加了一个直流电压(通常是不希望的)。

T14.6　请参阅图 14.33。通常，可以得到 $R_1 = R_3$，$R_2 = R_4$。

T14.7　请分别参阅图 14.35 和图 14.38。

T14.8　滤波器是电路用于输出一个频率范围段，防止其他范围段的输入分量和频率输出。

有源滤波器由运算放大器、电阻器和电容器组成，14.10 节的第一段提到了多种滤波器的应用。

T15.1 (a)力为 0.72 N 并且指向 y 的负方向；(b)力为 0。

T15.2 $v = 164.9\cos(120\pi t)$ V。

T15.3 1.2 V。

T15.4 (a) $B_{gap} = 0.5357$ T；(b) $L = 35.58$ mH。

T15.5 铁芯中能量转换为热量的方式是磁滞和涡流电流。为了尽量减少磁滞的损失，而选择一种材料使得节点 B 与节点 H 之间只有薄弱的磁滞回线。为了将涡流的损失降到最低，而使得用层压板或者铁粉制作的磁芯通过绝缘黏合剂固定在一起。磁滞损耗正比于频率，涡流损耗正比于频率的平方。

T15.6 (a) $I_{1rms} = 0$，$I_{2rms} = 0$，$V_{1rms} = 120$ V，$V_{2rms} = 1200$ V。(b) $I_{1rms} = 11.43$ A。$I_{2rms} = 1.143$ A，$V_{1rms} = 114.3$ V，$V_{2rms} = 1143$ V。

T15.7 从总能量损失以及运营成本的观点出发，变压器 B 更好。

T16.1 绕组是定子上的磁场绕组和转子上的电枢绕组。电枢电流随着机械负载的变化而变化。

T16.2 请参阅图 16.5(c)。如果磁场断开，速度将会变得非常高，使得机器损坏。

T16.3 请参阅图 16.5(d)。

T16.4 速度调节 $= [(n_{no-load} - n_{full-load})/n_{full-load}] \times 100\%$。

T16.5 为了获得磁化曲线，用恒定速度驱动机器，并确定开路电枢电压 E_A 和励磁电流 I_F。

T16.6 并联连接直流电动机的功率耗损包括：(1) 磁场损耗，磁场电路中电阻的功率消耗。(2)电枢损耗，电枢电阻功率转换为热量。(3) 旋转耗损，包括摩擦、风阻、涡流耗损，以及磁滞耗损。

T16.7 通用电机是交流电机，它在结构上类似于一个串联直流电机，原理上不管是交流或者直流电源下它都可以运行。通用电机的定子层叠的目的是为了减少涡流损耗。相较于其他的单相交流电机，通用电机功率－重量比更高，在电流不过大的情况下，它能产生一个较大的启动转矩，在重负载下，能够减速使得功率更接近恒定值，而且可以设计成在高速下运行。通用电机的缺点是它有电刷和换向器，这使得它的使用寿命较短。

T16.8 (1) 改变电枢电路的电压，同时保持磁场不变。(2) 改变励磁电流，同时保持电枢电压不变。(3) 电枢电路中串联电阻。

T16.9 (a)80 V；(b)320 V。

T16.10 $I_A = 33.16$ A；$T_{dev} = 31.66$ Nm。

T16.11 (a) $P_{dev} = 4600$ W；$T_{dev} = 36.60$ Nm；$P_{RA} = 200$ W；$P_{rot} = 124$ W。(b)速度调节 $= 4.25\%$。

T16.12 2062 rpm。

T17.1 (a)四极三相感应电动机构成的磁场在气隙中由 4 个磁极互成 90°顺序排列(即北－南－北－南)。在定子磁极北下方，磁场由定子指向转子；在定子磁极南下方，磁场由转子指向定子。两极以同步转速绕电动机轴向随时间旋转。(b) $B_{gap} = B_m\cos(\omega t - 2\theta)$，其中，$B_m$ 为电场强度峰值，ω 为三相电源的角频率，θ 表示周围间隙中的角位置。

T17.2 感应电机 5 个最重要的特征如下：(1)近似的单位功率因数；(2)高的启动转矩；

(3)接近 100% 的效率;(4)低的启动电流;(5)高位扭矩。

T17.3 功率因数 =88.16%(滞后);P_{out} = 3.429 kW;I_{line} = 10.64 Arms;P_s = 169.7 W;P_r = 149.1 W;T_{out} = 37.90 Nm;η = 87.97%。

T17.4 s =5.556%;f_{slip} =3.333 Hz;860 rpm。

T17.5 六极同步电动机的定子包含一组线圈(统称为电枢),由三相交流电源激励,这些线圈产生间隔60°按顺序彼此交替的6个磁极(例如:南-北-南-北-南-北)。在定子磁极北下方,磁场由定子指向转子;在定子磁极南下方,磁场由转子指向定子。磁极围绕电动机轴线以 1200 rpm 的同步转速旋转。

转子包含运送直流电流的绕组,并建立了6个北磁极和南磁极以均匀间隔分布在定子周围。驱动负载时,转子以同步速度旋转,转子的北极轻微滞后,受到定子南极的吸引。(在某些情况下,转子也可由永久磁体组成。)

T17.6 δ_2 = 13.39°;功率因数 = 56.25%(滞后)。

附录 F　软件和网络在线的学生资源

软件

下面列出的是 National Instruments 公司的 3 个软件包：

- LabVIEW 2009 的学生版本，在 9.4 节中已经描述；
- MathScript，其与 MATLAB 有很多相同的功能，在 9.4 节中已经描述（MathScript 不具有象征性的数学能力）。
- 一个免费的 30 天试用版的 Multisim Circuit Design Suite 10. 1，这是一个基于 SPICE 的电路分析程序（因为它有 30 天的试用期，你可能希望推迟 Multisim Circuit Design Suite 的安装，直到它被用于你的课程）。附录 D 介绍了 Multisim 的在线教程。

在线学生资源[①]

本书的使用者可以访问 Student Solutions Manual（下文提到的其他文件夹），通过以下链接访问学生资源的电子版：

www. pearsonhighered. com/hambley

各章的 pdf 文档包含了各章练习的完整解决方案，以及用星号标记的最终的各章问题的答案和实践检验的完整解决方案。

MATLAB 文件夹包含该书讨论的 m 文件。除了使用 Symbolic Toolbox 的例子，这些文件夹的功能与 MathScript 相同，包含在 LabVIEW 2009 程序中。Hambley MathScript 文件包含了 MathScript 工作的 m 文件。

该书的 Multisim 10.1 文件夹包含的文件提供了 Multisim 的基本特征和各种电路的电路模拟教程。OrCAD16.2 文件包含了使用 OrCAD Capture CIS 16.2 的类似文件。在阅读本书的同时，可以在以下链接下载 OrCAD Capture 16.2 的演示版本：

http://www. ema-eda. com/products/orcad/demosoftware. aspx

附录 D 中描述了如何在 Multisim 10.1 文件夹或 OrCAD 16.2 文件夹中开始使用电路仿真的教程文件。

使用本书以前版本的老师，如果希望继续使用 OrCAD10.5，则可以下载 OrCAD10.5 文件夹和一个 OrCAD10.5 教程的更新 pdf 版本，其作为附录 D 出现在本书以前版本的网站上。

虚拟仪器文件夹包含了在 9.4 节中讨论的 LabVIEW 程序。

---

① 在线学生资源的一些资源可登录 www. hxedu. com. cn 下载。